マックスウェル方程式と電磁場

1　マックスウェル方程式

電場 $\vec{E}(\vec{r},t)$、磁場 $\vec{B}(\vec{r},t)$ は次のマックスウェル方程式にしたがう。

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho, \tag{1.1}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{0}, \tag{1.2}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \tag{1.3}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{j}. \tag{1.4}$$

ここで、$\rho(\vec{r},t)$ は電荷密度、$\vec{j}(\vec{r},t)$ は電流密度である。

このマックスウェル方程式には次のような重要な特徴がある。

- 局所的、あるいは近接作用である。ある点での $\vec{E},\vec{B}$ の非常に短い間の時間変化は、その点のまわりの非常に小さな領域の $\vec{E},\vec{B},\rho,\vec{j}$ だけで決まる。
- 「重ねあわせの原理」が成り立つ。つまり、電荷密度、電流密度がそれぞれ $\rho_1,\vec{j}_1$ の時、$\vec{E}_1,\vec{B}_1$ がマックスウェル方程式の解であり、$\rho_2,\vec{j}_2$ の時、$\vec{E}_2,\vec{B}_2$ がマックスウェル方程式の解なら、$\rho_3=\rho_1+\rho_2,\vec{j}_3=\vec{j}_1+\vec{j}_2$ の時には $\vec{E}_3=\vec{E}_1+\vec{E}_2,\vec{B}_3=\vec{B}_1+\vec{B}_2$ はマックスウェル方程式の解である。

2　電磁波

真空中、つまり $\rho=0,\vec{j}=\vec{0}$ のとき、マックスウェル方程式は

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0, \tag{2.1}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{0}, \tag{2.2}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \tag{2.3}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0}. \tag{2.4}$$

となる。この方程式は次のような形の解を持つ。

$$\vec{E} = (f(z-ct),0,0),\quad \vec{B} = (0,\frac{1}{c}f(z-ct),0),\quad (c := \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}) \tag{2.5}$$

ここで $f(z)$ は任意のなめらかな関数である。この解は電場、磁場が形を保ったまま z 軸の正の方向に速さ c で進む波の解であり、「電磁波」と呼ばれる。光は電磁波の一種であり、c

は真空中の光速である。

$$c = 299792458\mathrm{m/s} \cong 3.0 \times 10^8\mathrm{m/s} \tag{2.6}$$

電磁波は、電場や磁場の変動の向きが進行方向に垂直である「横波」である。

$f(z)$ が a, δ を定数として

$$f(z) = a\sin(kz + \delta) \tag{2.7}$$

となっているときは、正弦波と呼ばれる。電場の x 成分は、

$$E_x = f(z - ct) = a\sin(k(z - ct) + \delta) = a\sin(kz - \omega t + \delta), \quad \omega := kc \tag{2.8}$$

用語 a: 振幅、 k: 波数、 $\lambda := \frac{2\pi}{k}$: 波長、 $\omega := kc$: 角振動数、 $\nu := \frac{\omega}{2\pi}$: 振動数

振動数の単位は [Hz]（ヘルツ）で、 1 秒間に振動する回数である。振動数と波長には

$$\nu\lambda = c \tag{2.9}$$

の関係がある。

演習問題

1. 携帯電話で使われる電磁波の振動数の一つは約 800MHz= 8×10^8Hz である。この電磁波の波長を有効数字 1 桁で求めよ。
2. 地球と太陽の距離は、約 1.5×10^{11}m である。太陽から出た光が地球に届くまでの時間を有効数字 2 桁で求めよ。