場の理論におけるアノマリーと指数定理について

1. 導入
   - アノマリーとは
   - 量子力学での例
   - 指数定理
2. 1次元フェルミオンのアノマリー
   - 1次元フェルミオン
   - Euclid化経路積分
   - 正則化と対称性
   - η不変量
   - アノマリー流入
3. $U(1)_A$アノマリーと指数定理
   - スピノール
   - $U(1)_A$アノマリーと指数
   - Atiyah-Singer指数定理

4. Atiyah-Patodi-Singer 指数定理
   - 境界のある時空上のフェルミオン
   - APS 指数定理

5. 摂動論的 アノマリー
   - 4次元 カイラルゲージ理論
   - アノマリー
   - Wess-Zumino 無矛盾条件
   - アノマリー 降下方程式

6. 質量のあるフェルミオンとアノマリー流入
   - 概略
   - フェルミオンのアノマリー作用 = η 不変量
   - 境界
   - パリティアノマリーとアノマリー作用
   - ドメインウォールフェルミオンと指数定理
   - 摂動論的アノマリー
   - 大域的アノマリー

1. 導入

☆ アノマリーとは?

"古典的にはある対称性が量子論的にはないこと"

「ない」をもっとくわしく言いたい.

• "アノマリー"の物理への現れ方

1. ゲージアノマリー : 理論の inconsistency

2. 大域的対称性の非存在

eg. QCDの $U(1)_A$ アノマリー

3. 't Hooft アノマリー : 「大域的対称性」の一部

⇓

理論を調べるのに使える.

☆ 量子力学での例. (Hilbert 空間, Hamiltonian H)

• 対称性とは?

U : ユニタリー , $HU = UH$

次のような対称性を考える.

U, V

$U^2 = V^2 = 1,$

$UV = -VU$

レポート問題 ①

このような行列 U, V の例を作れ.

↑"交換しなさ"が c 数 = アノマリーの例

⇒ すべての準位（特に基底状態）は必ず縮退している.

（ ∵ 縮退ないと仮定 $|\psi\rangle$

$U|\psi\rangle = u|\psi\rangle$, $V|\psi\rangle = v|\psi\rangle$

c数

⇒ $UV|\psi\rangle = VU|\psi\rangle$ となり, $UV = -VU$ に矛盾 ）

※ 演算子への作用

$A^U = UAU^\dagger$ ⇒ $A^{UV} = A^{VU}$ アノマリーは見えない!

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称性として作用

※ 今の「対称性」は 群 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の「射影表現」の例

※ Uをゲージ化する（Hilbert空間をU不変な部分に限る）

とVは無くなる

⇒ 2. の"アノマリー"

※ UとVは同時にゲージ化できない

⇒ 1. の"アノマリー"

大域的対称性の構造

= 群 + アノマリー

（$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ とか） （−1 とか）

※ 高次元ではアノマリーは射影表現とは限らない

☆ 疑問

- (次元, 群, …)を与えたとき、あり得るアノマリーは何か?
  - e.g. 1次元, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ のアノマリーは、上のもの、自明以外にあるか?
- 理論を与えたときに、アノマリーはどうやって計算するか?

便利な見方

Anomaly inflow

1次元高い次元の Symmetry Protected Topological phase (SPT相)

⇒ 全体としてアノマリー無し

☆ 指数定理

〜 重力、ゲージ場背景中の無質量 Dirac方程式の解の数に関する定理

- Atiyah-Singer 指数定理
  (AS)
  コンパクト，境界がない空間
  閉
  - 軸性 U(1) アノマリー
    ($U(1)_A$)
  - 余剰次元模型での世代数

  …

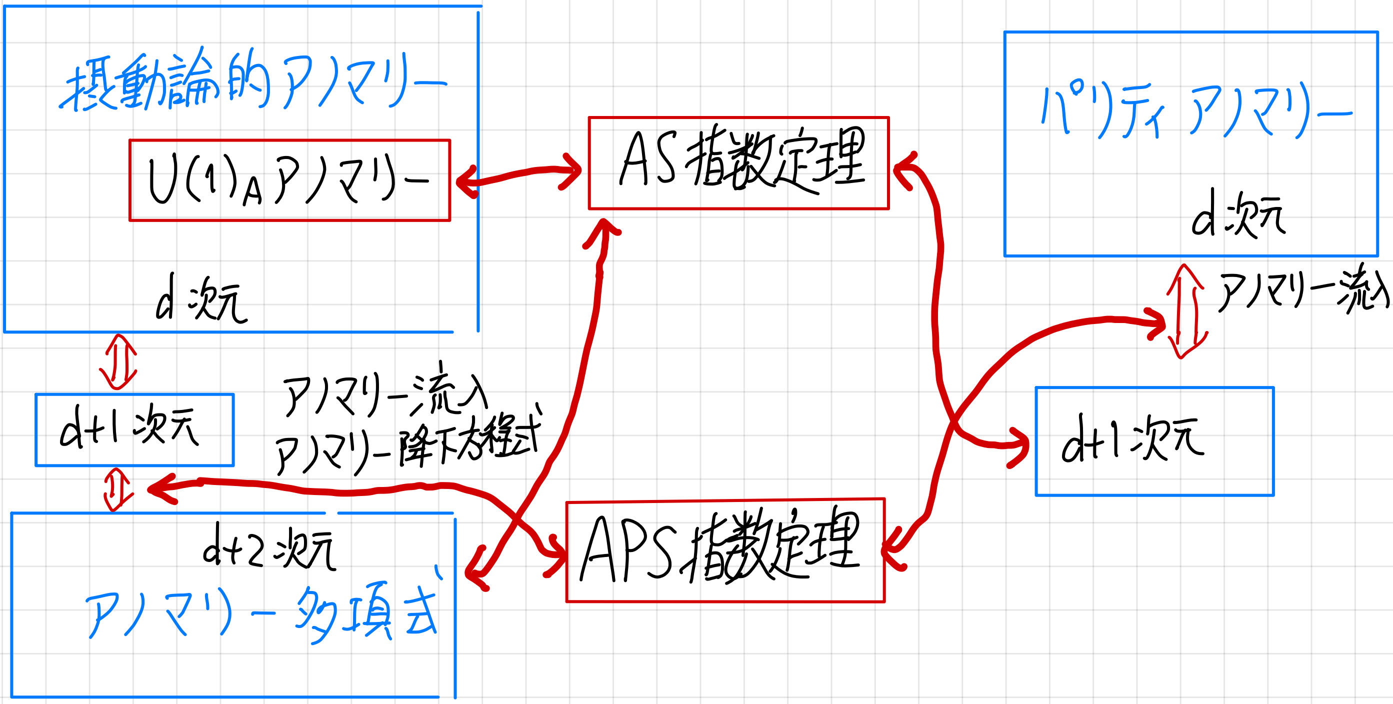
$\boxed{\text{境界がある場合は？}}$

- Atiyah-Patodi-Singer 指数定理
  (APS)
  コンパクト，境界がある場合 (or ある種の非コンパクト)
  APS 境界条件 : 非局所的な境界条件

  × 境界のある余剰次元模型での世代数
  ？(APS 境界条件ではない)

  - トポロジカル絶縁体の境界
    (APS 境界条件ではないけれど…)
    指数 〜 有質量フェルミオン

アノマリーと指数



摂動論的アノマリー
U(1)$_A$アノマリー
d次元
d+1次元
d+2次元
アノマリー多項式
アノマリー流入
アノマリー降下方程式
AS指数定理
APS指数定理
パリティアノマリー
d次元
アノマリー流入
d+1次元

2. 1次元フェルミオンのアノマリー

☆ もう少し具体的な例

1次元 complex fermion

$\psi(t),\ \psi^\dagger(t)$　（古典的には Grassmann 数）

互いに複素共役と言う?　$\overset{\frown}{\text{独立な}}$

$$S=\int dt\, L\ ,\qquad L=i\psi^\dagger\dot{\psi}$$

対称性

- $U(1)$　$\underset{\text{charge }1}{\psi}\to\psi'=e^{i\alpha}\psi\ ,\quad \underset{\text{charge }-1}{\psi^\dagger}\to\psi^{\dagger\prime}=e^{-i\alpha}\psi$
- 荷電共役　$\psi\to\psi'=\psi^\dagger,\quad \psi^\dagger\to\psi^{\dagger\prime}=\psi$

演習問題：これで S が不変であることを示せ.

※「質量項」$\Delta L=-\omega\psi^\dagger\psi$ は C を破る

$U(1)$ は保つ.

正準量子化

$$p=\frac{\partial}{\partial\dot{\psi}}L=-i\psi^\dagger\ ,\quad p_{\psi^\dagger}=\frac{\partial}{\partial\dot{\psi}^\dagger}L=0\ (?)$$

$$\{\hat{p},\hat{\psi}\}=-i\ \Rightarrow\ \boxed{\{\hat{\psi}^\dagger,\hat{\psi}\}=1}$$

Hamiltonian

$$H=\dot{\psi}p-L=0\qquad \hat{H}=0$$

状態：

Fock 真空　$|+\rangle$: $\hat{\psi}|+\rangle=0$

$|-\rangle:=\hat{\psi}^\dagger|+\rangle$

$|+\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$|-\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\hat{\psi}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

$\hat{\psi}^\dagger=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$

電荷：Noetherの定理.

$\alpha \to \alpha(t)$，無限小

$$\delta S = \int dt\,(\partial_t \alpha) Q$$ ← このQを求める.

$$\delta\psi = i\alpha\psi \qquad \delta\dot{\psi} = i\dot{\alpha}\psi + i\alpha\dot{\psi}$$

$$\delta S = \int dt\,(i\,\delta\psi^\dagger\dot{\psi} + i\psi^\dagger\delta\dot{\psi})$$

$$= \int dt\; i\psi^\dagger i\dot{\alpha}\psi$$

$$= \int dt\; \dot{\alpha}\,(-\psi^\dagger\psi)$$

$$Q = -\psi^\dagger\psi$$

⇓ 量子化

$$\hat{Q} = -\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi} \qquad ?$$

$$\hat{Q}|+\rangle = 0\,|+\rangle$$
$$\hat{Q}|-\rangle = -|-\rangle$$

$\hat{\psi}^\dagger$: ← charge -1

$$[\hat{Q}, \hat{\psi}^\dagger] = -\hat{\psi}^\dagger$$

状態	$\vert+\rangle$	$\vert-\rangle$
charge	0	-1

荷電共役は大丈夫 ?

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ でよさそう.

$$\hat{C}\hat{\psi}\hat{C}^{-1} = \hat{\psi}^\dagger, \quad \hat{C}\hat{\psi}^\dagger\hat{C}^{-1} = \hat{\psi}$$ ←（確かめよ）

$$\hat{C}|\pm\rangle = |\mp\rangle$$

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \hat{C}\hat{Q}\hat{C}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left(\neq -\hat{Q}\right)$$

$$\hat{C}\hat{Q}\hat{C}^{-1} = 1 - \hat{Q}$$

ユニタリー演算子

$$\hat{U}_\alpha := e^{i\alpha\hat{Q}} \quad \Rightarrow \quad \hat{C}\hat{U}_\alpha\hat{C}^{-1} = e^{i\alpha(1-\hat{Q})}$$

$$= \underbrace{e^{i\alpha}}_{\text{アノマリー}}\hat{U}_{-\alpha}$$

特に $\alpha = \pi$

$$\hat{C}\hat{U}_\pi = -\hat{U}_\pi\hat{C}$$ ⇝ さっきの例と同じ

逆に $\hat{C}$ をちゃんと保とうとする.

$$\hat{Q}' = \hat{Q} + \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\vert+\rangle$	$\vert-\rangle$
$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

しかし $\hat{U}'_\alpha := e^{i\alpha\hat{Q}'} \quad \Rightarrow \quad \hat{U}'_{2\pi} = -1$

何もしてないはずなのに..

$$\hat{C}\hat{U}'_\alpha\hat{C}^{-1} = \hat{U}'_{-\alpha}$$

もう少しくわしく見るために Euclid 化経路積分形式で見てみる.

☆ Euclid化 経路積分

演算子形式の量子力学（場の理論）

Hilbert空間 $\mathcal{H}$, Hamiltonian $\hat{H}$

（時間は特別）

⇝ いろんな演算子の期待値や時間発展

⇝

$$Z = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta \hat{H}}\right), \quad \langle \hat{A} \rangle_\beta = \frac{1}{Z}\mathrm{Tr}\left(\hat{A}\, e^{-\beta \hat{H}}\right), \quad \cdots$$

この手の量から分かること

$|n\rangle$: エネルギー固有状態 $\hat{H}|n\rangle = E_n |n\rangle$

$$Z = \sum_n \langle n | e^{-\beta \hat{H}} | n \rangle = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

$$= e^{-\beta E_0} + e^{-\beta E_1} + \cdots$$

スペクトルが分かる！

$$\langle \hat{A} \rangle_\beta = \frac{1}{Z}\sum_n \langle n | \hat{A}\, e^{-\beta \hat{H}} | n \rangle$$

$$= \frac{1}{Z}\left(\langle 0 | \hat{A} | 0 \rangle e^{-\beta E_0} + \langle 1 | \hat{A} | 1 \rangle e^{-\beta E_1} + \cdots \right)$$

$$\xrightarrow{\beta \to \infty} \langle 0 | \hat{A} | 0 \rangle$$

真空期待値

$$Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta\hat{H}} = \cdots = \int D\phi\, e^{-S_E[\phi]}$$

S_E: Euclidean作用

(空間) × S^1 上 古典統計

"Euclid 化 経路積分"

例： 1自由度 ϕ の量子力学

$$L = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$$

$$\Rightarrow \quad Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta\hat{H}} = \cdots = \int D\phi\, e^{-S_E[\phi]}$$

$$S_E[\phi] = \int_0^\beta d\tau \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right)$$

$$\dot{} = \frac{d}{d\tau}$$

演習問題 (オプション？)：これを導出せよ (この … を計算せよ)

※ "Euclidean の理論" を考えているわけではない.

