

共形場理論による  
弦理論のコンパクト化

山口 哲



# 目次

第1章 序論	7
1.1 弦理論と幾何学的描像	7
1.2 非コンパクト Calabi-Yau 多様体と Gepner 模型	9
第2章 共形場理論	11
2.1 WZW 模型	11
2.1.1 WZW 模型とアフィン Lie 代数のカレント	11
2.1.2 可積分最高ウェイト表現と指標	13
2.1.3 アフィン $SU(2)$ の場合の例	15
2.2 モジュラー不変性	15
2.2.1 トーラス上の分配関数	16
2.2.2 WZW 模型の分配関数	17
2.3 境界のある場合の共形場理論	19
2.3.1 帯上の共形場理論	19
2.4 コセット構成	24
2.4.1 GKO コセット	24
2.4.2 $\mathcal{N} = 2$ ミニマル模型	26
第3章 小弦理論のホログラフィーと非コンパクト Gepner 模型	29
3.1 NS5 ブレインと ALE	29
3.1.1 超重力理論の解	30
3.2 特異点を持つ Calabi-Yau 多様体	32
3.2.1 超曲面	32
3.2.2 非コンパクトな場合の Calabi-Yau – Landau-Ginzburg 対応	34
3.2.3 ALE の場合の例	35
3.2.4 負べきの Landau-Ginzburg 理論	35
3.3 アフィン $SL(2, \mathbb{R})$ の表現	37

3.3.1	SL(2,ℝ) のユニタリー表現と対応するアフィン SL(2,ℝ) の表現	38
3.3.2	$\mathcal{N} = 2$ 超共形対称性との関係	40
3.3.3	スペクトル流と指標	44
<b>第 4 章</b>	<b>連続系列</b>	<b>49</b>
4.1	モジュラー不変な分配関数	49
4.1.1	GSO 射影に関係のない部分	49
4.1.2	GSO 射影に関係のある部分: $d = 2, 6$ の場合	50
4.1.3	GSO 射影に関係のある部分: $d = 4$ の場合	54
4.2	楕円種数	55
4.2.1	楕円種数の計算	55
4.2.2	Hodge 数と Witten 指数	58
4.3	境界状態と交点数	61
4.3.1	$\mathcal{N} = 2$ Liouville 理論の境界状態	61
4.3.2	全体の境界状態と交点数	63
4.3.3	簡単な例	67
4.4	幾何学的解釈	69
4.4.1	交点形式	70
<b>第 5 章</b>	<b>離散系列</b>	<b>77</b>
5.1	一般の非コンパクト Gepner 模型	77
5.1.1	閉弦の理論	77
5.1.2	D ブレイン	79
5.1.3	例 — ALE 空間 —	80
<b>第 6 章</b>	<b>結論</b>	<b>83</b>
6.1	まとめ	83
6.2	今後の課題	84
<b>付録 A</b>	<b>記号と公式集</b>	<b>87</b>
A.1	雑多な記号と公式	87
A.2	テータ関数	87
A.3	代数	90

---

A.3.1	OPE と 交換関係の対応 . . . . .	90
A.3.2	共形代数 . . . . .	90
A.3.3	アフィン Lie 代数 . . . . .	92
付録 B	有限次元 Lie 代数	<b>95</b>
B.1	ルート系 . . . . .	95
B.1.1	交換関係と Killing 形式 . . . . .	95
B.1.2	単純ルート . . . . .	95
B.1.3	基本ウェイト . . . . .	96
B.2	Weyl 群 . . . . .	97
B.3	有限次元表現 . . . . .	97



# 第1章 序論

摂動論的弦理論とは、時空の中を運動する弦の世界面上の2次元場の理論を研究することにより時空の重力理論を理解しようという試みである。

粒子の理論では、同様に時空の中を運動する粒子の世界線上の量子力学を研究したとしても、時空の場の理論について得られる情報は少ない。一方、弦理論の場合には世界面上の理論を調べることで、少なくとも摂動論的には時空の重力場の理論のS行列等が計算できる。ここが弦理論の優位な点である。

本論では、世界面上の場の理論を用いて、時空の理論の解析を行う。弦理論としてもっともよく研究されている平らな背景時空上の弦の世界面上の理論は、自由場の理論である。それに対して曲がった背景時空上の弦の世界面上の理論は、相互作用がある理論であり、通常の古典幾何学的な描像は通用しない。つまり、このような相互作用のある弦の世界面の理論を考えることにより時空の幾何学というものに対する新しい見方が出来るようになる。

また、本論で主に扱うのは非コンパクトな曲がった時空である。このような時空を取り扱うことは以前はあまり盛んでは無かったが、近年のAdS/CFT対応や、局所ミラー対称性、ブレイン世界などとのからみから重要な課題となっている。

## 1.1 弦理論と幾何学的描像

もともと、曲がった背景時空上の弦理論は、弦のコンパクト化から必要になったものである。超弦理論は、平らな背景時空上では、10次元の場合のみ無矛盾に定義出来る。一方、我々の世界は、4次元に見えるので残りの6次元は、見えないうようになっていなければならない。つまり次のような背景の上での弦理論を考えればよい。

$$\mathbb{R}^{3,1} \times M^6.$$

ここで、 $\mathbb{R}^{3,1}$  は我々に見える時空、 $M^6$  は6次元のコンパクトな多様体である。6次元のコンパクトな平らな多様体は、 $T^6$  しかないが、超弦理論を  $T^6$  でコ

コンパクト化した場合には超対称性が大きすぎて、現象論的には使えない。現象論的に望ましい 4 次元の  $\mathcal{N} = 1$  超対称性を得るためには、 $M^6$  として Calabi-Yau 多様体と呼ばれる曲がった多様体を使わなければならない。このように、一般に  $M^6$  としては、曲がった多様体を考えるべきである。

さて、上のような背景の上の弦の世界面の理論は、次のような作用であらわされる。

$$S = S_{\text{時空}} + S_{\text{内部}}. \quad (1.1)$$

ここで  $S_{\text{時空}}$  は、通常の平らな時空をターゲットとする線型シグマ模型で自由場の理論である。一方、 $S_{\text{内部}}$  は、曲がった空間をターゲットとする非線型シグマ模型で、おおざっぱに言って次のような形である。

$$S_{\text{内部}} = \frac{1}{\alpha'} \int d^2\sigma G_{MN}(X) \partial^a X^M \partial_a X^N.$$

