2007 年度 力学 1 演義 (アドバンス) 問題 No. 13 (2007/07/13)

1. 摩擦の無い水平面上にくさび型の台 (質量 M) があり，その斜面上に質量 m の物体が置かれ，すべり落ちる．斜面と水平面のなす角と θ とし，台と物体の間にも摩擦は無いとする．(スタンダード No. 5 問題 2(a) 参照．) この問題をラグランジュ形式で考察しよう．

   (a) 台と物体の水平方向の座標をそれぞれ X，x，物体の鉛直方向の座標を y として，拘束 (物体が斜面に沿って運動するということ) は無視して，ラグランジアンを作れ．

   (b) 拘束条件 (X, x, y に間に成り立つ関係式) を書け．ただし，$x = X$ のとき，$y = 0$ とする．

   (c) 拘束条件を用いて，y を消去したラグランジアンを求めよ．

   (d) $x_+ = (MX + mx)/(M + m)$ (重心座標)，$x_- = x - X$ (相対座標) として，ラグランジアンを $x_\pm$ で書き直せ．

   (e) x_+ は循環座標になっている．このことの物理的意味を述べよ．

   (f) x_- に対するラグランジュの運動方程式を求めよ．

2. 振り子の運動を平面内に限らないことにすると，質点は支点を中心とする球面上を動くので，これを「球面振り子」と呼ぶ．質点の位置は球座標 (r, θ, ϕ) で表すことができ，振り子の長さ r が一定なので，運動はふたつの角度 θ，ϕ で記述できる．これを一般化座標とする．

   (a) ラグランジアンを作れ．

   (b) 運動方程式を求めよ．

   (c) 質点の高さが一定 (従って θ が一定) のとき，軌道は円になり「円錐振り子」とよばれる．このときの円運動の角速度を質点の高さの関数として求め，概略を図示せよ．

   (d) 再び球面振り子に戻り，質点が鉛直下方付近だけで運動するとき ($\theta \ll 1$) の運動方程式を求めよ．

3. λ を一般座標 q と時間 t の関数とする．ラグランジアンに $\frac{d}{dt}\lambda(q,t)$ を加えても，運動方程式は変化しないことを示せ．(ヒント: q は一般には時間の関数だから，$\frac{d}{dt}\lambda(q,t) = \dot{q}\frac{\partial\lambda}{\partial q} + \frac{\partial\lambda}{\partial t}$．)

4. スタンダード No. 13 の電磁場中の質点について考える．ラグランジアンは，

$$L = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - q\phi(\boldsymbol{r},t) + q\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \tag{1}$$

   と書ける．(q は質点の電荷を表す．)

   (a) 座標 $\boldsymbol{r}$ に対する一般化運動量を求めよ．

   (b) $\phi(\boldsymbol{r},t) \to \phi(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\lambda(\boldsymbol{r},t)$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \to \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) - \nabla\lambda(\boldsymbol{r},t)$ という変換 (ゲージ変換) をしても運動方程式は不変であることを示せ．