1つの理論の別の定式化

※ 得手不得手がある.

今後ほとんど Euclidean 経路積分の定式化で考える.

☆ フェルミオンのEuclid化経路積分

$$S_L = \int dt\ L, \quad L = i\psi^\dagger\dot{\psi} - \omega\psi^\dagger\psi$$

⇓ 量子化

$$\hat{\psi}^\dagger, \hat{\psi}, \quad \{\hat{\psi}^\dagger, \hat{\psi}\} = 1$$

$$\hat{H} = \omega\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}$$

$$Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta\hat{H}}$$

← Coherent 状態をはさんでいく.

(Appendix 参照)

$$= \int D\psi^\dagger D\psi\, e^{-S_E}$$

$$S_E = \int_0^\beta d\tau \left(\psi^\dagger\dot{\psi} + \omega\psi^\dagger\psi\right) \qquad \circ := \frac{d}{d\tau}$$

境界条件
$$\psi(\tau+\beta) = -\psi(\tau)$$
$$\psi^\dagger(\tau+\beta) = -\psi^\dagger(\tau)$$

$$\bar{\psi}(\tau) := -i\psi^\dagger(\tau) \quad \Rightarrow$$

$$Z = \int D\bar{\psi} D\psi\, e^{-S_E} \qquad S_E = \int_0^\beta d\tau \left(i\bar{\psi}\dot{\psi} + \omega\psi^\dagger\psi\right)$$

◎ たくさんある場合

$$\hat{\psi}_n,\ \hat{\psi}^{\dagger n}\ ,\quad \{\hat{\psi}_n,\ \hat{\psi}^{\dagger m}\} = \delta_n^m$$

① $$\hat{H} = \sum_n \omega_n \hat{\psi}^{\dagger n} \hat{\psi}_n$$

$$D\psi^\dagger D\psi = \prod_n (D\psi^{\dagger n} D\psi_n)$$

(単にぜんぶかけるだけ)

$\Downarrow$

$$Z = \int D\psi^\dagger D\psi\, e^{-S_E}$$

$$S_E = \int_0^\beta d\tau \sum_n \left(\psi^{\dagger n} \dot{\psi}_n + \omega_n \psi^{\dagger n} \psi_n \right)$$

② $$\hat{H} = \sum_{n,m} \underbrace{h_n{}^m}_{\text{エルミート行列の成分}} \hat{\psi}^{\dagger n} \hat{\psi}_m$$

$\Downarrow$ 対角化すると上に帰着

$$S_E = \int_0^\beta d\tau \sum_{n,m} \left(\delta_n^m \psi^{\dagger n} \dot{\psi}_m + h_n{}^m \psi^{\dagger n} \psi_m \right)$$

例: d 次元 free Dirac fermion

$$S_L = \int d^dx \left(-i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - i m \bar{\psi} \psi \right)$$

$\mu = 0, 1, \cdots, d-1$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$$

$$\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, \cdots, +1), \quad (\gamma^0)^\dagger = -\gamma^0,\quad (\gamma^i)^\dagger = \gamma^i$$

$i = 1, \cdots, d-1$

$\Downarrow$

$$\hat{H} = \int d^{d-1}x \left(i \hat{\psi}^\dagger \gamma^0 \gamma^i \partial_i \hat{\psi} + i m \hat{\psi}^\dagger \gamma^0 \hat{\psi} \right)$$

$$\left(h = i\gamma^0 \gamma^i \partial_i + i m \gamma^0 \right)$$

$$S_E = \int d^d x \left(\psi^\dagger \partial_d \psi + i \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^i \partial_i \psi + i m \psi^\dagger \gamma^0 \psi \right)$$

$x^d := \tau$

$$\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0 , \quad \gamma^d := +i \gamma^0$$

$$\Rightarrow \psi^\dagger \partial_d \psi = - \underbrace{\psi^\dagger \gamma^0}_{\bar{\psi}} \underbrace{\gamma^0}_{-i\gamma^d} \partial_d \psi = i \bar{\psi} \gamma^d \partial_d \psi$$

$$S_E = \int d^d x \left(i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + i m \bar{\psi} \psi \right)$$

$$(\mu = 1, \cdots, d)$$

☆ 1次元のフェルミオンの経路積分

$\tau \to x$, $S = S_E$ (今後)

$\to S^1 = Y$

$$S = \int_0^\beta dx \; i\bar{\psi}(x)\,\partial_1 \psi(x)$$

$x \sim x + \beta$

$\psi(x+\beta) = -\psi(x)$

$\bar{\psi}(x+\beta) = -\psi(x)$

U(1)対称性 $\psi \to e^{i\alpha}\psi$

$\bar{\psi} \to e^{-i\alpha}\bar{\psi}$ のゲージ場を導入

$$D_1\psi = \partial_1\psi - iA_1(x)\psi$$

$$S = \int dx\; \bar{\psi}\, iD_1\psi$$

$$Z[A] = \int D\bar{\psi}D\psi\; e^{-S}$$

$$\text{"} = \det iD_1 \text{"}$$

期待すること

1. C対称性 : iD_1 はエルミート

$\Rightarrow Z[A]$ は実数

2. U(1)ゲージ対称性 $A_1(x) \to A_1'(x) = A_1(x) + \partial_1\alpha(x)$

$(\alpha : Y \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$

$\det iD_1$ を計算

$$= \prod_{\lambda:\text{固有値}} \lambda$$

固有値を求める.

$$iD_1 \phi(x) = \lambda \phi(x)$$

一般解

$$\Rightarrow \quad \phi(x) = \exp\left(i \int_0^x d\xi \left(A_1(\xi) - \lambda \right) \right) \phi(0)$$

特に

$$\phi(\beta) = \exp\Big(i \underbrace{\int_0^\beta dx\, A_1(x)}_{=:\,2\pi a} - i\beta\lambda \Big) \phi(0)$$

$$= \exp\left(2\pi i \left(a - \frac{\beta}{2\pi}\lambda\right)\right) \phi(0)$$

境界条件

$$\phi(\beta) = -\phi(0) \quad \Rightarrow \quad a - \frac{\beta}{2\pi}\lambda = -r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lambda = \lambda_r = \frac{2\pi}{\beta}(a+r)}$$

$$Z[A] = \prod_{r \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \lambda_r$$

発散!!

正則化，くりこみが必要　　やり方＝"スキーム"

対称性を保つスキームがあるか？

※ ラージゲージ変換

U(1) ゲージ対称性

Z が $a = \frac{1}{2\pi}\int_0^\beta dx\, A_1(x)$ で書けていれば

無限小変換では不変

$$\alpha : Y \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

$\alpha(x) = \frac{2\pi}{\beta}x$ はちゃんとしたゲージ変換のパラメータ

$$\left(\because \ \alpha(x+\beta) = \alpha(x) + 2\pi \sim \alpha(x) \right)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int dx\, \partial_1 \alpha = \frac{1}{2\pi}\int dx \frac{2\pi}{\beta} = 1$$

無限小変換をつみ重ねてもたどりつけない

"winding number" ⇒ ラージゲージ変換

$$A'(x) = A(x) + \partial_1\left(\frac{2\pi}{\beta}x\right) = A(x) + \frac{2\pi}{\beta}$$

$$a' = \frac{1}{2\pi}\int_0^\beta dx\, A'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\beta dx\left(A(x) + \frac{2\pi}{\beta}\right) = a+1$$

ゲージ不変

$$Z(a) = Z(a+1)$$

スキーム 1. 運動量カットオフ

$$\prod_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \lambda_r \longrightarrow \prod_{\substack{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}\\ |r|<R}} \lambda_r$$

"運動量" $k=\frac{2\pi}{\beta}r$
(波数)

$k<\Lambda$

$R=\frac{\beta}{2\pi}\Lambda$

$\frac{1}{\Lambda}$ ~ 格子間かく.

$$Z_\Lambda^{cut} := 2\frac{\prod_{|r|<R}\frac{2\pi}{\beta}(a+r)}{\prod_{|r|<R}\frac{2\pi}{\beta}r}$$

$$= 2\prod_{|r|<R}\left(1+\frac{a}{r}\right)$$

$$= 2\prod_{0<|r|<R}\underbrace{\left(1+\frac{a}{r}\right)\left(1-\frac{a}{r}\right)}_{\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)}$$

$$Z^{cut} = \lim_{\Lambda\to\infty} Z_\Lambda^{cut} = 2\cos\pi a$$

cos の無限積表示

対称性

- C対称性 : 実数 O.K.
  Z_Λ^{cut} が保っている.

- U(1) ゲージ対称性
  $Z^{cut}(a+1) = -Z^{cut}(a)$ 保ってない!!

Z_Λ^{cut} で破っている. $\Lambda\to\infty$ で回復してない

スキーム 2. Pauli-Villars 正則化

$$Z_\Lambda^{PV} = \Omega \prod_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \frac{\lambda_r\,(\lambda_r + i\Lambda_2)}{(\lambda_r - i\Lambda_1)(\lambda_r + i\Lambda_3)}$$

counter term

$\Lambda_i > 0, \quad i=1,2,3$

$\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda_3 = 0$ $\Rightarrow$ 絶対収束

$\lambda_r \ll \Lambda_i$ の固有値に関しては単にかけ算 ⇒ 正則化になっている!

$$Z_\Lambda^{PV} = \Omega \frac{\cos\pi a \ \cos\pi(a+i\Lambda_2')}{\cos\pi(a-i\Lambda_1')\cos\pi(a+i\Lambda_3')} \qquad \left(\Lambda_i' := \frac{\beta}{2\pi}\Lambda_i\right)$$

Λ 大

$$Z_\Lambda^{PV} \sim \Omega\, e^{-\pi i a}\, 2\cos\pi a\ e^{\pi(-\Lambda_1'+\Lambda_2'-\Lambda_3')}$$

$$\Omega = e^{-\pi(-\Lambda_1'+\Lambda_2'-\Lambda_3')}$$ とする

$$Z^{PV} = \lim_{\Lambda\to\infty} Z_\Lambda^{PV} = 2e^{-\pi i a}\cos\pi a$$

対称性

- C 対称性 $\longrightarrow$ ✕
  実数でない
- U(1) ゲージ対称性 O.K. (Z_Λ^{PV} が保つ)
  $Z^{PV}(a+1) = Z^{PV}(a)$

※ $S_{ct}(A) = -\frac{i}{2}\int dx\, A_1(x)$ は local counter term
ゲージ不変でない!!

$= -\pi i a$

入れていい

$$Z'^{PV} = e^{-S_{ct}(A)} Z^{PV} = 2\cos\pi a \quad \left(= Z^{cut} \right)$$

C 保つ
U(1)ゲージ ×

C対称性とU(1)ゲージ対称性を両方保つのは無理っぽい…

本当？ がんばりが足りない？

☆ η 不変量

Z^{PV} の phase　　$Z^{PV} = |Z^{PV}| e^{i\pi\left([a+\frac{1}{2}]-a\right)}$

↑ ガウス記号

いいかげんに計算する.

$$Z^{PV} = \Omega \prod_r \frac{\lambda_r(\lambda_r + i\Lambda_2)}{(\lambda_r - i\Lambda_1)(\lambda_r + i\Lambda_3)} \text{ “}\longrightarrow\text{” } \Omega \prod_r \frac{i\lambda_r \Lambda_2}{\Lambda_1 \Lambda_3}$$

$\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1\Lambda_3} > 0$

$$Z^{PV} \text{ “=” } |Z^{PV}| \prod_r i \,\mathrm{sign}\,\lambda_r$$

$$\left(i\,\mathrm{sign}\,\lambda_r = e^{\frac{\pi}{2} i\,\mathrm{sign}\,\lambda_r} \right)$$

$$\text{“=” } |Z^{PV}| e^{\frac{\pi}{2} i \sum_r \mathrm{sign}\,\lambda_r}$$

?

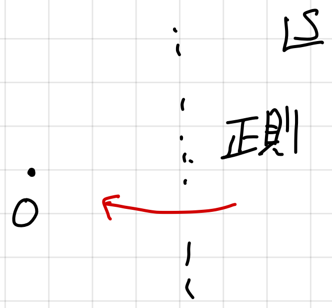
$\boxed{\text{定義}}$

（この定義はちゃんとした数学）

一般に　H：エルミート演算子

$\mathrm{Re}\, s$：十分大

$$\eta(H,s) := \sum_{\lambda : H\text{の固有値}} \frac{\lambda}{|\lambda|^{1+s}}$$



s について解析接続

$$\eta(H) := \eta(H, s=0)$$

$\boxed{\eta\text{ 不変量}}$

(※ Hが有限次元行列なら

$$\eta(H) = \sum_{\lambda} \mathrm{sign}\,\lambda$$
)

命題

$$Z^{PV} = |Z^{PV}|\, e^{\frac{\pi}{2} i\, \eta(iD_1)}$$

今. $\eta(iD_1)$ を定義から計算できる $\eta(iD_1) = 2[a+\frac{1}{2}] - 2a$

⇒ 命題は正しい.