ここで、 $\alpha'$  は、世界面上のプランク定数、 $G_{MN}(X)$  は、時空の計量である。この模型では平らな時空の場合と異なり、 $G_{MN}$  が  $X$  の関数であるために世界面上の理論が、相互作用を含む理論となっている。したがって、発散や繰り込み等、通常の場合の理論の複雑さが当然あり、「量子補正」によって  $S_{\text{内部}}$  が変形を受ける、つまり内部空間が通常我々のイメージする幾何学的なもので無くなってしまふことになる。

このような興味深い現象は、粒子の世界線の上の理論では起こらないことに注意してほしい。普通の量子力学には「発散」はないので、作用の変形は起こらない。上のような空間の概念の変更は弦になって初めて起こることである。

さて、上で述べたように曲がった空間の上での弦理論は、非常に興味深いものであるが、一方で非線形シグマ模型という非常に非自明な理論であるためにその解析は非常に困難である。例えば、 $\alpha'$  による摂動等の方法しかない。

ここまで述べてきた内部空間を非線型シグマ模型で書くという方法の他に次のような方法がある。平らな空間の場合に時空が 10 次元でなければならなかったのは、世界面の意味で共形アノマリーが 0 になるためである。このことを考えると、内部空間は必ずしも「空間」である必要はない。つまり、適当な 2 次元の共形場理論を持ってきて共形アノマリーを 0 にすればよいわけである。この際、例えばこの「適当な 2 次元の理論」として可解な 2 次元の理論を持ってくれば世界面の理論は解析可能である。まとめると、世界面の理論としては、作用 (1.1) で  $S_{\text{内部}}$  としては、2 次元の共形場理論で中心電荷が 9 であるものをとることができる。



上のような模型の代表的な例は Gepner 模型 [1] であり、これは  $S_{\text{内部}}$  として  $\mathcal{N} = 2$  のミニマル模型と呼ばれる解ける共形場理論の直積をもってきた模型である。Gepner 模型は一般に  $\mathcal{N} = 1$  の時空の超対称性がある。

さて、ここまでで 4 次元で  $\mathcal{N} = 1$  の超対称性をもつコンパクト化として 2 つのものを紹介した。1 つは Calabi-Yau コンパクト化、もう 1 つは、Gepner 模型である。この 2 つの模型は見た目が全く異なっている。Calabi-Yau コンパクト化は、非線型シグマ模型の作用で書けるようなものであり、一方、Gepner 模型は、 $\mathcal{N} = 2$  のミニマル模型をもちいて代数的に構成した模型である。この 2 つの模型に関して、実は次のようなことが一般に信じられている [2–5]。

ある種の Calabi-Yau のある特定の形のものは、その上での非線型シグマ模型と、ある Gepner 模型が等価である。

つまり、Calabi-Yau コンパクト化と Gepner 模型という全く見た目が異なる理論が同じということがあり得るわけである。特に Gepner 模型でかけられるような Calabi-Yau 多様体上の弦理論は、量子補正が非常に大きい部分であり、Gepner 模型は以前に述べた、幾何学的概念の変更の典型的な例である。

## 1.2 非コンパクト Calabi-Yau 多様体と Gepner 模型

本論で主にあつかうのは ALE 空間や conifold などの非コンパクトな多様体である。ここで非コンパクトな多様体上の弦理論を考える理由は次のようなものである。

- 小弦理論のホログラフィー。
- AdS/CFT 対応、 $\text{AdS}_3$  の弦理論。
- 局所ミラー対称性。

まず、小弦理論のホログラフィーであるが、これがもっとも直接的な動機である [6–9]。ALE 空間や conifold などの特異点をもつ非コンパクトな多様体で II 型弦理論のコンパクト化を考えたとき、この弦理論と、ある重力を含まない場の理論がホログラフィーの意味で対応しているといわれている。たとえば、ALE 空間でコンパクト化した弦理論と 6 次元の小弦理論とよばれる理論が対応している。

もう一つの興味深い例は conifold などの複素 3 次元 Calabi-Yau 特異点をあらわす非コンパクト多様体であり、対応する場の理論は Argyres-Douglas 固定点と呼ばれる 4 次元  $\mathcal{N} = 2$  超対称ゲージ理論の非自明な固定点での理論と考えられている。さらに複素 4 次元の非コンパクト Calabi-Yau 多様体でコンパクト化した場合、対応する場の理論は 2 次元の  $\mathcal{N} = 2$  の可解な共形場理論のまわりの理論になるといわれている。これらの対応を弦理論の世界面の量子補正を含めて調べるためには、これらの非コンパクトな Calabi-Yau 多様体上の弦理論を詳しく知ることが重要となる。

次の AdS/CFT 対応であるが、これは特に  $\text{AdS}_3$  と 2 次元共形場理論の場合に非常に関係が深い。世界面の立場からの  $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$  対応については、[10, 11] 他、たくさんの研究がある。非コンパクトな Calabi-Yau 多様体を記述する共形場理論の中には、 $\text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{U}(1)$  というモデルが現れるが、これには  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  WZW モデルの情報が含まれている。一方、 $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  WZW モデルは、 $\text{AdS}_3$  中の弦理論を記述するものである。このため AdS/CFT 対応と小弦理論のホログラフィーは深い関係にあると思われる。また、ホログラフィーを抜きにしても  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  WZW モデルは時間方向を含む曲がったモデルであるため、非自明で興味深い問題である。

最後の局所ミラー対称性とは、非コンパクトな Calabi-Yau 多様体に対するミラー対称性である。もともとミラー対称性はコンパクトな多様体でいわれていたものであるが、コンパクトな場合には多様体を閉じさせるために余分な困難がある。局所ミラー対称性は、多様体の局所的な構造のみを見るために簡単化され特異点のまわりの構造等の本質が見えやすくなる。幾何学的なミラー対称性は共形場理論のミラー対称性から発見されたものであり、非コンパクトな場合も共形場理論を詳しく調べることにより幾何学について理解が深まることが期待できる。

