マックスウェル方程式と電磁場

1　マックスウェル方程式

電場 $\mathbb{E}(\mathbb{r}, t)$、磁場 $\mathbb{B}(\mathbb{r}, t)$ は次のマックスウェル方程式にしたがう。

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho, \tag{1.1}$$

$$\nabla \times \mathbb{E} + \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} = \mathbb{0}, \tag{1.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0, \tag{1.3}$$

$$\nabla \times \mathbb{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbb{j}. \tag{1.4}$$

ここで、$\rho(\mathbb{r}, t)$ は電荷密度、$\mathbb{j}(\mathbb{r}, t)$ は電流密度である。

このマックスウェル方程式には次のような重要な特徴がある。

- 局所的、あるいは近接作用である。ある点での $\mathbb{E}, \mathbb{B}$ の非常に短い間の時間変化は、その点のまわりの非常に小さな領域の $\mathbb{E}, \mathbb{B}, \rho, \mathbb{j}$ だけで決まる。
- 「重ねあわせの原理」が成り立つ。つまり、電荷密度、電流密度がそれぞれ $\rho_1, \mathbb{j}_1$ の時、$\mathbb{E}_1, \mathbb{B}_1$ がマックスウェル方程式の解であり、$\rho_2, \mathbb{j}_2$ の時、$\mathbb{E}_2, \mathbb{B}_2$ がマックスウェル方程式の解なら、$\rho_3 = \rho_1 + \rho_2, \mathbb{j}_3 = \mathbb{j}_1 + \mathbb{j}_2$ の時には $\mathbb{E}_3 = \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2, \mathbb{B}_3 = \mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2$ はマックスウェル方程式の解である。

2　電磁波

真空中、つまり $\rho = 0, \mathbb{j} = \mathbb{0}$ のとき、マックスウェル方程式は

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = 0, \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \mathbb{E} + \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} = \mathbb{0}, \tag{2.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0, \tag{2.3}$$

$$\nabla \times \mathbb{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} = \mathbb{0}. \tag{2.4}$$

となる。この方程式は次のような形の解を持つ。

$$\mathbb{E} = (f(z - ct), 0, 0), \quad \mathbb{B} = (0, \frac{1}{c} f(z - ct), 0), \quad (c := \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}) \tag{2.5}$$

ここで $f(z)$ は任意のなめらかな関数である。この解は電場、磁場が形を保ったまま z 軸の正の方向に速さ c で進む波の解であり、「電磁波」と呼ばれる。光は電磁波の一種であり、c

は真空中の光速である。

$$c = 299792458\mathrm{m/s} \cong 3.0 \times 10^8 \mathrm{m/s} \tag{2.6}$$

電磁波は、電場や磁場の変動の向きが進行方向に垂直である「横波」である。

$f(z)$ が a, δ を定数として

$$f(z) = a\sin(kz + \delta) \tag{2.7}$$

となっているときは、正弦波と呼ばれる。電場の x 成分は、

$$E_x = f(z - ct) = a\sin(k(z - ct) + \delta) = a\sin(kz - \omega t + \delta), \quad \omega := kc \tag{2.8}$$

用語 a: 振幅、 k: 波数、 $\lambda := \frac{2\pi}{k}$: 波長、 $\omega := kc$: 角振動数、 $\nu := \frac{\omega}{2\pi}$: 振動数

振動数の単位は [Hz]（ヘルツ）で、 1 秒間に振動する回数である。振動数と波長には

$$\nu\lambda = c \tag{2.9}$$

の関係がある。

演習問題

1. 携帯電話で使われる電磁波の振動数の一つは約 800MHz= 8×10^8Hz である。この電磁波の波長を有効数字 1 桁で求めよ。
2. 地球と太陽の距離は、約 1.5×10^{11}m である。太陽から出た光が地球に届くまでの時間を有効数字 2 桁で求めよ。