予想:

「いいかげんな計算」は一般に正しい答えを与える

(証明はまだない?)

※ Phase は正則化のしかたによる.

$$Z_{\Lambda}^{PV'} = \Omega \prod_{r \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \frac{\lambda_r (\lambda_r + i\Lambda_2)}{(\lambda_r + i\Lambda_1)(\lambda_r + i\Lambda_3)}$$

$$\longrightarrow \quad Z^{PV'} = |Z^{PV}|\, e^{-\pi i \frac{1}{2} \eta(iD_1)}$$

違いはゲージ不変な local counter term

$$\frac{Z^{PV}}{Z^{PV'}} = e^{2\pi i \frac{1}{2} \eta(iD_1)} = e^{-2\pi i a} = e^{-i \int dx\, A_1(x)}$$

※ Phase しか考えないとき, 略記

$$Z_{\Lambda}^{PV} = \prod_{r \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \frac{\lambda_r}{\lambda_r - i\Lambda} \quad \text{または} \quad Z^{PV} = \frac{\det(iD_1)}{\det(iD_1 - i\Lambda)}$$

※ $$\frac{Z^{PV}}{Z^{PV'}} = \frac{\det(iD_1)}{\det(iD_1 - i\Lambda)}\left(\frac{\det(iD_1)}{\det(iD_1+i\Lambda)}\right)^{-1}$$

$$= \frac{\det(iD_1+i\Lambda)}{\det(iD_1-i\Lambda)}$$

← mass Λ の fermion
← regulator
と解釈できる。

$$= e^{2\pi i \frac{1}{2}\eta(iD_1)}$$

massive fermion の分配関数の phase

$$= e^{-i\int dx\, A_1(x)}$$

massive fermion を積分しただけだから local

☆ アノマリー流入

Choice

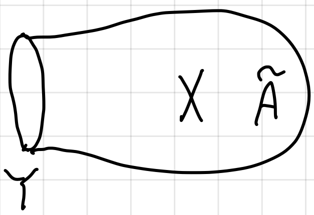
- C 対称性をあきらめる
- U(1) ゲージ対称性をあきらめる

もう1つ

- 1次元の系であることをあきらめる

2次元面 X：

$\partial X = Y$



ゲージ場も X に広げる。

$\tilde{A}|_Y = A$

$$\tilde{Z}_X := Z^{PV} e^{\pi i \left(\frac{1}{2\pi}\int_X F\right)}$$

← 今はとりあえず d+1次元 local counter term

$$= |Z^{PV}|\, e^{\pi i \left(\underbrace{\frac{1}{2}\eta(iD_1) + \frac{1}{2\pi}\int_X F}_{=\, I_X}\right)}$$

ゲージ不変

I_X （整数）
（これが何かは後で）

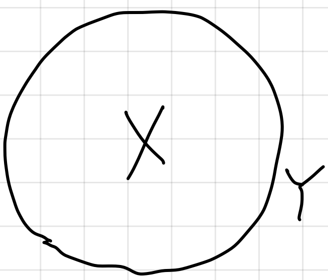
APS 指数定理

$$= |Z^{PV}|(-1)^{I_X}$$

実数 ⇒ C対称性 O.K.

例: X が円板の場合

1コのパッチをとれる



$$\frac{1}{2\pi}\int_X F = \frac{1}{2\pi}\int_Y A = a$$

ストークスの定理

$$\frac{1}{2}\eta(iD_1) = \left[a+\frac{1}{2}\right] - a$$

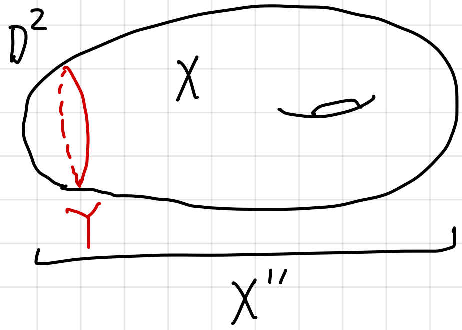
整数!

$$\Rightarrow \quad I_{D^2} = \left[a+\frac{1}{2}\right] - a + a = \left[a+\frac{1}{2}\right]$$

一般のXの場合

$$I_X - I_{D^2} = \frac{1}{2\pi}\int_X F - \frac{1}{2\pi}\int_{D^2} F = \frac{1}{2\pi}\int_{X''} F = I_{X''}$$

AS指数定理



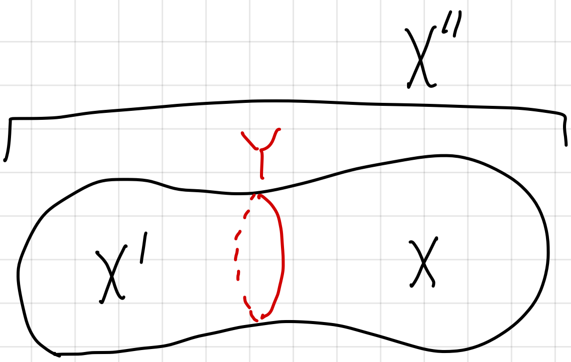
・アノマリーの言いかえ

$\tilde{Z}_X$ が X による $\Longleftrightarrow$ アノマリーがある.

アノマリーがない $\Rightarrow$ $\tilde{Z}_X$ (Xによらない)を分配関数とすれば、対称性を保つ.

・調べる方法

$$\frac{\tilde{Z}_X}{\tilde{Z}_{X'}} = e^{\pi i (I_X - I_{X'})}$$



$$I_X - I_{X'} = \frac{1}{2\pi}\int_X F - \frac{1}{2\pi}\int_{X'} F = \frac{1}{2\pi}\int_{X''} F$$

2次元の local な作用

奇数になりうる.

$$\frac{\tilde{Z}_X}{\tilde{Z}_{X'}} = -1 \neq 1$$

アノマリーがある!!

2次元の作用　ゲージ場

$$e^{iS_A[X, A, g]}$$

計量

local 作用

X: closed

1次元の理論,対称性　背景ゲージ場 A $\Longleftrightarrow$ (「アノマリー作用」 SPT相(の有効作用) Invertible phase)

アノマリーがある $\Longleftrightarrow$ $e^{iS_A[X, A, g]} \neq 1$

for $^\exists X, A, g, \dots$

例：さっきの1次元のフェルミオン N 個

$$Z^{PV} = |Z^{PV}|\, e^{\pi i \frac{\eta(iD)}{2} \times N}$$

アノマリーある?

アノマリー作用

$$\exp(iS_A) = \exp\Big(\pi i N \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_X F}_{\in \mathbb{Z}}\Big)$$

X: closed

N：偶数　$\underbrace{\exp(iS_A) = 1}_{いつも}$ ⇒ アノマリーなし.

(実際 $e^{\pi i \frac{\eta}{2} \times N}$ はゲージ不変な local counter term で消せる.)

N：奇数　$\exp(iS_A) = -1$ の場合あり ⇒ アノマリーあり

問題

なぜ、ここでAS指数、APS指数が出てくるのか？

Appendix　1次元フェルミオンのEuclid化経路積分

$\hat{\psi},\ \hat{\psi}^\dagger\ ,\quad \{\hat{\psi},\hat{\psi}^\dagger\}=1$

$\hat{H}=\omega\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}$

$|+\rangle\ :\ \hat{\psi}|+\rangle=0\ ,\quad |-\rangle:=\hat{\psi}^\dagger|+\rangle$

Coherent 状態

$\hat{\psi}|\psi\rangle=\psi|\psi\rangle\ ,\qquad \psi\ :\ $ G数

$\Rightarrow\quad |\psi\rangle=|+\rangle+\psi|-\rangle \qquad \Rightarrow\quad \langle\psi|\psi'\rangle=1+\psi^\dagger\psi'$

$\langle\psi|=\langle+|+\langle-|\psi^\dagger \qquad\qquad\qquad =e^{\psi^\dagger\psi'}$

"完全性"　$\displaystyle\int d\psi^\dagger d\psi\ |\psi\rangle\langle\psi|\,e^{-\psi^\dagger\psi}=1 \qquad \cdots(*)$

$\psi\psi^\dagger$の項をとってくる.

$Z=\mathrm{Tr}\,e^{-\beta\hat{H}}$ を考える

$\Downarrow$

$=\mathrm{Tr}\,\underbrace{e^{-a\hat{H}}e^{-a\hat{H}}\cdots e^{-a\hat{H}}}_{N個}\qquad a=\dfrac{\beta}{N}$

$*$をたくさん用意して挿入

$$= \int \prod_{i=1}^{N} \Big(\underbrace{d\psi_i^\dagger d\psi_i}_{\psi_i \psi_i^\dagger} \underbrace{e^{-\psi_i^\dagger \psi_i}}_{\text{even}} \Big) \mathrm{Tr} \Big(e^{-a\hat{H}} |\psi_N\rangle\langle\psi_N| e^{-a\hat{H}} |\psi_{N-1}\rangle \cdots \langle\psi_2| e^{-a\hat{H}} |\psi_1\rangle\langle\psi_1| \Big)$$

がぜんぶかかった項をとってくる

前に持っていく

これも入れて even $\Leftarrow$ $\langle -\psi_1|$

$$= \int \prod_{i=1}^{N} \Big(d\psi_i^\dagger d\psi_i e^{-\psi_i^\dagger \psi_i} \Big) \underbrace{\langle -\psi_1|}_{\langle \psi_{N+1}|} e^{-a\hat{H}} |\psi_N\rangle \cdots \langle\psi_2| e^{-a\hat{H}} |\psi_1\rangle$$

$$\boxed{\psi_{N+1} := -\psi_1}$$

$$\langle \psi_{i+1} | e^{-a\hat{H}} | \psi_i \rangle \simeq e^{-a\omega \psi_{i+1}^\dagger \psi_i} \underbrace{\langle \psi_{i+1} | \psi_i \rangle}_{e^{\psi_{i+1}^\dagger \psi_i}}$$

$$\simeq \int \prod_{i=1}^{N} d\psi_i^\dagger d\psi_i \exp\Big(-\sum_{i=1}^{N} \Big(\psi_{i+1}^\dagger \underbrace{(\psi_{i+1} - \psi_i)}_{=: a\dot{\psi}_i} + a\omega \psi_{i+1}^\dagger \psi_i \Big) \Big)$$

$$\simeq \int \prod_{i=1}^{N} d\psi_i^\dagger d\psi_i \exp\Big(-\sum_{i=1}^{N} a \big(\psi_{i+1}^\dagger \dot{\psi}_i + \omega \psi_{i+1}^\dagger \psi_i \big) \Big)$$

$\downarrow$ $N \to \infty$ $(a \to 0)$

$$Z = \int D\psi^\dagger D\psi \, e^{-S_E}, \qquad S_E = \int_0^\beta d\tau \big(\psi^\dagger(\tau) \dot{\psi}(\tau) + \omega \psi^\dagger(\tau) \psi(\tau) \big)$$

$$\psi(\beta) = -\psi(0), \quad \psi^\dagger(\beta) = -\psi^\dagger(0)$$

3. $U(1)_A$ アノマリーと指数定理

☆ スピノール

2n 次元　ガンマ行列

$2^n \times 2^n$ エルミート行列　γ_a ,　$a = 1, \cdots, 2n$

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\delta_{ab}$$

Chirality　$\bar{\gamma} = (-i)^n \gamma_1 \cdots \gamma_{2n}$

(4次元のときは γ_5 と書くやつ)

$\Rightarrow$　$\bar{\gamma}^2 = 1$　$\Rightarrow$ $\bar{\gamma}$ の固有値は ± 1

記号

$$\gamma_{a_1 a_2 \cdots a_k} := \gamma_{[a_1}\gamma_{a_2} \cdots \gamma_{a_k]}$$

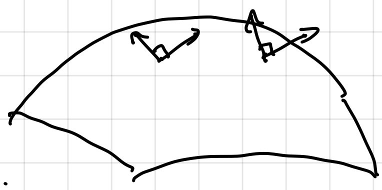
$$\{\bar{\gamma}, \gamma_a\} = 0, \quad [\bar{\gamma}, \gamma_{ab}] = 0$$

↑ 回転 $so(2n)$ の生成子

※ γ_{ab} は $so(2n)$ の可約表現 (Dirac スピノール)

$\bar{\gamma} = +1, -1$ に射影したものが既約 (Weyl スピノール)

☆ 曲がった空間



1つのパッチをとる。

計量 $g_{\mu\nu}(x)$ $\Rightarrow$ 多脚場 $e_\mu^a(x)$:

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^a(x) e_\nu^b(x) \delta_{ab}$$