本論の構成は次のようなものである。まず第 2 章では共形場理論を復習する。特にあとで使うモジュラー不変性や境界がある場合の共形場理論について説明する。第 3 章では、小弦理論のホログラフィー、非コンパクト Calabi-Yau 多様体上の弦理論の記述、 $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  の表現などについて説明する。第 4 章、第 5 章では、非コンパクト Calabi-Yau 多様体の弦理論にたいして共形場理論の方法を用いて、モジュラー不変な分配関数を構成し、境界状態による D ブレインの解析とその幾何学的解釈を行う。第 6 章では、本論の結果のまとめと今後の展望について述べる。

## 第2章 共形場理論

弦理論の世界面上の理論は共形場理論になる。この章では、共形場理論について後の章で必要になる事柄を復習する。まず WZW 模型について復習しそれを例としてモジュラー不変性、境界のある共形場理論について説明する。最後にコセット構成、特に  $\mathcal{N} = 2$  ミニマル模型のコセット構成について説明する。この章を書くにあたっては、[12, 13] を参考にした。また アフィン Lie 代数については、[14, 15] を参考にした。

### 2.1 WZW 模型

この節では、WZW 模型について復習する。WZW 模型はもっとも典型的な有理共形場理論 (rational conformal field theory) であり、これを例にして次の節からモジュラー不変性、境界のある場の理論について説明する。

WZW 模型には、アフィン Lie 代数という対称性があり、このために解ける模型となっている。アフィン Lie 代数の説明のために有限次元 Lie 代数の言葉を使うがこれについては、付録 B にまとめた。

#### 2.1.1 WZW 模型とアフィン Lie 代数のカレント

WZW 模型は、群多様体  $G$  をターゲット空間とするシグマ模型であり、その作用は、次のように書ける。

$$S = \frac{k}{16\pi} \int d^2z \text{Tr}'[g^{-1} \partial_\mu g g^{-1} \partial^\mu g] - \frac{ik}{24\pi} \int_B d^3y \varepsilon^{ijk} \text{Tr}'[g^{-1} \partial_i g g^{-1} \partial_j g g^{-1} \partial_k g].$$

ここで、 $g = g(z, \bar{z}) \in G$  がシグマ模型の場合、 $z$  は、世界面  $\Sigma$  の座標、 $B$  は、 $\partial B = \Sigma$  となるような 3次元多様体、 $y^i$  は、 $B$  の座標である。また、 $\text{Tr}'$  は、 $\text{Tr}'[XY] = K(X, Y)$  となるように規格化したトレースである。ただし、 $K(X, Y)$  は、Killing 形式である。また  $k$  は、レベルと呼ばれる量でユニタリーな理論では、正の整数でなければならない。

この理論には、アフィン Lie 代数の対称性がある。アフィン Lie 代数は、次のようなカレントであらわされる。

$$J(z) := -k\partial g g^{-1},$$

$$\bar{J}(\bar{z}) := k g^{-1} \bar{\partial} g.$$

ここで、 $\partial = \partial/\partial z$ ,  $\bar{\partial} = \partial/\partial \bar{z}$  とする。

群  $G$  として、その Lie 代数  $\mathfrak{g}$  が単純なものを考えよう。このとき、この Lie 代数の生成子を  $t^a$ ,  $\text{Tr}[t^a t^b] = \delta^{ab}$  として、 $J^a(z), \bar{J}^a(\bar{z})$  を次の式で定義する。

$$J(z) = J^a(z)t^a, \quad \bar{J}(\bar{z}) = \bar{J}^a(\bar{z})t^a.$$

するとこれらの間の OPE は、

$$J^a(z)J^b(w) \sim \frac{k\delta^{ab}}{(z-w)^2} + \frac{if^{ab}_c J^c(w)}{z-w}, \quad (2.1)$$

となる。 $\bar{J}^a(\bar{z})$  の間の OPE も同様であり、 $J^a(z)$  と  $\bar{J}^a(\bar{z})$  の間の OPE は正則 (regular) である。この対称性は、左まわりと右まわりが完全に分かれているので、しばらくのあいだ左回りの方だけ考えることにする。

アフィン Lie 代数をモード  $J^a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n^a z^{-n-1}$  の交換関係で書くと

$$[J_m^a, J_n^b] = if^{ab}_c J_{m+n}^c + km\delta^{ab}\delta_{m+n,0},$$

となる。

一方 WZW 模型のエネルギー運動量テンソルは、Sugawara 構成によってカレントから構成され、

$$T(z) = \frac{1}{k+h^\vee} J^a(z)J^a(z),$$

であらわされる。ここで、 $h^\vee$  は、 $\mathfrak{g}$  の双対 Coxeter 数である。このエネルギー運動量テンソルの中心電荷は、

$$c = \frac{k \dim G}{k+h^\vee},$$

である。

あとで表現論等を考える際に便利なのは、Weyl-Cartan 基底である。Weyl-Cartan 基底でアフィン Lie 代数を書き直しておくと、

$$\begin{aligned}
 [H_m^I, H_n^J] &= \delta^{IJ} \delta_{m+n} m k, \\
 [H_m^I, E_n^\alpha] &= \alpha^I E_{m+n}^\alpha, \\
 [E_m^\alpha, E_n^\beta] &= \begin{cases} \frac{2}{|\alpha|^2} \alpha \cdot H_{m+n} + \frac{2}{|\alpha|^2} \delta_{m+n} m k & (\alpha = -\beta) \\ \mathcal{N}_{\alpha, \beta} E_{m+n}^{\alpha+\beta} & (\alpha + \beta \in \Delta), \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \\
 [L_0, J_n] &= -n J_n, \quad (J_n = H_n^i, E_n^\alpha), \tag{2.2}
 \end{aligned}$$

