2007 年度 力学 1 演義 (アドバンス) 問題 No. 7 (2007/06/01)

1. n 個の関数の集合 $\{f_i(x)|i=1,\cdots n\}$ を考える．すくなくとも 1 つの係数 c_i がゼロでないとして，
$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i = 0\,, \tag{1}$$
が成立するとき，$\{f_i\}$ は線形従属であるという．一方，すべての i について $c_i = 0$ の場合に限って式 (1) が成立するとき，$\{f_i\}$ は線形独立であるという．式 (1) を $n-1$ 回まで微分すると，式 (1) とあわせて c_i についての n 個の連立線形方程式が得られる．すなわち，
$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i' = 0\,, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i f_i'' = 0\,, \cdots\,, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i f_i^{(n-1)} = 0\,.$$
$c_i \neq 0$ であるような解が存在する (すなわち，$\{f_i\}$ が線形従属である) ための必要十分条件は,
$$W(x) \equiv \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0\,.$$
この W を Wronskian(ロンスキアン) と呼ぶ.
   - (a) 単振動の 2 つの解 $\sin\omega t$ と $\cos\omega t$ の Wronskian を求めて，これらが線形独立であることを確かめよ.
   - (b) 単振動の 2 つの解 $e^{\pm i\omega t}$ の Wronskian を求めて，これらが線形独立であることを確かめよ.
   - (c) 3 つの関数 $e^{\pm i\omega t}$ と $\sin\omega t$ の Wronskian を求めて，これらが線形従属であることを確かめよ.
   - (d) 2 つの関数 $f_1(x) = x$ と $f_2(x) = |x| = x\,\mathrm{sgn}\,x$ の Wronskian を求めて，これらの線形独立性を判定せよ．($\mathrm{sgn}\,x$ は x の符号を意味する．)

2. 関数 $y(x)$ についての斉次 2 階線形微分方程式 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ の 3 つの解を y_1，y_2，y_3 とする．これらが線形従属であることを示せ．(つまり，斉次 2 階線形微分方程式に 3 つの独立な解はない．)

3. 速度に比例する抵抗がある場合の落体の運動について考える．運動方程式は
$$m\frac{dv}{dt} = -\gamma v - mg\,.$$
   - (a) 運動方程式を直接解かずに，落体の力学的エネルギーの時間変化率を落体の速度で表わせ.
   - (b) 十分に時間が経過した後の，落体の力学的エネルギーの時間変化率を求めよ.
   - (c) 失われたエネルギーはどこへいったのか.
   - (d) 抵抗の無い場合を考えよ.