局所回転対称性（ゲージ対称性）

$$SO(2n) \ni \Lambda(x)^a{}_b$$

$$e'^a_\mu(x) = \Lambda(x)^a{}_b \, e^b_\mu(x)$$

$$\Rightarrow \quad g'_{\mu\nu}(x) := e'^a_\mu(x)\, e'^b_\nu(x)\, \delta_{ab}$$

$$= g_{\mu\nu}(x)$$

これに対するゲージ場

$\omega_\mu{}^a{}_b$ 「スピン接続」

Christoffel 記号

$$\nabla_\mu e^a_\nu := \partial_\mu e^a_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu} e^a_\rho + \omega_\mu{}^a{}_b \, e^b_\nu$$

$=0$ となる $\omega_\mu{}^a{}_b$ "Levi-Civita 接続"

場の強さ（曲率）

$$R_{\mu\nu}{}^a{}_b := \partial_\mu \omega_\nu{}^a{}_b - \partial_\nu \omega_\mu{}^a{}_b + [\omega_\mu, \omega_\nu]^a{}_b$$

$a, b, \cdots$ の足は δ^{ab}, δ_{ab} で上げ下げ，$\mu, \nu \cdots$ と $a, b \cdots$ の入れかえ
$\mu, \nu, \cdots$ 〃 $g^{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ 〃 ， e^a_μ 〃

Riemann tensor

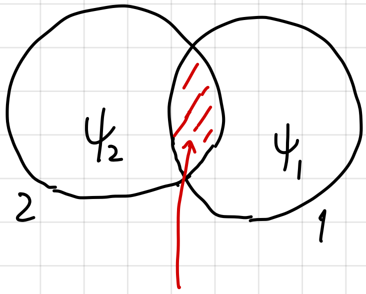
$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu}{}^a{}_b \, e_{\rho a} \, e^b_\sigma$$

☆ 曲がった空間でのスピノール $\psi(x)$

この局所 $SO(2n)$ のスピノール表現（本当は $Spin(2n)$）

$$D_\mu \psi := \partial_\mu \psi + \omega_\mu{}^{ab} \frac{1}{4} \gamma_{ab} \psi \qquad \text{（パッチごとに）}$$

パッチのはり合わせ



ゲージ変換

$$\psi_1(x) = U_{12}(x)\,\psi_2(x)$$

(cf. $SU(2) = Spin(3)$ と $SO(3)$ の関係)

$$2 \quad U_{12}(x) \in Spin(2n)$$

$$\therefore \qquad \downarrow$$

$$1 \quad \hat{U}_{12}(x) \in SO(2n)$$

二重

(変換関数 $U_{ij}(x)$ の consistent なセット)$/\sim$

$\Longleftrightarrow$ 「スピン構造」

(※ 空間のトポロジーによって
- スピン構造が存在しない
- スピン構造がいくつも存在する

場合がある)

曲がった空間で中性のスピノールを置くには「スピン構造」が必要

☆ ゲージ場と重力に結合した無質量 Dirac fermion

$$S[A, g, s, \psi, \bar{\psi}] = \int d^{2n}x \sqrt{g}\, \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi$$

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - i A_\mu \psi + \omega_\mu{}^{ab} \frac{1}{4} \gamma_{ab} \psi$$

$$Z = \int D\bar{\psi} D\psi\, e^{-S} \qquad (\gamma^\mu := e^\mu_a \gamma^a)$$

$U(1)_A$ 変換

$$\psi \to \psi' = e^{i\alpha\bar{\gamma}} \psi$$
$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{i\alpha\bar{\gamma}}$$

$\Rightarrow$ 作用は不変 $\{\bar{\gamma}, \gamma^\mu\} = 0$

理論は？

特に $D\bar{\psi}' D\psi' \stackrel{?}{=} D\bar{\psi} D\psi$

$\{\bar{\gamma}, \not{D}\} = 0 \Rightarrow [\bar{\gamma}, \not{D}^2] = 0 \Rightarrow$ $\bar{\gamma}$と$\not{D}^2$を同時対角化する基底をとる.

$$\psi(x) = \sum_n \underset{\text{G数}}{C_n}\, \underset{\text{C数関数}}{\phi_n(x)}$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_n \bar{C}_n \phi_n^\dagger(x)$$

$$D\bar{\psi} D\psi = \prod_n dC_n\, d\bar{C}_n$$

$\not{D}^2$: エルミート, 半負定値

ϕ : 固有関数

$$\not{D}^2 \phi = -\lambda^2 \phi$$

① $\lambda \neq 0$ $(\Leftrightarrow \not{D}\phi \neq 0)$

$\bar{\gamma}\phi = +\phi$ のとき. $\Rightarrow$ $\tilde{\phi} = \frac{i}{\lambda}\not{D}\phi$ とすると $\not{D}^2\tilde{\phi} = -\lambda^2\tilde{\phi}$

$\bar{\gamma}\tilde{\phi} = -\phi$

$$\boxed{\lambda \neq 0 \text{ の固有関数は必ず } \bar{\gamma} = \pm 1 \text{ がペアで出てくる!}}$$

ϕ_{n+}, ϕ_{n-} $\quad \not{D}^2 = -\lambda_n^2$

$\bar{\gamma} = +$ $\quad \bar{\gamma} =$

② 0固有値

$\bar{\gamma} = +$ $\quad \chi_{i+}(x)$ $\quad i = 1, \cdots, n_+$

$\bar{\gamma} = -$ $\quad \chi_{i-}(x)$ $\quad i = 1, \cdots, n_-$

$$\psi(x) = \sum_{\substack{n \\ \lambda_n \neq 0}} \left(c_{n+}\phi_{n+}(x) + c_{n-}\phi_{n-}(x) \right) + \sum_{i=1}^{n_+} b_{i+}\chi_{i+}(x) + \sum_{i=1}^{n_-} b_{i-}\chi_{i-}(x)$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{\substack{n \\ \lambda_n \neq 0}} \left(\bar{c}_{n+}\phi^\dagger_{n+}(x) + \bar{c}_{n-}\phi^\dagger_{n-}(x) \right) + \sum_{i=1}^{n_+} \bar{b}_{i+}\chi^\dagger_{i+}(x) + \sum_{i=1}^{n_-} \bar{b}_{i-}\chi^\dagger_{i-}(x)$$

cutoff

$$D\bar{\psi}D\psi = \prod_n^{\Lambda} dc_{n+}\,dc_{n-}\,d\bar{c}_{n+}\,d\bar{c}_{n-}$$) $U(1)_A$で不変

$$\times \prod_{i=1}^{n_+} db_{i+}\,d\bar{b}_{i+} \prod_{i=1}^{n_-} db_{i-}\,d\bar{b}_{i-}$$) ここだけ考えればよい.

$$D\bar{\Psi}' D\Psi' = D\bar{\Psi} D\Psi \, e^{-2i\alpha(n_+ - n_-)}$$

$dc := \frac{\partial}{\partial c}$ 等 であることに注意

$$\boxed{\mathrm{Ind}\, \not{D} := n_+ - n_- \quad \text{指数}}$$

$$\left(\begin{array}{l} n_+ : \not{D}\phi = 0,\ \bar{\gamma}\phi = +\phi \text{ の解の数} \\ n_- \quad\quad \text{〃} \quad\quad - \quad\quad \text{〃} \end{array} \right)$$

☆ AS 指数定理

べき級数展開して，(2n)-form を取り出して積分

$$\mathrm{Ind}\,\not{D} = \int_X \mathrm{tr}_C \left(e^{\frac{F}{2\pi}} \right) \hat{A}(R)$$

(2n) 次元閉多様体（考えている空間）

Dirac fermion のゲージ群の表現での trace

$$F := \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]$$

$$\hat{A}(R) := \sqrt{\det \frac{iR/4\pi}{\sinh iR/4\pi}} = \left(\frac{iR}{4\pi} \text{ の偶数次の tr のべき級数} \right)$$

$$R = R^a{}_b = R_{\mu\nu}{}^a{}_b\, dx^\mu \wedge dx^\nu$$

（成分が 2-form の $(2n)\times(2n)$ 行列）

$$f(x) = \frac{\sinh x}{x} = 1 + \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 + \cdots$$

$$\hat{A}(R) = \sqrt{\det f(x)^{-1}} = \exp\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\log f(x)\right)$$

$$\left(x := \frac{iR}{4\pi}\right)$$

$$= 1 \underbrace{- \frac{1}{2\times 3!}\,\mathrm{tr}\,x^2}_{+\frac{1}{12\times 16\pi^2}\mathrm{tr}(R\wedge R)} + \cdots$$

例：$2n=4$ の場合

$$\mathrm{Ind}\,\not{D} = \int_X \left[\frac{1}{8\pi^2}\,\mathrm{tr}_c(F\wedge F) + \frac{N}{12\times 16\pi^2}\mathrm{tr}(R\wedge R)\right]$$

$N := \mathrm{tr}_c\, 1$ ゲージ群の表現の次元

$2n=6$ の場合

$$\mathrm{Ind}\,\not{D} = \int_X \left[\frac{1}{3!(2\pi)^3}\,\mathrm{tr}_c(F\wedge F\wedge F) + \frac{1}{2\pi}\mathrm{tr}_c F \times \frac{1}{12\times 16\pi^2}\mathrm{tr}(R\wedge R)\right]$$

☆ AS 指数定理の導出

$$\mathrm{Ind}\, \not{D} = \underset{\not{D}\phi=0\text{の解}}{\mathrm{Tr}} \ \bar{\gamma}$$

$\not{D}^2 \neq 0$ はペアで出てくる.

$$= \mathrm{Tr}\left[\bar{\gamma} \exp\left(\frac{\not{D}^2}{M^2}\right)\right]$$

Mによらない, $M \to \infty$で評価

Step 1. $\not{D}^2$の整理

$$\not{D}^2 = \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu \qquad \left(\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu}\right)$$

$$= g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu + \gamma^{\mu\nu} \frac{1}{2}[D_\mu, D_\nu]$$

$$= D_\mu D^\mu + \frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\left(-iF_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}{}^{ab}\frac{1}{4}\gamma_{ab}\right)$$

$$\frac{1}{8}\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{4}R_{sc} \quad (\text{スカラー曲率})$$

使う式

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho}$$

$$R_{\mu[\nu\rho\sigma]} = 0$$

$$\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\rho\sigma} = -g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}$$

$$- g^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma} + (\text{perms})$$

← 交換子 $[\gamma^{\mu\nu}, \gamma^{\rho\sigma}]$ に残る項

$$+ \gamma^{\mu\nu\rho\sigma}$$

$$\frac{\cancel{D}^2}{M^2} = \overbrace{\frac{D_\mu D^\mu}{M^2}}^{\text{微分, }\gamma\text{行列}} - \underbrace{\frac{R_{sc}}{4M^2}}_{\text{無視}} - i\underbrace{\frac{\cancel{F}}{M^2}}_{\gamma\text{行列}} \qquad \left(\cancel{F} := \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\right)$$

※ $M\to\infty$ で評価

- 微分はいくらでも大きくなれるので M と比べて小さいと言えない.
- γ行列ある項は残す $\quad \mathrm{Tr}\left[\bar{\gamma}\,\underbrace{\exp\left(\frac{\cancel{D}^2}{M^2}\right)}_{\gamma^{12\cdots(2n)}\text{が出てくる項以外は}0}\right]$

$$\exp\left(\frac{\cancel{D}^2}{M^2}\right) = \exp\left(\frac{-i\cancel{F}}{M^2}\right)\exp\left(\frac{D_\mu D^\mu}{M^2}\right) \leftarrow \text{交換子は無視（微分, }\gamma\text{行列がへる）}$$

$$D_\mu = \partial_\mu + \omega_\mu{}^{ab}\frac{1}{4}\gamma_{ab}$$

↑ A_μは無視

$F_{\mu\nu}(x)$をかけるという演算子と試

$$\mathrm{Ind}\,\cancel{D} = \int d^{2n}x\sqrt{g}\,\langle x|\,\mathrm{tr}\left[\bar{\gamma}\exp\left(\frac{-i\cancel{F}}{M^2}\right)\exp\left(\frac{D_\mu D^\mu}{M^2}\right)\right]|x\rangle$$

$$\mathrm{Tr}X = \int d^{2n}x\sqrt{g}\,\langle x|\,\mathrm{tr}\,X\,|x\rangle$$

↑ spinorの足, colorの足に関するtrace

規格化

$$\langle x'|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{g}}\delta^{2n}(x'-x)$$

$$\mathrm{Ind}\,\cancel{D} = \int d^{2n}x\sqrt{g}\,\mathrm{tr}\left[\bar{\gamma}\exp\left(\frac{-i\cancel{F}}{M}\right)\underbrace{\langle x|\exp\left(\frac{D_\mu D^\mu}{M^2}\right)|x\rangle}_{\text{これを評価}}\right]$$

$F_{\mu\nu}(x)$という関数を含む

Step 2. 核の評価

◎命題

$$\langle x| \exp\left(\frac{D_\mu D^\mu}{M^2}\right)|x\rangle = \frac{M^{2n}}{(4\pi)^n}\sqrt{\det\frac{R/2}{\sinh R/2}}$$

R : $\frac{1}{2}R^\mu{}_{\nu ab}\,\theta^{ab}$, μ,νを足と思った行列

$\theta^a = \frac{\gamma^a}{M}$, $\theta^{ab} = \theta^{[a}\theta^{b]}$

$M\to\infty$なので $\{\theta^a,\theta^b\}=0$ ⇒ G代数.