となる。ここでは特に  $L_0$  も代数の中に入れておく。

### 2.1.2 可積分最高ウェイト表現と指標

ここでは、アフィン Lie 代数 (2.2) の表現について考える。物理的な要請から、ユニタリーで「エネルギー」  $L_0$  に下限がある表現を考える。

この表現は、次のような最高ウェイト状態  $|\lambda\rangle$  からつくられるものである。

$$E_n^\alpha |\lambda\rangle = H_n^I |\lambda\rangle = 0, \quad (n > 0),$$

$$E_0^\alpha |\lambda\rangle = 0, \quad (\alpha \in \Delta_+),$$

$$H_0^I |\lambda\rangle = \lambda^I |\lambda\rangle.$$

この状態に「生成演算子」  $E_0^{-\alpha}$ ,  $(\alpha \in \Delta_+)$  および  $E_{-n}^\alpha, H_{-n}^I$ ,  $(n > 0)$  をかけていってヌル状態を抜くことにより表現のモジュールができる。このようにしてできた表現がユニタリーになるのはどのような場合かを考えよう。まず、0 モード  $E_0^\alpha, H_0^I$  の作っている有限次元代数  $\mathfrak{g}$  の表現としてユニタリーにならなければならないので、

$$\lambda \in P_+ \tag{2.3}$$

でなければならない。ここで、 $P_+$  は、 $\mathfrak{g}$  の優ウェイト全体である。また、最高ウェイト状態に最高ルート  $\theta$  に対応する生成子の演算子をかけてできる状態  $E_{-1}^\theta |\lambda\rangle$

のノルムを考える。

$$\langle \lambda | E_{+1}^{-\theta} E_{-1}^{\theta} | \lambda \rangle = \langle \lambda | [E_{+1}^{-\theta}, E_{-1}^{\theta}] | \lambda \rangle = \langle \lambda | (-\theta^I H^I + k) | \lambda \rangle = \{ -(\theta|\lambda) + k \} \langle \lambda | \lambda \rangle$$

このノルムが正であるためには、

$$(\theta|\lambda) \leq k \quad (2.4)$$

でなければならない。式 (2.3) と式 (2.4) をみたす  $\lambda$  全体を  $P_+^k$  と書くことにする。実は次の事実が知られている。

$\lambda \in P_+^k$  とのとき、 $|\lambda\rangle$  からできる最高ウェイト表現は、ユニタリーである。

このような表現を「可積分最高ウェイト表現」と呼ぶ。このような表現の種類、つまり  $\lambda \in P_+^k$  となる  $\lambda$  の数は、有限個しかないことに注意してほしい。

このような可積分最高ウェイト表現の共形次元  $h_\lambda$  は Weyl ベクトル  $\rho$  を使って、

$$h_\lambda = \frac{(\lambda|\lambda + 2\rho)}{2(k + h^\vee)}, \quad (2.5)$$

であらわされる。

このような可積分最高ウェイト表現のモジュール  $\mathcal{H}_\lambda^{(k)}$  の特徴付けとしてモジュールの指標が便利である。モジュールの指標は、 $\tau \in \mathbb{C}, \text{Im } \tau > 0, \zeta \in \mathfrak{h}^\mathbb{C}, u \in \mathbb{C}$  の関数で

$$\chi_\lambda^{(k)}(\tau, z, u) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_\lambda^{(k)}} \left( e \left[ \tau \left( L_0 - \frac{c}{24} \right) + \zeta^I H^I - ku \right] \right)$$

として定義する。ただしここで記号  $e[x] := \exp(2\pi i x)$  を使った。この指標の具体的な形は、次のようになることが知られている (Weyl-Kac の指標公式)。

$$\chi_\lambda^{(k)}(\tau, \zeta, u) = \frac{\sum_{w \in W} \epsilon(w) \Theta_{w(\lambda + \rho)}^{(k+h^\vee)}(\tau, \zeta, u)}{\sum_{w \in W} \epsilon(w) \Theta_{w(\rho)}^{(h^\vee)}(\tau, \zeta, u)}.$$

ここで、 $\Theta_\lambda^{(k)}(\tau, \zeta, u)$  は、 $\mathfrak{g}$  の古典的テータ関数で次のように定義されている。

$$\Theta_\lambda^{(k)}(\tau, \zeta, u) := e[-ku] \sum_{\alpha^\vee \in Q^\vee} e \left[ \frac{1}{2} \tau k |\alpha^\vee + \lambda/k|^2 - k(\alpha^\vee + \lambda/k|\zeta) \right].$$

なお今後、記号として、

$$\chi_\lambda^{(k)}(\tau, \zeta) := \chi_\lambda^{(k)}(\tau, \zeta, u = 0), \quad \chi_\lambda^{(k)}(\tau) := \chi_\lambda^{(k)}(\tau, \zeta = 0, u = 0),$$

を使う。

これらの指標は、表現を調べるのに役立つ、またその構成方法から分かるように分配関数を作る時に非常に重要である。

### 2.1.3 アフィン SU(2) の場合の例

ここでは、上で述べたことを SU(2) を例として説明する。アフィン SU(2) の記号、特に古典テータ関数は本論の残りの部分で非常によく使う。SU(2) の場合有限次元 Lie 代数のルート系は、

$$\mathfrak{h} \cong \mathbb{R}, \quad \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}, \quad \alpha_1 = \alpha_1^{\vee} = \theta = \sqrt{2},$$

$$(\alpha_1 | \alpha_1) = 2, \quad w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad h^{\vee} = 2,$$

となる。優ウェイトは、

$$P_+ = \{\ell w_1 \mid \ell = 0, 1, 2, \dots\},$$

ここで  $\ell$  は Dynkin ラベルである。レベル  $k$  のときの可積分最高ウェイトは、

$$P_+^k = \{\ell w_1 \mid \ell = 0, 1, \dots, k\}$$

余ルート格子は、

$$Q^{\vee} = \sqrt{2}\mathbb{Z},$$

であり、このことから  $\zeta = z$  として SU(2) 古典テータ関数は、

$$\Theta_{\ell,k}(\tau, z, u) := \Theta_{\lambda=\ell w_1}^{(k)}(\tau, \zeta, u) = e[-ku] \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{k(n+\frac{\ell}{2k})^2} y^{k(n+\frac{\ell}{2k})},$$

