2007 年度 力学 1 演義 (アドバンス) 略解 (No. 7 から No. 13)

No. 7

1. (a) $W = -\omega$.
   (b) $W = -2i\omega$.
   (c) 略.
   (d) $x \neq 0$ では $W = 0$. $x > 0$ では従属. $x < 0$ でも従属. $x \in [a, b]$ $(a < 0,\ b > 0)$ では独立.
2. 略.
3. (a) 運動方程式の両辺に v をかけて，変形すると，$\frac{d}{dt}(mv^2/2 + mgx) = -\gamma v^2$. ($x$ は鉛直上向きの座標.)
   (b) 終端速度 $v_t = -mg/\gamma$ を上の結果に代入して，$-m^2g^2/\gamma$.
   (c) 略.
   (d) 略.

No. 8

1. (a) 角振動数 $\sqrt{2a/m}$，振幅 $\sqrt{E/a}$.
   (b) 角振動数 $2\sqrt{-a/m}$，振幅 $\sqrt{(a^2/(4b) - E)/(2a)}$.
2. (a) エネルギー保存則から，$h = v^2/(2g)$.
   (b) 略.
   (c) 約 5m.
3. $2\pi\sqrt{\ell/\sqrt{g^2 + a^2}}$.

No. 9

1. (a) $T = mg(3\cos\theta - 2) + 2E/\ell$.
   (b) $(0 <)E \leq mg\ell$. (往復運動．水平まで上がる.) $E \geq 5mg\ell/2$. (回転運動.)
2. (a) $F_\rho = m\omega^2\rho$，$F_\phi = 0$，$F_z = -mg$.
   (b) $dz/d\rho = -F_\rho/F_z = \omega^2\rho/g$. これを積分して放物線を得る.
   (c) $V(z, \rho) = m(gz - \omega^2\rho^2/2) + \mathrm{const.}$.
   (d) 略.
3. (a) $|\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R})| = \omega^2 R\cos\alpha \leq \omega^2 R \simeq 3.4 \times 10^{-2}\mathrm{m/s^2} \ll g$.
   (b) 略.
   (c) $x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$，$z(0) = h$ として，$x(t) = \omega g_{\mathrm{eff}}\cos\alpha\ t^3/3$，$y(t) = 0$，$z(t) = h - g_{\mathrm{eff}}t^2/2$. 落下点では，$\omega\cos\alpha\sqrt{8h^3/g_{\mathrm{eff}}}/3$ だけ東へずれる.
   (d) 約 1.5cm.

No. 10

1. (a) $mv^2/2 + mg\ell(1 - \cos\theta) = mg\ell(1 - \cos\theta_m)$.
   (b) $v = \mathrm{sgn}(\dot{\theta})\sqrt{2g\ell(\cos\theta - \cos\theta_m)}$.
   (c) i. $\dot{\phi} = -\sqrt{g/\ell}\,\phi$.
       ii. $t(\phi) = \sqrt{\ell/g}\ln(\phi_0/\phi)$.
       iii. 略.
2. (a) 略.
   (b) 略.
   (c) $-\nabla_{\boldsymbol{r}}\Phi(\boldsymbol{r})$ が式 (1) の右辺になっていることを確かめればよい. ($\nabla_{\boldsymbol{r}}$ は $\boldsymbol{r}$ についての勾配.)
   (d) 略.
   (e) 略.
   (f) 略.
   (g) $3Mr_e^4\sin^2\theta/(2M_eR^3)$. 数値を入れると $0.55\sin^2\theta\mathrm{m}$.
   (h) 太陽/月 $\simeq 0.45$.

No. 11

1. (a) 略.

(b) 略.

(c) 略.

(d) $U(a\boldsymbol{r}_1,\cdots,a\boldsymbol{r}_N)=a^kU(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N)$ の両辺を a で微分して $a=1$ と置くと，$\sum_i \boldsymbol{r}_i\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i}=kU$ を得る.

(e) 略.

(f) $2\langle T\rangle=-\langle U\rangle$ ゆえ，$E=\langle E\rangle=\langle T+U\rangle=\langle T\rangle+\langle U\rangle=-\langle T\rangle$. $\langle T\rangle>0$ だから，$E<0$. すなわち，有界な運動は全エネルギーが負.

2. (a) 球殻の中心と質点を結ぶ直線を z 軸とする極座標で表した球殻の微小体積は $dV=\Delta R\,R^2\sin\theta d\theta d\phi$. $U/m=-\int dVG\rho/\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}=-G(4\pi R^2\Delta R\rho)/r=-GM/r$.

(b) $U/m=-G/r\int_0^R dR'4\pi R'^2\rho(R')=-G/r\int\rho dV=-GM/r$.

(c) $r<R$ に注意して積分すると，$U/m=-GM/R(=$定数$)$. 重力は働かない.

(d) 直線を z 軸とする円柱座標で考えて，$U/m=-G\lambda\int_{-\infty}^{\infty}dz/\sqrt{r^2+z^2}$.（この積分は収束しない.）動径方向の力 F_r は，$-F_r/m=\frac{d}{dr}(U/m)=2G\lambda/r$. これを積分して，$U/m=2G\lambda\ln r+$積分定数.

(e) 考えている点と平面の距離を $z(>0)$ とし，この点から平面におろした垂線と平面が交わる点を原点とする平面上の極座標で考える. $U/m=-G\int_0^\infty dr2\pi r\sigma/\sqrt{z^2+r^2}$.（この積分は収束しない.）$z$ 方向の力 F_z は，$-F_z/m=\frac{d}{dz}(U/m)=2\pi\sigma G$. これを積分して，$U/m=2\pi\sigma Gz+$積分定数.

No. 12

1. $L=(m/2)(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)=(m/2)(\dot{r}^2+r^2\,\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)=(m/2)(\dot{r}^2+r^2\,\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)$.

2. (a) $L=m\ell^2\dot{\theta}^2/2+mg\ell\cos\theta$.

(b) 略.

(c) $L=m(\dot{r}^2+r^2\,\dot{\theta}^2)/2+mgr\cos\theta$.

(d) 水平方向を x 軸，鉛直上向きを y 軸にとると，$F'_x=-T_r\sin\theta$，$F'_y=T_r\cos\theta$，$\partial x/\partial r=\sin\theta$，$\partial y/\partial r=-\cos\theta$. これをヒントの式に代入すればよい.

(e) $T_r=m\ell\dot{\theta}^2+mg\cos\theta$.

3. (a) $\tau=\sigma^{1-(k/2)}$.

(b) $k=2$ のとき，振り子の等時性. $k=-1$ のとき，ケプラーの第 3 法則.

No. 13

1. (a) $L=M\dot{X}^2/2+m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)/2-mgy$.

(b) (斜面の向きを適当にとって) $y=-(x-X)\tan\theta$.

(c) 略.

(d) $L=(M+m)\dot{x}_+^2/2+(\frac{Mm}{M+m}+m\tan^2\theta)\dot{x}_-^2/2+mg\tan\theta\,x_-$.

(e) 水平方向の運動量保存.

(f) 略.

2. (a) 極軸を鉛直下向きにとって，$L=mr^2(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)/2+mgr\cos\theta$.

(b) 略.

(c) 最下点からの高さを h として，$\dot{\phi}=\pm\sqrt{g/(r-h)}$.

(d) 略.

3. 略.

4. (a) $\boldsymbol{p}=\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}=m\dot{\boldsymbol{r}}+q\boldsymbol{A}$.

(b) この変換でラグランジアンは $-q\frac{d\lambda}{dt}$ だけ変化するから，3 に帰着する.