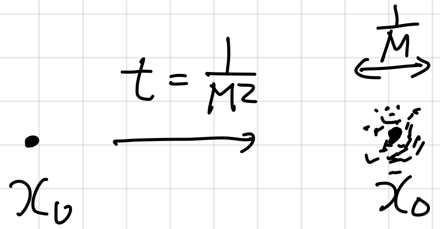
導出

アイデア: $\langle x| e^{-\frac{1}{M^2}(-D_\mu D^\mu)}|x\rangle$

熱拡散方程式の核

$$\frac{d}{dt}\rho = D_\mu D^\mu \rho$$

$$\rho(t,x) = \int d^{2n}x\sqrt{g}\,\langle x| e^{-t(-D_\mu D^\mu)}|x_0\rangle\,\rho(0,x_0)$$



$M\to\infty$でx_0のすぐ近くだけ考えればよい.

⇒ ほとんど平ら.
曲率は定数

⇒ 熱拡散方程式を手で解く

1. 1点 x_0 を固定，ゲージ固定

$$x = x_0 + y$$

$$g_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu} + O(y^2)$$

$$e_\mu^a(x) = \delta_\mu^a + O(y^2)$$

$$\omega_\mu{}^{ab}(x) = \frac{1}{2} y^\nu R_{\nu\mu}{}^{ab}(x_0) + O(y^2)$$

→ $y=0$ で 0

$$\Downarrow$$

$$\frac{D_\mu}{M} = \frac{\partial_\mu}{M} + \frac{1}{2M} y^\nu R_{\nu\mu}{}^{ab} \frac{1}{4} \gamma_{ab}$$

$$\left(z^\mu := M y^\mu, \quad \theta^a := \frac{\gamma^a}{M} \right) \Rightarrow \{\theta^a, \theta^b\} = 0$$

($\frac{2\delta^{ab}}{M^2}$ は無視)

$$= \frac{\partial}{\partial z^\mu} + \frac{1}{2} z^\nu R_{\nu\mu}{}^{ab} \frac{1}{4} \theta_{ab}$$

Grassmann 代数

$$K(z,t) := \langle z | \exp(t D_\mu D^\mu) | z=0 \rangle$$

$$\langle z' | z \rangle = \delta^{2n}(z - z'), \quad D_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{4} z^\nu R_{\nu\mu}$$

(ほしいもの $K(0,1)$)

$$R_{\nu\mu} := \frac{1}{2} R_{ab\nu\mu} \theta^{ab}$$

微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} K(z,t) = D_\mu D^\mu K(z,t) \quad \cdots ①$$

初期条件

$$K(z,0) = \delta^{2n}(z)$$

解く

$$\Rightarrow K(z,t) = \frac{1}{(4\pi)^n}\sqrt{\det \frac{R/2}{\sinh Rt/2}}$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2} z^T \left(\frac{R}{4}\coth\frac{Rt}{2}\right) z\right]$$

解き方

ansatz (どうせガウス型だろう…)

$$K(z,t) = \exp\left(\frac{1}{2} A_{\mu\nu}(t) z^\mu z^\nu + C(t)\right)$$

対称

A : μ,νを足と思った行列.

① に代入 $([A,R]=0$ を仮定$)$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{2}\dot{A} = A^2 - \frac{R^2}{16}$$

$$\dot{C} = \mathrm{tr}\, A$$

$\Downarrow$

$$A = -\frac{R}{4}\coth\frac{Rt}{2}$$

$\leftarrow$ $t=0$ で $\propto \delta^{2n}(z)$ を input.

$$C = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\log\left(\sinh\frac{Rt}{2}\right) + \log\alpha$$

$t=0$ での初期条件 $\Rightarrow$ $\alpha = \dfrac{\sqrt{\det\frac{R}{2}}}{(4\pi)^n}$

$$K(0,1) = \frac{1}{(4\pi)^n}\sqrt{\det\frac{R/2}{\sinh R/2}}$$

Step. 3 代入して整理

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \theta^{\mu\nu}$$

スピノールのtr　color のtr

$$\mathrm{Ind}\, \not{D} = \int d^{2n}x \sqrt{g} \frac{M^{2n}}{(4\pi)^n} \mathrm{tr}_S \Big[\bar{\gamma}\, \underbrace{\mathrm{tr}_C \left(e^{-iF} \right) \sqrt{\det \frac{R/2}{\sinh R/2}}}_{\text{残るのは }\theta\text{ がすべてかかっているもの}} \Big]$$

$\bar{\gamma}$ これがある

$\Omega_{12\cdots(2n)} \theta^{12\cdots(2n)}$

$$= \int d^{2n}x \sqrt{g} \frac{M^{2n}}{(4\pi)^n} \mathrm{tr}_S \Big(\bar{\gamma}\, \Omega_{12\cdots(2n)} \underbrace{\theta^{12\cdots(2n)}}_{i^n \bar{\gamma} \frac{1}{M^{2n}}} \Big)$$

$$\left(\mathrm{tr}_S 1 = 2^n \right)$$

$$= \int d^{2n}x \sqrt{g} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^n \Omega_{12\cdots(2n)}$$

$$= \left(\frac{i}{2\pi} \right)^n \int_X \Omega \qquad \Omega := \Omega_{12\cdots(2n)} e^1 \cdots e^{2n}$$

$$e^a := e^a_\mu dx^\mu$$

まとめると

$$\mathrm{Ind}\, \not{D} = \int_X \underbrace{\left(\frac{i}{2\pi} \right)^n \mathrm{tr}_C \left(e^{-iF} \right) \sqrt{\det \frac{R/2}{\sinh R/2}}}_{2n\text{-form}}$$

$\frac{i}{2\pi}$ を F と R におしつける

$$\underbrace{F\,F\,F \cdots R\,R\,R \cdots}_{n\text{コ}}$$

$$= \int_X \mathrm{tr}_C \left(e^{\frac{F}{2\pi}} \right) \hat{A}(R)$$

$\blacksquare$

☆☆　いくつか分かること

◎ 4次元中性 Dirac Fermion

$$\mathrm{Ind}(\not{D}^{(1)}) = \frac{1}{48\times(2\pi)^2}\int_X \mathrm{tr}(R\wedge R)$$

は偶数

$$\left(\begin{array}{l} \because\ \phi \text{ が } \not{D}\phi = 0,\ \bar{\gamma}\phi = \pm\phi \\ \qquad \Rightarrow\ \phi^c := C\phi^* \quad (\text{荷電共役}) \quad \Rightarrow n_+,\ n_- \text{ ともに偶数} \\ \qquad\quad \text{も } \not{D}\phi^c = 0,\ \bar{\gamma}\phi^c = \pm\phi^c \\ \left(\begin{array}{l} C\gamma^\mu C^{-1} = \gamma^{\mu T} = \gamma^{\mu *} \\ C\bar{\gamma}C^{-1} = \bar{\gamma}^T = \bar{\gamma}^* \\ C^T = -C \end{array}\right) \end{array}\right)$$

◎ 一般の向きつき閉4次元多様体 X

$$N_\pm : (d+d^\dagger)\omega = 0,\quad *\omega = \pm\omega$$

符号数 $\sigma(X) := N_+ - N_-$

$= (\text{self-dual harmonic 2-form の数})$

$- (\text{anti-}\quad〃\quad)$

符号数定理

$$\sigma(X) = \frac{1}{6\times(2\pi)^2}\int_X \mathrm{tr}(R\wedge R)$$

⇓

X がスピンなら

$$\mathrm{Ind}(\not{D}^{(0)}) = \frac{1}{8}\sigma(X)$$

$=$ 偶数　　⇒ $\sigma(X)$ は16の倍数

「Rokhlinの定理」
(ロホリン)

対偶：$\sigma(X)$ が 16の倍数でなければ、X にスピン構造は入らない

例：$\mathbb{C}P^2 := (\mathbb{C}^3 - \{0\})/\mathbb{C}^\times$

$\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$
かけ算で群

$(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$

$(z_1, z_2, z_3) \sim (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3)$

harmonic 2-form は 1つしかない　　$\lambda \in \mathbb{C}^\times$

$\Rightarrow \sigma(X) = 1$ or -1

$\Rightarrow$ スピン構造は入らない.

◎ 4次元　ゲージ群 $U(1)$，X はスピン

charge 0

$$\mathrm{Ind}(\not{D}^{(0)}) = \frac{1}{48\times(2\pi)^2}\int_X \mathrm{tr}(R\wedge R)$$

charge 1

$$\mathrm{Ind}(\not{D}^{(1)}) = \frac{1}{2\times(2\pi)^2}\int_X F\wedge F + \frac{1}{48\times(2\pi)^2}\int_X \mathrm{tr}(R\wedge R)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ind}(\not{D}^{(1)}) - \mathrm{Ind}(\not{D}^{(0)}) \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{1}{2\times(2\pi)^2}\int_X F\wedge F$$

$\boxed{X \text{ がスピンなら } \int_X \frac{F}{2\pi}\wedge\frac{F}{2\pi} \text{ は偶数}}$

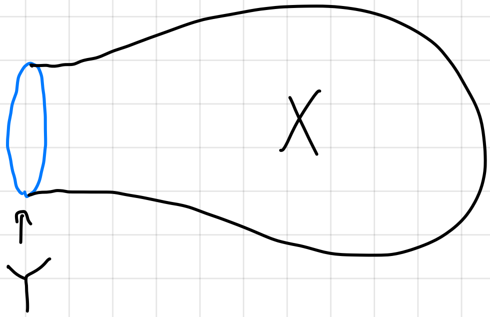
※ 一般には整数

4. APS指数定理

☆ 境界のある空間上のフェルミオン

X : $2n$ 次元

$\partial X = Y$



境界条件?

◎ 物理的な境界条件

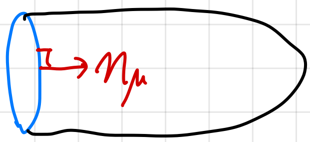
- 局所的
- Hamiltonian がエルミート

$\Rightarrow$ (例)

$$n_\mu \gamma^\mu \psi = +\psi \Big|_Y$$

(または $n_\mu \gamma^\mu \psi = -\psi \Big|_Y$)

n_μ : 単位法線ベクトル



説明　演算子形式

$$\hat{H} = \sum_{n,m} \hat{\psi}^{\dagger n} h_n{}^m \hat{\psi}_m$$

(境界条件 → n, m がどこを走るか?)

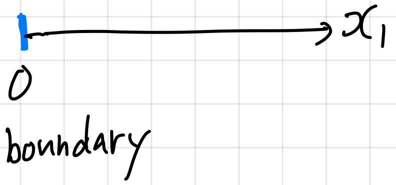
$$\hat{H}^\dagger = \hat{H} \Leftrightarrow h_n{}^m \text{ がエルミート}$$

d 次元, 自由無質量 Dirac フェルミオン

$$h = i\gamma^0 \gamma^i \partial_i \qquad i = 1, \cdots, d-1$$

内積　$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle := \int d^{d-1}x \, \phi_1^\dagger \phi_2$

$x_1 \geq 0$ が空間. $x_1 = 0$ が境界



$$\langle \phi_1, h\phi_2 \rangle = \cdots = \langle h\phi_1, \phi_2 \rangle$$

こうなるようにする.

$$= \int d^{d-1}\vec{x}\ \phi_1^\dagger i\gamma^0\gamma^i\partial_i\phi_2$$

$$= \underbrace{\int d^{d-1}x\ \partial_i\left(\phi_1^\dagger i\gamma^0\gamma^i\phi_2\right)}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} + \int d^{d-1}x \Big(\underbrace{-\partial_i\phi_1^\dagger i\gamma^0\gamma^i}_{(i\gamma^0\gamma^i\partial_i\phi_1)^\dagger}\phi_2 \Big)$$

0 になるべし

$$\Leftrightarrow \quad \phi_1^\dagger\gamma^0\gamma^1\phi_2 = 0$$

$$\Uparrow$$

(例) $\gamma^1\phi = \phi$

(∵)
$$\phi_1^\dagger\gamma^0\gamma^1\phi_2 = \phi_1^\dagger\gamma^0\phi_2$$
$$= -\phi_1^\dagger\gamma^1\gamma^0\phi_2 = -\phi_1^\dagger\gamma^0\phi_2 = 0$$

$$\boxed{\text{物理的境界条件を満たす}\psi\text{には }\bar{\gamma}\text{ が作用しない！}}$$

$$n\cdot\gamma\,\psi = \psi \Rightarrow n\cdot\gamma\,\bar{\gamma}\psi = -\bar{\gamma}\psi$$

$\bar{\gamma}\psi$は境界条件満たさない.

$$(\{n\cdot\gamma, \bar{\gamma}\} = 0)$$

$$\Downarrow$$

ASと同じ意味での指数を定義できない！

◎ APS 境界条件

境界の近く

$Y \times \mathbb{R}_+$

$(x^1, \dots, x^{d-1})$ x^d

$A_d = 0$ ゲージを取る

$\omega_d = 0$

(本当は少しだけ変形して襟(えり)(collar)を付ける


)

$$\not{D} = \gamma^d \partial_d + \gamma^i D_i \quad (i = 1, \dots, d-1)$$

$$= \gamma^d \Big(\partial_d + \underbrace{\gamma^d \gamma^i D_i}_{=:-B}\Big)$$

エルミート演算子 on Y

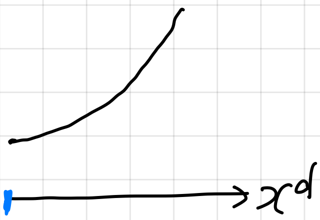
APS 境界条件

$$B\psi = |B|\psi \Big|_{x^d=0} \qquad |B| := \sqrt{B^2}$$

非局所

• $\not{D}\psi = 0 \Rightarrow \partial_d \psi = B\psi$

APS B.C.