となる。ここで、 $q := e[\tau], y := e[z]$  である。SU(2) の Weyl 群は、 $\mathbb{Z}_2 = \{1, s_1\}$ 、 $s_1(\lambda) = -\lambda$ 、双対 Coxeter 数  $h^{\vee} = 2$  なので、アフィン SU(2) の指標は、次のようになる。

$$\chi_{\ell}^{(k)}(\tau, z, u) = \frac{\Theta_{\ell+1,k+2}(\tau, z, u) - \Theta_{-(\ell+1),k+2}(\tau, z, u)}{\Theta_{1,2}(\tau, z, u) - \Theta_{-1,2}(\tau, z, u)}.$$

この指標は、あとで  $\mathcal{N} = 2$  ミニマル模型の指標を求めるときに使う。

## 2.2 モジュラー不変性

2.1 節では、WZW 模型の左回りセクターのみを扱って対称性の代数の表現を調べた。この節で議論するのは、左回りと右回りをどう組むかという問題である。この問題に対してトーラス上の分配関数のモジュラー不変性を要求することにより組み方を決めるという方法をとる [16]。

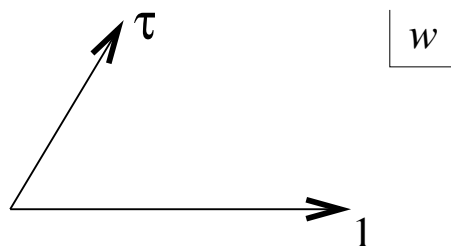


図 2.1: トーラスのモジュライパラメータ  $\tau$  の決め方。

### 2.2.1 トーラス上の分配関数

まず、トーラスについて考える。座標  $w$  であらわされる複素平面を

$$w \sim w + \omega_1, \quad w \sim w + \omega_2, \quad (\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}),$$

の同一視を行ってトーラスを作る。この  $\omega_1, \omega_2$  に共形場理論がどのように依存しているかを考えよう。まず、 $\omega_1, \omega_2$  を両方いっぺんに回転してもトーラスは全く変わらないので、この自由度を利用して  $\omega_1$  を実数にとることができる。また共形場理論なのでスケール変換をしても理論は変わらない。したがって、 $\omega_1 = 2\pi$  にとることが出来る。また、 $\omega_2 \rightarrow -\omega_2$  としても変わらないので  $\text{Im} \omega_2 > 0$  にとることが出来る。このようにとったときの  $\omega_2$  を  $2\pi\tau$  と書くことにする。結局トーラスは図 2.1 のように

$$w \sim w + 2\pi, \quad w \sim w + 2\pi\tau, \quad (\tau \in \mathbb{C}, \text{Im} \tau > 0),$$

であらわされる。ただしまだ残っている自由度があって、それは次の 2 つの変換から生成される  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$  である。

$$S : \tau \rightarrow -1/\tau, \quad T : \tau \rightarrow \tau + 1.$$

このような変換を行ってもトーラスの形は変わらないので理論は変わらないはずである。この  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$  変換のことをモジュラー変換と呼び、モジュラー変換に対して理論が不変という性質のことを「モジュラー不変性」と呼ぶ。

このトーラス上の分配関数を  $Z(\tau, \bar{\tau})$  とする。これは、通常通り経路積分の方法で定義できる。この定義では、モジュラー不変性は自明である。

一方、演算子形式で  $Z(\tau, \bar{\tau})$  をあらわすことも出来る。 $w$  の周期のうち 1 の方向を空間、 $\tau$  の方向を時間と思って演算子形式をつくとトーラスの分配関



数は、

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \text{Tr}[\exp(-2\pi H_\tau)],$$

$$H_\tau := \tau_1 P_1 + \tau_2 P_2, \quad \tau = \tau_1 + i\tau_2.$$

ただし、 $P_1$  は、 $w$  の実軸方向の推進の演算子、 $P_2$  は、虚軸方向の推進の演算子であり、円筒上の Virasoro の 0 モード  $L'_0, \bar{L}'_0$  を使って

$$P_1 = -i(L'_0 - \bar{L}'_0), \quad P_2 = L'_0 + \bar{L}'_0,$$

と書ける。これを使うと

$$H_\tau = -i\tau L'_0 + i\tau \bar{L}'_0,$$

となる。円筒上の Virasoro の代わりに平面上の Virasoro  $L_0, \bar{L}_0$  を使うと  $L'_0 = L_0 - c/24$ ,  $\bar{L}'_0 = \bar{L}_0 - c/24$  の関係から最終的に

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \text{Tr}[q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0 - c/24}],$$

の表式が得られる。ここで  $q = e[\tau]$  と定義した。この表式に対しては、モジュラー不変性は非常に非自明である。我々は、アフィン Lie 代数等の対称性の表現を使いたいので演算子形式が便利である。そこで演算子形式の無矛盾性の条件としてモジュラー不変性を考え、またそれをヒントにして「理論を構成する」ということを行う。

### 2.2.2 WZW 模型の分配関数

さて、ここでは WZW 模型を例にしてモジュラー不変な分配関数の構成について議論する。ここでは、WZW 模型しか扱わないが他の有理共形場理論も同様の取り扱いが出来る。

WZW 模型には、アフィン Lie 代数の対称性があるのでその Hilbert 空間は、アフィン Lie 代数の表現に次のように分解できる。

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\lambda, \bar{\lambda} \in P_+^k} N_{\lambda, \bar{\lambda}} \mathcal{H}_\lambda \otimes \mathcal{H}_{\bar{\lambda}}.$$

ここで、 $N_{\lambda, \bar{\lambda}}$  は、非負の整数であり、Hilbert 空間に  $N$  が掛かっているのは  $N$  回の直和を意味する。また、テンソル積の左と右はそれぞれ左回りモードと右ま

わりモードのモジュールである。もし、この Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  が分かれば理論のスペクトルが完全に分かったことになり、理論が解けたといえる。

さて、上の Hilbert 空間に対して分配関数を求めると、

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \text{Tr}_{\mathcal{H}}[q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0 - c/24}] = \sum_{\lambda, \bar{\lambda} \in P_+^k} N_{\lambda, \bar{\lambda}} \chi_{\lambda}^{(k)}(\tau) \bar{\chi}_{\bar{\lambda}}^{(k)}(\bar{\tau}),$$