境界から内側へ大きくなるもののみ

• $d = 2n$　$[\bar{\gamma}, B] = 0 \Rightarrow \bar{\gamma}$ が B.C. を保つ演算子

$\Rightarrow$ $\mathrm{Ind}(\not{D}_{APS}) := n_+ - n_-$ が定義できる.

$n_\pm$: $\not{D}\psi = 0$ の解で $\bar{\gamma} = \pm$ のものの数

- $N = 2^{n-1} \Rightarrow \gamma^\mu : 2N \times 2N$ 行列

$$\gamma^d = \begin{pmatrix} 0 & -i\, 1_{N\times N} \\ i\, 1_{N\times N} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

σ^i : d-1 次元ガンマ行列

$$B = \begin{pmatrix} i\cancel{D}_{d-1} & 0 \\ 0 & -i\cancel{D}_{d-1} \end{pmatrix} \qquad \cancel{D}_{d-1} = \sigma^i D_i$$

Y上の Dirac 演算子

☆ APS 指数定理

$$\mathrm{Ind}(\cancel{D}_{APS}) = \frac{1}{2}\eta(i\cancel{D}_{d-1}) + \underbrace{\int_X \mathrm{tr}_c \left(e^{\frac{F}{2\pi}}\right)\hat{A}(R)}_{\text{AS のときと同じ}}$$

η 不変量

AS のときと同じ $=: I_{2n}$ ($2n$-form)

※ $2n = 2$ のとき.

$$\mathrm{Ind}(\cancel{D}_{APS}) = \frac{1}{2}\eta(iD_1) + \frac{1}{2\pi}\int_X \mathrm{tr}_c F$$

前に出てきたやつ

→ U(1) 部分しか残らない.

※ $dI_{2n} = 0 \Rightarrow$ パッチごとに $I_{2n} = dI_{2n-1}$ と書ける.

$\exists I_{2n-1}$ $(2n-1)$-form

$$\frac{1}{2}\eta(i\cancel{D}_{d-1}) = -\int_X dI_{2n-1} = -\int_Y I_{2n-1} \quad \mathrm{mod}\ 1$$

$$\Rightarrow e^{2\pi i \frac{1}{2}\eta(i\cancel{D}_{d-1})} = e^{-2\pi i \int_Y I_{2n-1}}$$

local に書けている

例 : $2n=4$, flat $(R=0)$

$$I_{2n} = \frac{1}{8\pi^2} \mathrm{tr}_c\, F \wedge F = d I_{2n-1}$$

$$I_{2n-1} = \frac{1}{8\pi^2} \mathrm{tr}_c \left(A \wedge dA - \frac{2}{3} i A \wedge A \wedge A \right)$$

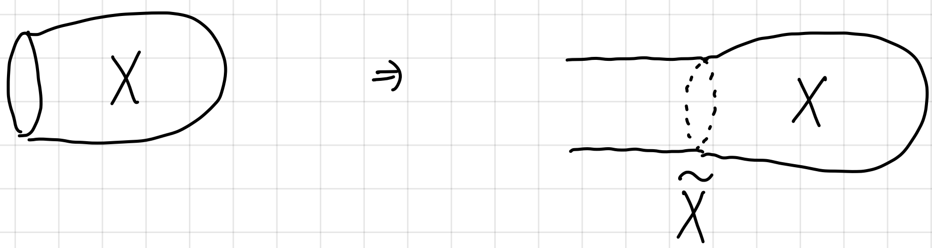
$2\pi i I_{2n-1}$ Chern-Simons action

$2\pi i \frac{1}{2} \eta(i \not{D}_{d-1}) =$ CS action mod 2π

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{奇数次元の } \eta \text{ 不変量} \\ \sim \text{ CS action を} \left(\begin{array}{l}\text{non-local だけど} \\ \text{ゲージ不変}\end{array}\right) \text{にしたもの}\end{array}}$$

※ $\mathrm{Ind}(\not{D}_{APS})$ はトポロジカルではない
(連続変形で変わる)

※



$\mathrm{Ind}(\not{D}_{\tilde{X}}) := n_+ - n_-$

$n_\pm$: $\tilde{X}$ で $\not{D}\phi = 0$ の <u>normalizable</u> な解
$\bar{\gamma} = \pm$ の数

事実 $\mathrm{Ind}(\overset{X_E}{\not{D}_{APS}}) = \mathrm{Ind}(\not{D}_{\tilde{X}})$

5. 摂動論的アノマリー

☆ 4次元のカイラルゲージ理論

ゲージ群 G , 表現 R (可約かも)

ψ : left-handed Weyl fermion.
表現 R に属する

$\bar{\psi}$: right-handed Weyl fermion
表現 $\overline{R}$ に属する

Lorentzian では互いに複素共役

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = \int d^4x\sqrt{g}\left(i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu D_\mu\psi\right)$$

$$D_\mu\psi = \partial_\mu\psi - iA_\mu^R\psi + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\sigma_{ab}\psi$$

質量項?

$$\mathcal{L} = \psi M\psi + \bar{\psi}M^*\bar{\psi}$$

※ Lorentz 不変な bilinear $\quad \psi\psi,\ \bar{\psi}\bar{\psi}$

すべてのfermionにゲージ不変な質量項を与えることができない理論

＝「カイラルな理論」

(※すべての人に共通の言葉づかいではないかも…)

⟺ R が非退化対称双線型形式を持つ.

例：・$G = SU(N)$, $R = \square$ (基本表現)

カイラルな理論

・$G = SU(N)$, $R = \square \oplus \overline{\square}$

非カイラルな理論

$$\begin{pmatrix} \psi^1 \\ \vdots \\ \psi^N \\ \psi^{\bar{1}} \\ \vdots \\ \psi^{\bar{N}} \end{pmatrix}$$

mass term

$$M \sum_i \psi^{\bar{i}} \psi^i + M^* \sum_i \bar{\psi}^{\bar{i}} \bar{\psi}^i$$

・$G = SU(N)$, $R = \text{adjoint}$

$$M \sum_a \psi^a \psi^a$$

・G, $R = R_1 \oplus \overline{R_1}$　　R_1：任意の表現

$$M \sum_i \psi^{\bar{i}} \psi^i + M^* \sum_i \bar{\psi}^{\bar{i}} \bar{\psi}^i$$

※このタイプは R_1 の Dirac fermion にできる.

☆ アノマリー

$$e^{-W[A]} = \int D\bar{\Psi} D\Psi \, e^{-S[\bar{\Psi},\Psi,A]}$$

一般に 非局所的

ゲージ変換
$g(x) \in G \qquad A_\mu^g = g A_\mu g^{-1} + i g \partial_\mu g^{-1}$

$$W[A^g] = W[A] \quad ?$$

◦ 局所相殺項

$$S[\bar{\Psi},\Psi,A] \longrightarrow S'[\bar{\Psi},\Psi,A] + S_{ct}[A]$$

・ゲージ不変でないかもしれない
・局所的な作用
(Lagrangian 密度の積分)

$$e^{-W'[A]} = \int D\bar{\Psi} D\Psi \, e^{-S'}$$

$$W'[A] = W[A] + S_{ct}[A]$$

これがゲージ不変ならよし!

どんな $S_{ct}[A]$ を選んでも $W[A]$ をゲージ不変にできない

⟹ "アノマリーがある"

ここで考えたいもの

摂動論的アノマリー : 無限小変換 $\delta_v A_\mu = D_\mu v$ に対するアノマリー

◦ WZ consistency condition

◦ アノマリー降下方程式 (decent equation) ⟹ 高次元との関係

☆ WZ consistency condition

$v(x)$: Lie代数に値を持つ関数

$$\delta_v A_\mu = D_\mu v = \partial_\mu v - i[A_\mu, v]$$

$$\delta_v W[A] = \int d^4x \; \delta_v A_\mu^a(x) \frac{\delta W[A]}{\delta A_\mu^a(x)}$$

$$= \int d^4x \; -v^a(x) D_\mu \frac{\delta W[A]}{\delta A_\mu^a(x)}$$

$$= \int d^4x \; v^a(x) \mathcal{A}_a[A, x]$$

$$\mathcal{A}_a[A, x] = J^a(x) W[A]$$ "アノマリー" 局所的

$$-J^a(x) := D_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} = \partial_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} + f_{abc} A_\mu^b(x) \frac{\delta}{\delta A_\mu^c(x)}$$

$A_\mu^a(x)$ の配位全体の空間上のベクトル場

交換関係

$$\boxed{[J^a(x), J^b(y)] = f_{abc} \delta^4(x-y) J^c(y)}$$

計算で確かめられる

$$\left[\frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)}, A_\nu^b(x)\right] = \delta_a^b \delta_\nu^\mu \delta^4(x-y),$$ Jacobi恒等式を使う

$$\Rightarrow J^a(x) \mathcal{A}_b[A, y] - J^b(y) \mathcal{A}_a[A, x] = f_{abc} \delta^4(x-y) \mathcal{A}_c[A, y]$$

WZ consistency condition.

※ 汎関数 $W[A]$ が存在するなら、自明に成り立つ

※ $\mathcal{A}_a$ を直接計算しようとして、正則化などが consistent でないと、成り立たない。 cf 共変アノマリー

☆ BRST 形式

ghost 場 : フェルミオン的、スカラー、adjoint.

$$C(x) = C^a(x)\, T_a$$

BRST 変換

$$\begin{cases} \delta A_\mu^a = D_\mu C^a = \partial_\mu C^a + f_{abc} A_\mu^b C^c \\ \delta C^a = -\frac{1}{2} f_{abc} C^b C^c \end{cases}$$

～ C をパラメータとするゲージ変換

$\delta^2 = 0$ （計算で確かめられる、そうなるように作った）

$$(\delta W[A] =) \int d^4x\, C^a(x)\, \mathcal{A}_a[A, x] =: \mathcal{A}[C, A]$$

WZ condition $\Longleftrightarrow$ $\delta \mathcal{A}[C, A]$

- 局所相殺項について．

$F[A]$: 局所汎関数

$$W'[A] = W[A] + F[A]$$

$$\mathcal{A}'[C, A] = \mathcal{A}[C, A] + \delta F[A]$$

局所相殺項は"アノマリー"を変えない

アノマリー $\in \left\{ \text{局所汎関数 } \mathcal{A}[c, A] \ \underset{(c\text{の次数})}{\text{ghost 数}}\ 1 \ \middle|\ \delta\mathcal{A}=0 \right\} \Big/ \delta F[A]$

$F[A]$ ← 局所汎関数

"コホモロジー"

☆ アノマリー降下方程式

$$\mathcal{A} = \int_{X_4} \alpha_4^{(1)}$$

local

(1) ← ghost 数

4 ← form の次数

X_4 ← 4次元時空

1-form dx^μ は fermion 的ということにする.

$$dx^\mu c^a + c^a dx^\mu = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{d\delta + \delta d = 0}$$

WZ condition

$$\delta\mathcal{A} = 0 \iff \delta\alpha_4^{(1)} = d\,\alpha_3^{(2)} \qquad {}^\exists\alpha_3^{(2)}$$

◎ こういうものの作り方 : 6次元を考える.

$\alpha_6^{(0)}$ s.t. $d\alpha_6^{(0)} = 0$, $\delta\alpha_6^{(0)} = 0$

を持ってくる.

$\Rightarrow$ パッチごとに $\alpha_6^{(0)} = d\alpha_5^{(0)}$ $\quad {}^\exists\alpha_5^{(0)}$

$$\Rightarrow 0 = \delta\alpha_6^{(0)} = \delta d\alpha_5^{(0)} = -d\delta\alpha_5^{(0)}$$

$$\Rightarrow \delta\alpha_5^{(0)} = d\alpha_4^{(1)} \qquad {}^\exists\alpha_4^{(1)}$$

$$d\delta\alpha_4^{(1)} = -\delta d\alpha_4^{(1)} = -\underbrace{\delta\delta}_{=0}\alpha_5^{(0)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \delta\alpha_4^{(1)} = d\alpha_3^{(2)} \qquad \exists\,\alpha_3^{(2)} \quad \Rightarrow \text{WZ condition!}$$

局所相殺項

$\alpha_5'^{(0)} = \alpha_5^{(0)} + d\beta_4^{(0)}$ も $\alpha_6^{(0)} = d\alpha_5'^{(0)}$ を満たす.

$$\delta\alpha_5'^{(0)} = \delta\alpha_5^{(0)} + \delta d\beta_4^{(0)} = d\alpha_4^{(1)} - d\delta\beta_4^{(0)}$$

$$= d\alpha_4'^{(1)}, \qquad \alpha_4'^{(1)} = \alpha_4^{(1)} - \underbrace{\delta\beta_4^{(0)}}_{\text{局所相殺項}}$$

アノマリーそのもの $\alpha_4^{(1)}$ (ゲージ不変ではない. up to δF)
を考えるより

$\alpha_6^{(0)}$ ($\delta\alpha_6^{(0)} = 0$, $d\alpha_6^{(0)} = 0$)

を考える方が便利. アノマリー多項式

事実

$$\alpha_6^{(0)} = 2\pi i \; \overbrace{\mathop{\mathrm{tr}}_R \left(e^{\frac{F}{2\pi}}\right) \hat{A}(R)}^{\text{指数定理に出てきたやつ}} \Bigg|_{6\text{-form}}$$

↑表現Rでのtrace

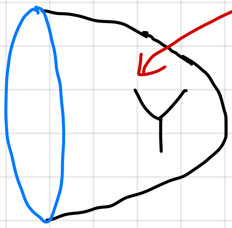
$\Rightarrow \alpha_4^{(1)}$, $\int_{X_4} \alpha_4^{(1)}$ がアノマリー

ストーリー

4次元 ゲージ群 G, 表現 R の left-handed Weyl の理論

↑

5次元 … の有質量 Dirac の理論



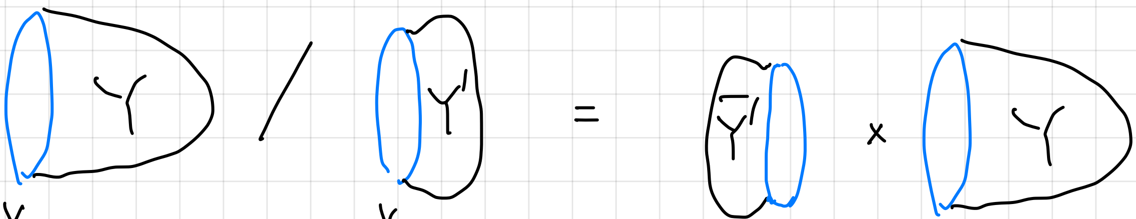
X_4 Y

PVで正則化可能

Yでのη不変量 後で説明?

Phase $\tilde{Z}_Y = |Z_X| e^{2\pi i \frac{1}{2}\eta(Y)}$

アノマリー ⇔ phase が Y によるか?

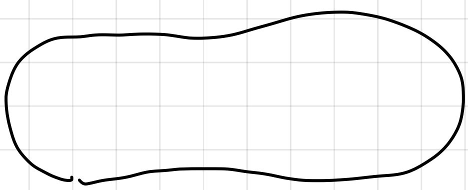


X_4 Y / X_4 Y' = X_4 $\bar{Y}'$ × X_4 Y

R, right-handed ‖ $\bar{R}$, left-handed

R, left-handed

質量項が組める. ⇒ massive

$=$ 

$\bar{Y}' \cup Y = Y''$ (closed) の上の massive Dirac

後で示す.

$$= e^{2\pi i \frac{1}{2}\eta(Y'')}$$

(ここまでは一般のアノマリー)

$$\boxed{e^{2\pi i \frac{1}{2}\eta} = 1 \text{ 恒等的に } \Leftrightarrow \text{ アノマリーなし}}$$

◎ $Y'' = \partial X$ の場合

APS index theorem

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\eta(Y'') = -\int_X \underbrace{\mathrm{tr}_R\, e^{\frac{F}{2\pi}} \hat{A}(R)}_{I_6} \quad \mathrm{mod}\ 1$$

$dI_6 = 0$

$\Rightarrow I_6 = dI_5$

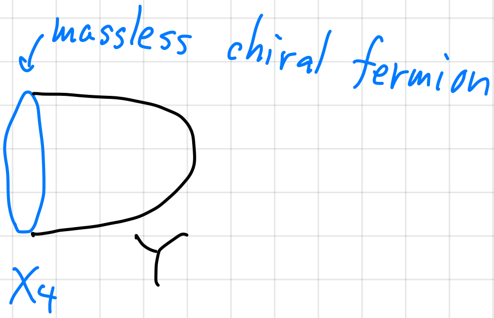
$$e^{2\pi i \frac{1}{2}\eta(Y'')} = e^{-2\pi i \int_X I_6}$$

$$= e^{+2\pi i \int_{Y''} I_5} \quad \leftarrow \text{local action}$$

$$\alpha_6^{(0)} = 2\pi i\, I_6, \quad \alpha_5^{(0)} = 2\pi i\, I_5$$

$Y : \partial Y = X_4$

X_4 以外では. Y''と同じ



$$2\pi i \frac{1}{2}\eta(Y) = -W(A) + \int_Y \alpha_5^{(0)}$$

$$0 = \delta\left(2\pi i \frac{1}{2}\eta(Y)\right)$$

$$= -\delta W[A] + \int_Y \delta\alpha_5^{(0)}$$

$$\delta W[A] =: \mathcal{A}[c, A]$$

$$= \int_Y \delta\alpha_5^{(0)} = \int_{X_4} \alpha_4^{(1)}$$

6. 質量のあるフェルミオンとアノマリー流入

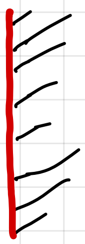
☆ 概略

d次元 "カイラル" フェルミオン（対称性を保つ質量項が入れれない）

：d次元のまま PV正則化できない.

⇓

d+1次元ならできる



d+1次元
有質量フェルミオン
（空っぽ）

無質量カイラルフェルミオン

$$\underbrace{Z[A]}_{\text{ゲージ不変}} = \underbrace{Z_{bdy}[A]}_{=\, e^{-W[A]}\ (\text{d次元 non-local})} \times \underbrace{Z_{bulk}[A]}_{\text{d+1次元 local}}$$

それぞれはゲージ不変でない.

"アノマリー流入"

アノマリーに関して

$Z_{bdy}[A]$ と $Z_{bulk}[A]$ は同じ情報を持っている

phase $= e^{-S_A[A]}$

閉じた時空で考えたもの "アノマリー作用"

$W[A]$ の local counter term = アノマリー作用の total derivative term

アノマリー作用にアノマリーの情報はすべて含まれる.

☆ フェルミオンのアノマリー作用 = η不変量

d+1 次元. 有質量フェルミオン. 閉じた時空

$$S = \int d^{d+1}x\sqrt{g}\,\overline{\psi}\,(\underbrace{i\gamma^\mu D_\mu}_{\text{エルミート}\Rightarrow\text{対角化 固有値 }\lambda_i} + iM)\psi$$

固有値 $|\lambda_i + iM| = \sqrt{\lambda_i^2 + M^2} \geq |M|$

M: 大きい

⇒ **空っぽの理論**

空っぽの理論にいろいろある可能性

Symmetry Protected Topological Phase

SPT相

PV 正則化

- $$Z = \frac{\prod_i(\lambda_i + iM)}{\prod_i(\lambda_i - iM)} \xrightarrow{\text{いいかげんな変形}} \prod_i\left(\frac{\lambda_i + iM}{\lambda_i}\right) \times \underbrace{\prod_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i - iM}\right)}_{e^{\pi i \frac{1}{2}\eta(i\not{D})}}$$

$$\longrightarrow \underline{e^{2\pi i \frac{1}{2}\eta(i\not{D})}}$$

非自明なSPT相かもしれない.

→ アノマリー作用

境界を入れたときに出てくるカイラルフェルミオンのアノマリーが分かる.

- $M \to -M$

$$Z = \frac{\prod_i(\lambda_i - iM)}{\prod_i(\lambda_i - iM)} = 1 \qquad \text{自明相}$$

☆ 境界　d：奇数　　　$2^{\frac{d-1}{2}} \times 2^{\frac{d-1}{2}}$ 行列

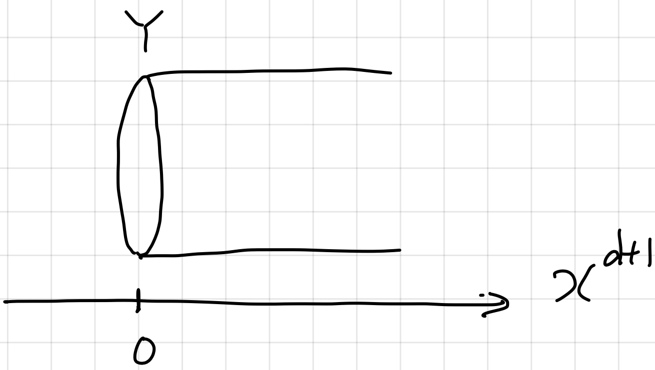
d が奇数　　ガンマ行列 σ^i　$i=1,\cdots,d$,　$\sigma^1\cdots\sigma^d = i^{\frac{d-1}{2}}$

⇓

d+1 は偶数　　$\gamma^\mu, \mu=1,\cdots,d+1$,　$\exists\, \bar\gamma = (-i)^{\frac{d+1}{2}}\gamma^1\cdots\gamma^{d+1}$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix},\quad \gamma^{d+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad \bar\gamma = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \underset{\substack{\uparrow \\ d\text{次元閉}}}{Y} \times \underset{\substack{\uparrow \\ x^{d+1}}}{\mathbb{R}_+}$$



物理的境界条件を課す

$$\gamma^{d+1}\psi = +\psi \Big|_{x^{d+1}=0}$$

$$H_M := \bar\gamma(\gamma^\mu D_\mu + M)$$

エルミート演算子（境界があっても）

（※　$i\gamma^\mu D_\mu$ は境界のせいでエルミートではない）

$$\langle \phi_1, H_M \phi_2\rangle = \int d^{d+1}x \quad \phi_1^\dagger \bar\gamma(\gamma^\mu D_\mu + M)\phi_2$$

$$= \int d^{d+1}x \overbrace{\left(-D_\mu \phi_1^\dagger \bar\gamma\gamma^\mu + M\phi_1^\dagger\bar\gamma\right)}^{(\bar\gamma(\gamma^\mu D_\mu + M)\phi_1)^\dagger}\phi_2$$

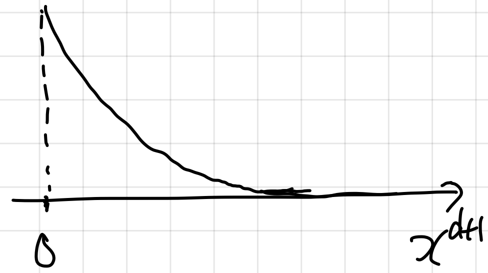
$$+ \int d^{d+1}x\, D_\mu\left(\phi_1^\dagger \bar\gamma\gamma^\mu\phi_2\right)$$

$$= \langle H_M\phi_1, \phi_2\rangle - \int_\partial d^d x\, \underline{\phi_1^\dagger\bar\gamma\gamma^{d+1}\phi_2}$$

$\underline{\qquad\qquad} = \phi_1^\dagger\bar\gamma\phi_2 = -\phi_1^\dagger\bar\gamma\gamma^{d+1}\phi_2 = -\phi_1^\dagger\bar\gamma\phi_2 = 0$

H_M の固有値

境界 ⇒ 境界に局在したモード



$$H_M\,\phi = \Lambda\phi \qquad i=1,\cdots,d$$

$$(\bar{\gamma}\gamma^{d+1}\partial_{d+1} + \bar{\gamma}\gamma^i D_i + \bar{\gamma}M)\phi = \Lambda\phi$$

Ansatz : 全体で $\gamma^{d+1}\phi = +\phi \Rightarrow \phi = \begin{pmatrix}\phi_+\\ 0\end{pmatrix}$

⇓

$$(-i\partial_{d+1} - iM + i\sigma^i D_i)\phi_+ = \Lambda\phi_+$$

$$\phi_+ = e^{-Mx^{d+1}}\chi$$

← Y上のスピノール

$i\sigma^i D_i\chi = \Lambda\chi \Rightarrow$ Λは $\underline{i\sigma^i D_i}$ の固有値

Y上無質量のDirac演算子

$$\boxed{H_M \text{ の小さな固有値は } Y \text{上 } i\not{D} \text{ と同じ}}$$

$$H_{-M} := \bar{\gamma}(\gamma^\mu D_\mu - M) \overset{\text{同じこと}}{\Rightarrow} \phi_+ = e^{Mx^{d+1}}\chi$$

規格化不可能

$$\boxed{H_{-M} \text{ は小さな固有値はない}}$$

$$Z = \frac{\det H_M}{\det H_{-M}} = \frac{\det(i\not{D} + iM)}{\det(i\not{D} - iM)}$$ は

(d+1)次元有質量フェルミオン

$\int_X d^{d+1}x\,\bar{\psi}(i\not{D}+iM)\psi$ の正則化 $\partial X = Y$

かつ

Y上 $\int_Y d^d x\,\bar{\chi}\,i\not{D}\chi$ の(d+1)次元を用いた正則化

☆ 境界 : d 偶数

$\Rightarrow$ $d+1$ 奇数

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \bar{\sigma}^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{d+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^i \bar{\sigma}^j + \sigma^j \bar{\sigma}^i = 2\delta^{ij}$$
$$\bar{\sigma}^i \sigma^j + \bar{\sigma}^j \sigma^i = 2\delta^{ij}$$