となる。ここで、 $\chi_{\lambda}^{(k)}(\tau)$  は、前節で議論した指標である。

2.2.1 節で議論したように理論が無矛盾であるためには、この分配関数がモジュラー不変でなければならない。この分配関数のモジュラー変換性を議論するためには、指標のモジュラー変換性が必要である。ここで指標のモジュラー変換性についてまとめておこう。

$(\tau, \zeta, u)$  に対して  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$  の作用を次のように定義する

$$S : (\tau, \zeta, u) \rightarrow (-1/\tau, \zeta/\tau, u + |\zeta|^2/(2\tau)), \quad T : (\tau, \zeta, u) \rightarrow (\tau + 1, \zeta, u).$$

これは、 $\zeta = 0, u = 0$  のときは、トラスのモジュライパラメータのモジュラー変換と同じである。

この S 変換、T 変換に対してアフィン Lie 代数の指標は、次のような非常に美しい変換性を示す。

$$\begin{aligned} \chi_{\lambda}^{(k)}(\tau + 1, \zeta, u) &= e[h_{\lambda} - c/24] \chi_{\lambda}^{(k)}(\tau, \zeta, u), \\ \chi_{\lambda}^{(k)}(-1/\tau, \zeta/\tau, u + |\zeta|^2/(2\tau)) &= \sum_{\lambda' \in P_+^k} S_{\lambda, \lambda'}^{(k)} \chi_{\lambda'}^{(k)}(\tau, \zeta, u). \end{aligned}$$

ここで  $h_{\lambda}$  は (2.5) で与えられる共形次元、 $S_{\lambda, \lambda'}^{(k)}$  は、次のような形をしている。

$$S_{\lambda, \lambda'}^{(k)} = i^{|\Delta| + |P/Q^{\vee}| - 1/2} (k + h^{\vee})^{-r/2} \sum_{w \in W} \epsilon(w) e \left[ -\frac{(w(\lambda + \rho) | \lambda' + \rho)}{k + h^{\vee}} \right].$$

この S 行列は、ユニタリーで対称な行列である。

さて、これらのモジュラー変換性を使うと、 $Z(\tau, \bar{\tau})$  がモジュラー不変となる条件

$$Z(-1/\tau, -1/\bar{\tau}) = Z(\tau + 1, \bar{\tau} + 1) = Z(\tau, \bar{\tau}),$$

は、次のように書き直せる。

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda', \bar{\lambda}' \in P_+^{(k)}} N_{\lambda, \bar{\lambda}} S_{\lambda, \lambda'}^{(k)} \bar{S}_{\bar{\lambda}, \bar{\lambda}'}^{(k)} &= N_{\lambda', \bar{\lambda}'}, \quad \text{for } \lambda, \bar{\lambda} \in P_+^{(k)}, \\ h_{\lambda} - h_{\bar{\lambda}} &\in \mathbb{Z}, \quad \text{if } N_{\lambda, \bar{\lambda}} \neq 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

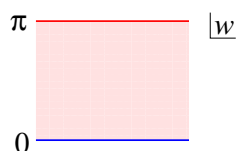


図 2.2: 開弦を考えるとときの帯。  $0 \leq \text{Im } w \leq \pi$  で定義する。

このような性質を満たす  $N_{\lambda, \bar{\lambda}}$  としては、例えば、

$$N_{\lambda, \bar{\lambda}} = \delta_{\lambda, \bar{\lambda}},$$

ととることができる。このようにとった場合の理論を「対角的理論」と呼ぶ。

対角的理論以外にも、モジュラー不変な  $N_{\lambda, \bar{\lambda}}$  のとりかたはたくさんあることが知られている。例えば、SU(2) WZW 模型の場合にはすべてのモジュラー不変な  $N_{\lambda, \bar{\lambda}}$  は、ADE 型に分類されている [17–19]。

## 2.3 境界のある場合の共形場理論

前節までで扱ったのは、円筒やトーラス上の共形場理論であり、弦理論で言えば閉弦の理論を記述する共形場理論である。一方、開弦の理論を扱うには境界のある世界面上の共形場理論を扱わなければならない。境界のある共形場理論の場合、境界条件をどう課すかが問題となる。開弦の端は、必ず D ブレインにくっついているので

$$\text{境界条件} = \text{D ブレイン}$$

である。

ここでも WZW 模型を例として境界のある共形場理論について議論する。その際、閉弦の場合のモジュラー不変性に対応するような開弦のスペクトルに対する条件「Cardy 条件」[20] がヒントとなる。

### 2.3.1 帯の上の共形場理論

開弦の世界面を 図 2.2 のように

$$w \in \mathbb{C}, \quad 0 \leq \text{Im } w \leq \pi$$

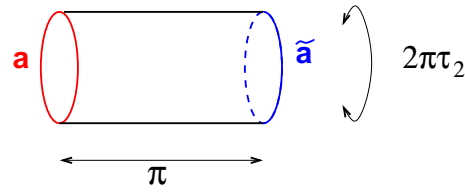


図 2.3: 円環の形。両端の間の距離を  $\pi$  としたとき円周を  $2\pi\tau_2$  とする。

であらわす。  $w = 0, \pi$  が境界である。演算子形式にするときは、  $w$  の虚軸方向を空間、実軸方向を時間とすることにする。

この帯の上の WZW 模型を考える。境界条件としては、ここでは WZW 模型のアフィン Lie 代数の対称性を尊重する、つまり左まわりと右回りのアフィン Lie 代数の適当な線型結合を残すようにとる。このとき開弦の理論は、アフィン Lie 代数の対称性をもっているなのでその Hilbert 空間はアフィン Lie 代数のモジュールで分解されるはずである。  $\text{Im } w = 0, \pi$  における境界条件を形式的に  $a, \tilde{a}$  と書くことにし、このような境界条件を課した理論の Hilbert 空間を  $\mathcal{H}_{a, \tilde{a}}$  と書くと、

$$\mathcal{H}_{a, \tilde{a}} = \bigotimes_{\lambda \in \mathfrak{q}_+^{(k)}} n_{a, \tilde{a}}^\lambda \mathcal{H}_\lambda^{(k)},$$

と分解できる。  $\mathcal{H}_\lambda^{(k)}$  は、アフィン Lie 代数のモジュールである。ここでの目的は次の2つである。

- ラベル  $a$  の分類。
- Hilbert 空間  $\mathcal{H}_{a, \tilde{a}}$  の決定、つまり係数  $n_{a, \tilde{a}}^\lambda$  の決定。

これらのことをおこなうヒントとなるのは分配関数である。開弦の分配関数は、  $w \sim w + 2\pi i\tau_2$ ,  $\tau_2 > 0$  の同一視を行った場合の円環 (図 2.3) の振幅であり、

$$Z_{a, \tilde{a}}(\tau) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_{a, \tilde{a}}} [q^{L_0 - c/24}] \quad (2.7)$$

$$= \sum_{\lambda \in \mathfrak{q}_+^{(k)}} n_{a, \tilde{a}}^\lambda \chi_\lambda^{(k)}(\tau), \quad (2.8)$$

となる。ここで、  $\tau = i\tau_2$ ,  $q = e[\tau]$  である。また、  $L_0$  は、上半平面上の Virasoro 代数の 0 モードで、残ったアフィン Lie 代数から Sugawara 構成で作ったものである。

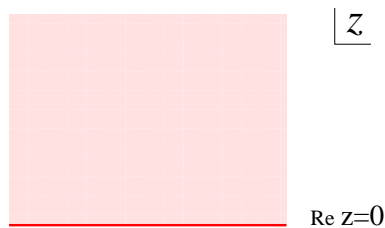


図 2.4: 上半平面。Im  $z = 0$  が境界となる。

まず、アフィン Lie 代数の対称性が半分残るための条件について調べよう。そのために帯から上半平面へつぎの写像でうつる (図 2.4)。

$$z = e^w$$

このとき境界は、Im  $z = 0$  になる。カレント  $J^a(z), \bar{J}^a(\bar{z})$  は、ひとつは残したいので、次のようなカレントに対する境界条件「貼り合わせ条件」をおく

$$J^a(z) = \Omega(\bar{J})^a(\bar{z}), \quad (\text{when } z = \bar{z}). \quad (2.9)$$

ここで、 $\Omega$  は、Lie 代数の自己同型である。このような貼り合わせ条件をおいたとき、残るアフィン Lie 代数のカレント  $J^a(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$  は次のように構成できる。

$$J^a(z) = \begin{cases} J^a(z) & (\text{Im } z \geq 0) \\ \Omega(\bar{J})^a(z^*) & (\text{Im } z \leq 0) \end{cases}.$$

ここで左辺の  $J^a(z)$  新しく  $z$  平面全体で定義されたカレント、右辺の  $J^a(z)$  は、もともと上半平面で定義されていたカレントである。上のように定義すれば貼り合わせ条件から正しい定義になっていて、しかもアフィン Lie 代数の OPE を満たす。

さて、(2.9) の貼り合わせ条件を満たす境界条件はどのようなものがあるかを見てみよう。これを見るためには開弦の描像から閉弦の描像に移ってみると見やすくなる。閉弦の描像では、境界は「境界条件」ではなく「境界状態」になる。このためには次のような共形変換で行った先の座標系にうつる。

$$z^{(C)} = \exp(i \log z), \quad \bar{z}^{(C)} = \exp(-i \log \bar{z})$$

このとき、 $z^{(C)}$  では、境界は、 $|z| = 1$  のところになっている。閉弦の描像で見えた場合のカレントは、

$$iz^{(C)} J^{a(C)}(z^{(C)}) = z J^a(z), \quad -i\bar{z}^{(C)} \bar{J}^{a(C)}(\bar{z}^{(C)}) = \bar{z} \bar{J}^a(\bar{z})$$

となる。閉弦の描像での貼り合わせ条件は、

$$J^{a(C)}(z^{(C)}) = -\Omega(\bar{J})^{a(C)}(\bar{z}^{(C)}), \quad (z\bar{z} = 1 \text{ において}),$$

となり、これをモードで書くと、

$$J_n^a = -\Omega(\bar{J})_{-n}^a,$$

となる。閉弦の描像では、境界は「状態」なので、貼り合わせ条件を課すことはこの状態に対して次のような条件を課すことである。

$$(J_n^a + \Omega(\bar{J})_{-n}^a)|B\rangle = 0. \quad (2.10)$$

つまり、開弦のときに無矛盾な境界条件を求めるという問題は、閉弦において式 (2.10) の条件を満たす無矛盾な境界状態を求めるという問題に帰着された。

式 (2.10) の条件を満たす状態の基底として Ishibashi 状態 [21] と呼ばれる状態がとれることが知られている。Ishibashi 状態とは、アフィン Lie 代数の表現のモジュール  $\mathcal{H}_\lambda^{(k)}$  についてひとつ決まる閉弦の状態で、具体的には次のようにならわされる。

$$|\lambda\rangle = \sum_n |n, \lambda\rangle \otimes U|n, \lambda\rangle.$$

ここで、 $|n, \lambda\rangle$  は、 $\in \mathcal{H}_\lambda^{(k)}$  の正規直交基底、 $U$  は、反ユニタリー演算子で

$$U\bar{J}_n^a U^{-1} = \Omega^{-1}(\bar{J})_{-n}^a, \quad U|\lambda\rangle = |\Omega(\lambda)\rangle,$$

を満たす演算子である。この Ishibashi 状態が (2.10) を満たすことは実際に確かめることができる。

この Ishibashi 状態 2 つの間の振幅 (円環) は、

$$\begin{aligned} \langle\langle \lambda' | \tilde{q}^{\frac{1}{2}H^{(C)}} | \lambda \rangle\rangle &= \chi_\lambda^{(k)}(\tilde{\tau}) \delta_{\lambda, \lambda'}, \\ H^{(C)} &:= L_0 + \bar{L}_0 - c/12. \end{aligned} \quad (2.11)$$

ただし、 $\tilde{q}$  は、円環の形で決まるパラメータで、次のように定義した (図 2.5)。円周の長さを  $2\pi$  としたときの端から端までの長さを  $\tilde{\tau}_2$ 、これを使って  $\tilde{\tau} := i\tau_2$ 、 $\tilde{q} := e[\tilde{\tau}]$  とした。