物理的境界条件 $\underline{\gamma^{d+1}\psi = +\psi}$

Dirac演算子

$$i\gamma^\mu D_\mu + \underset{\sim}{iM}$$

(エルミートでも反エルミートでもない)

($i\gamma^\mu D_\mu$ も境界のせいで)

bulkでは これのせいで大きい

局在したモード $\begin{pmatrix} \underset{\sim}{\chi} e^{-Mx^{d+1}} \\ 0 \end{pmatrix}$ 満たす

d次元 left-handed Weyl spinor

$$(i\gamma^\mu D_\mu + iM)\begin{pmatrix} \chi e^{-Mx^{d+1}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \underset{\sim}{i\bar{\sigma}^i D_i} \chi \, e^{-Mx^{d+1}} \end{pmatrix}$$

d次元 Weyl 演算子, 大きくない…

$\boxed{\chi \text{ が } Y \text{ に局在した Weyl フェルミオンと思える}}$

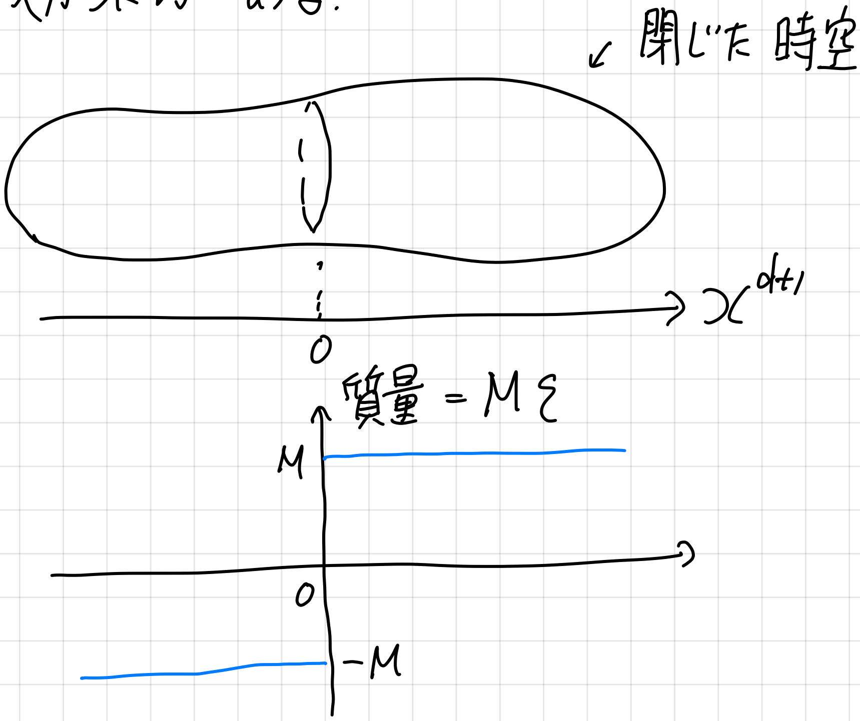
$M \to -M$ $\begin{pmatrix} \chi e^{Mx^{d+1}} \\ 0 \end{pmatrix}$ 規格化不能

軽いモードなし.

$$Z = \frac{\det(i\gamma^\mu D_\mu + iM)}{\det(i\gamma^\mu D_\mu - iM)}$$: Y上の Weyl フェルミオンの $d+1$ 次元を用いた正則化

☆ ドメインウォールフェルミオン

境界のかわりにキンク型の質量を入れても同じ効果がある。



$$Z = \frac{\det(i\not{D} + iM\varepsilon)}{\det(i\not{D} - iM)}$$ ⤳ Yに局在したカイラルフェルミオン

☆ パリティアノマリーとアノマリー作用

(d=1 の例でやったものの一般化)　　d: 奇数 ⇒ d+1: 偶数

d+1 次元 閉じた時空

$$Z = \frac{\det(i\cancel{D}+iM)}{\det(i\cancel{D}-iM)} \text{ “=” } e^{2\pi i \frac{1}{2}\eta(i\cancel{D})}$$

0 固有値がある
(というか 0 固有値しか効かない)

$$= \frac{d(i\cancel{D}+iM)}{\det(i\cancel{D})} \frac{\det(i\cancel{D})}{\det(i\cancel{D}-iM)}$$

0　0

・ 見方その1

$$S = \int d^{d+1}x\, \bar{\psi}(i\cancel{D}+iM)\psi$$

カイラル変換

$$\psi' = e^{i\alpha\bar{\gamma}}\psi, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{i\alpha\bar{\gamma}}$$

$$\Rightarrow \text{mass term} \quad iM\bar{\psi}'\psi' = iM\bar{\psi}e^{2i\alpha\bar{\gamma}}\psi$$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ にとる

$$iM\bar{\psi}'\psi' = -iM\bar{\psi}\psi$$

$$D\bar{\psi}'D\psi' = D\bar{\psi}D\psi\, \underbrace{e^{-2i\alpha \mathrm{Ind}(\cancel{D})}}_{\alpha=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ (-1)^{\mathrm{Ind}(\cancel{D})}}$$

$$Z = \frac{\det(i\cancel{D}+iM)}{\det(i\cancel{D}-iM)} = \frac{\det(i\cancel{D}-iM)}{\det(i\cancel{D}-iM)}(-1)^{\mathrm{Ind}(\cancel{D})}$$

$$= (-1)^{\mathrm{Ind}(\cancel{D})}$$

$$\text{アノマリー作用} = \pi i \overbrace{\int_{d+1} \mathrm{Tr}\left(e^{\frac{F}{2\pi}}\right)\hat{A}(R)}^{=\mathrm{Ind}(\cancel{D})}$$

アノマリーがある ⇔ $\mathrm{Ind}(\cancel{D})$ = 奇数になるような(時空, 計量, ゲージ場の配位)が存在

・見方その2

$$Z = \frac{\det(i\not{D} + iM)}{\det(i\not{D} - iM)} = \frac{\det H_M}{\det H_{-M}} = \frac{\det iH_M}{\det iH_{-M}}$$

$$H_M := \tilde{\gamma}(\not{D} + M)$$
$$H_{-M} := \tilde{\gamma}(\not{D} - M)$$

エルミート ⇒ Z は実

$$\det iH_M = \prod_\lambda i\lambda = |\det iH_M| \prod_\lambda \underbrace{i\,\mathrm{sign}\lambda}_{= e^{\frac{\pi}{2} i\,\mathrm{sign}\lambda}}$$

$$= |\quad| e^{\frac{\pi}{2} i \sum_\lambda \mathrm{sign}\lambda}$$

$$= |\quad| e^{\pi i \frac{1}{2}\eta(H_M)}$$

$$\Rightarrow \quad Z = e^{\pi i \left(\frac{1}{2}\eta(H_M) - \frac{1}{2}\eta(H_{-M})\right)}$$

2つの見方を合わせると…

$$\frac{1}{2}\eta(H_M) - \frac{1}{2}\eta(H_{-M}) = \mathrm{Ind}(\not{D}) \mod 2$$

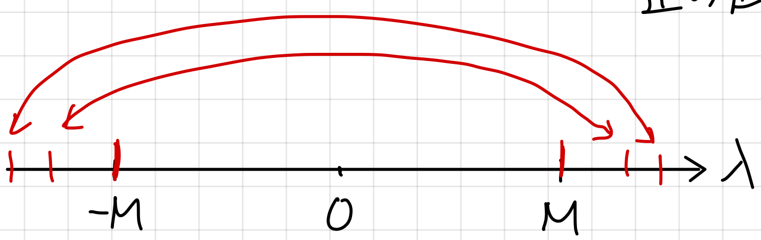
実はもっと強いことが成り立つ

$$\boxed{\frac{1}{2}\eta(H_M) - \frac{1}{2}\eta(H_{-M}) = \mathrm{Ind}(\not{D})}$$

<u>証明</u>

$H_M \not{D} + \not{D} H_M = 0 \quad \Rightarrow \quad \not{D} \neq 0$ の状態に関して

正の固有値と負の固有値がペア



定義より

$$\eta(H_M) = \mathrm{tr}\frac{H_M}{|H_M|} = \mathrm{tr}_{\mathrm{Ker}\,D\!\!\!/}\frac{H_M}{|H_M|} = \mathrm{tr}_{\mathrm{Ker}\,D\!\!\!/}\,\bar{\gamma} = \mathrm{Ind}(D\!\!\!/)$$

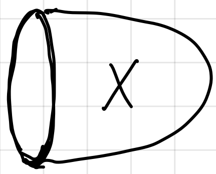
$$\eta(H_{-M}) \underset{(\text{同様})}{=} \cdots = -\mathrm{Ind}(D\!\!\!/)$$

∎

☆ ドメインウォール フェルミオン

d=1 フェルミオン

$$Z = e^{\pi i \frac{1}{2}\eta(iD\!\!\!/_1)}\, e^{\pi i \frac{1}{2\pi}\int_X F}$$

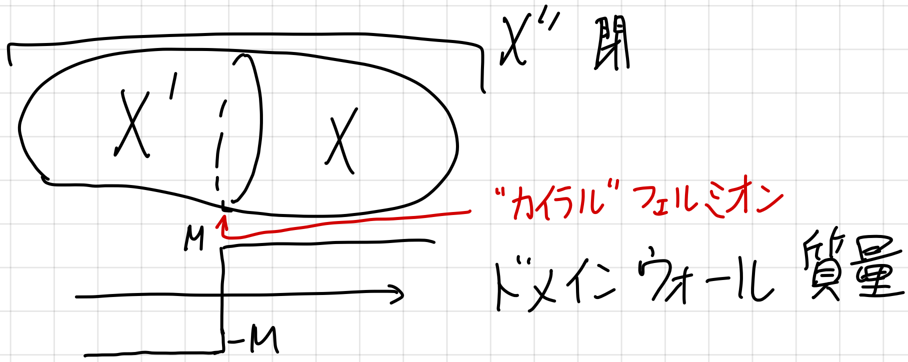


合わせて整数 ⇒ C対称性保っていた.

APS指数

なぜ？

境界条件が違う．．質量？



$$Z = \frac{\det(iD\!\!\!/ + iM\varepsilon)}{\det(iD\!\!\!/ - iM)} = (-1)^{\mathrm{Ind}(D\!\!\!/_{APS,X})}$$

(1次元の例での Observation)

$$= \frac{\det(iH_{DW})}{\det(iH_{-M})} \qquad \left(H_{DW} = \bar{\gamma}(D\!\!\!/ + M\varepsilon)\right)$$

$$= e^{\pi i\left(\frac{1}{2}\eta(H_{DW}) - \frac{1}{2}\eta(H_{-M})\right)}$$

さっきと同じノリで合わせる

$$\boxed{\frac{1}{2}\eta(H_{DW}) - \frac{1}{2}\eta(H_{-M}) = \mathrm{Ind}(\not{D}_{APS, X})}$$

[FOY]，[FFMOYY]

証明はややこしい（$\{H_{DW}, \not{D}\} \neq 0$）

☆ 摂動論的アノマリー

d：偶数 ⇒ d+1：奇数

X：d+1 次元，閉空間，$X = \partial Z$

Z：d+2次元

$$\mathcal{Z} = e^{2\pi i \frac{1}{2}\eta(i\not{D}_{d+1})}$$

⇓ APS指数定理　$\mathrm{Ind}(\not{D}_{APS}) = \frac{1}{2}\eta(i\not{D}_{d+1}) + \int I_{d+2}$

(なぜ？)

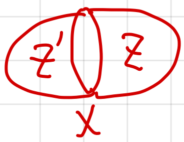
$$= e^{2\pi i\left(-\int_Z I_{d+2}\right)}$$

$I_{d+2} = \mathrm{tr}\left(e^{\frac{F}{2\pi}}\right)\hat{A}(R)\Big|_{d+2}$

↑ Zのとり方によらない

アノマリー多項式

$$\overset{''}{=} e^{-2\pi i\int_X I_{d+1}}$$



$I_{d+2} = dI_{d+1}$　アノマリー降下方程式の一部

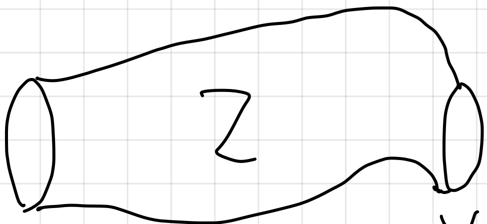
☆ 摂動論的アノマリーではないアノマリー
(global anomaly)

アノマリー ⇔ $e^{2\pi i \frac{1}{2}\eta(i\not{D}_{d+1})}$ の汎関数型

摂動論的アノマリーがない場合
(⇔ アノマリー多項式 $=0$)

$\exists Z$ $(d+2)$-dim

$\partial Z = X \sqcup \overline{X'}$ ← 向きが逆



X X'

APS指数定理

$$\mathrm{Ind}(\not{D}_{APS}) = \frac{1}{2}\eta(X) - \frac{1}{2}\eta(X') + \underbrace{\int I_{d+2}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \quad e^{2\pi i \frac{1}{2}\eta(X)} = e^{2\pi i \frac{1}{2}\eta(X')}$$

"Bordism不変"

⇒ global anomaly の分類

$$e^{2\pi i \frac{1}{2}\eta(i\not{D}_{d+1})} = 1 \quad \text{(恒等的に)}$$

でなければ、アノマリーがある!!