実際の理論では、上のすべての Ishibashi 状態が使えるわけではない。 $|\lambda\rangle$  は、 $\mathcal{H}_\lambda^{(k)} \times \mathcal{H}_{\Omega(\lambda)}^{(k)}$  の中の状態の足し合わせでできている。このような状態が閉弦のスペ

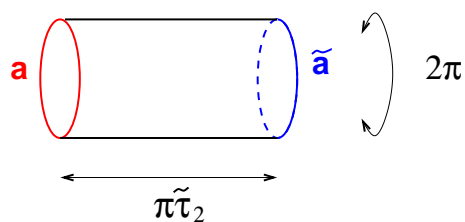


図 2.5: 閉弦の描像から見た円環。円周の長さを  $2\pi$  としたときの端から端までの長さを  $\tilde{\tau}_2$  とした。  $\tilde{\tau}_2 = 1/\tau_2$  とすれば、開弦の円環 (図 2.3) と同じ形になる。

クトルにあるものしか使えない。前節の分配関数の係数  $N_{\lambda, \tilde{\lambda}}$  に対して、  $N_{\lambda, \Omega(\lambda)} \neq 0$  となる  $\lambda$  全体の集合を  $\mathcal{E}$  とする。例えば対角理論で  $\Omega$  が恒等変換 のとき  $\mathcal{E} = P_+^k$  である。この集合を使うと  $\lambda \in \mathcal{E}$  のとき、  $|\lambda\rangle$  は使える Ishibashi 状態である。

上で決めた Ishibashi 状態を使って境界条件  $a$  に対応する境界状態を

$$|a\rangle := \sum_{\lambda \in \mathcal{E}} B_\lambda^a |\lambda\rangle, \quad (2.12)$$

と線形結合で書く。このとき  $B_\lambda^a$  は何でも良いわけではない。これからこの  $B_\lambda^a$  に対する条件をもとめる。状態  $|a\rangle$  と  $\langle\tilde{a}|$  の間の円環振幅を求めてみよう。これは、式 (2.12) の表式を使って

$$\begin{aligned} \langle\tilde{a}|q^{\frac{1}{2}H^{(C)}}|a\rangle &= \sum_{\lambda, \tilde{\lambda} \in \mathcal{E}} B_{\tilde{\lambda}}^{\tilde{a}} * B_\lambda^a \langle\tilde{\lambda}|q^{\frac{1}{2}H^{(C)}}|\lambda\rangle \\ &= \sum_{\lambda \in \mathcal{E}} B_\lambda^{\tilde{a}} * B_\lambda^a \chi_\lambda^{(k)}(\tilde{\tau}) \end{aligned}$$

1 行目から 2 行目へは式 (2.11) を使った。これを開弦の描像に持っていくために 2 つの端の間の距離を  $\pi$  に固定したときの円周の長さ  $2\pi\tau_2$  として、  $\tau = i\tau_2$  を使って上の式を変形しよう。得られる式は、

$$\langle\tilde{a}|q^{\frac{1}{2}H^{(C)}}|a\rangle = \sum_{\lambda' \in P_+^k} \sum_{\lambda \in \mathcal{E}} B_\lambda^{\tilde{a}} * B_\lambda^a S_{\lambda\lambda'}^{(k)} \chi_{\lambda'}^{(k)}(\tau)$$

これを式 (2.8) と比較すると

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{E}} B_\lambda^{\tilde{a}} * B_\lambda^a S_{\lambda\lambda'}^{(k)} = n_{\tilde{a}a}^{\lambda'}, \quad (2.13)$$

この条件を「Cardy 条件」と呼ぶ。この意味は、  $B_\lambda^a$  をとってきて左辺を計算したとき正の整数になるようにしなければならないということである。

式 (2.13) の解は、対角理論で  $\Omega$  が恒等変換のときは Cardy 自身によって求められている。まず、 $\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}} \in P_+^k$  にとり、

$$B_\lambda^{\mathbf{a}} = \frac{S_{\mathbf{a}\lambda}^{(k)}}{\sqrt{S_{0\lambda}^{(k)}}},$$

とすればよい。このとき

$$\begin{aligned} n_{\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{a}}^{\lambda'} &= \sum_\lambda \frac{S_{\mathbf{a}\lambda}^{(k)} S_{\tilde{\mathbf{a}}\lambda}^{(k)*} S_{\lambda\lambda'}^{(k)}}{S_{0\lambda}^{(k)}} \\ &= N_{\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{a}}^{\lambda'}. \end{aligned}$$

ここで、 $N_{\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{a}}^{\lambda'}$  は、fusion 係数と呼ばれている数で、正の整数である。1 行目から 2 行目へは、fusion 係数に対する Verlinde の公式を使った。

このようにして、境界条件 (D ブレイン) の種類とその間をつなぐ開弦のスペクトルが完全に求まった。

対角理論以外の有理共形場理論の境界条件については、[22] で分類されている。後に使う Gepner 模型の境界条件は、[23] で詳しく調べられている。

## 2.4 コセット構成

WZW 模型が共形場理論の中で重要なのは、多くの有理共形場理論が WZW 模型からコセット構成と呼ばれる方法を用いて作れるからである。ここでは、コセット構成の方法を説明し、その特別な場合としてあとで使うことになる  $\mathcal{N} = 2$  ミニマル模型について説明する。

### 2.4.1 GKO コセット

2 つの有限次元 Lie 代数  $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ 、があって  $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}'$  のように部分代数になっていたとする。このときレベル  $k$  アフィン  $\mathfrak{g}$  の部分代数としてアフィン  $\mathfrak{g}'$  を埋め込むことが出来る。これを詳しく見てみることにする。

アフィン  $\mathfrak{g}$  のカレントを直交基底で  $J^a(z)$ 、そのうち  $\mathfrak{g}'$  に属するものを  $J^{a'}(z)$



、それ以外のものを  $J^{a''}$  と書く。  $\mathfrak{g}$  の Sugawara エネルギー-運動量テンソルは、

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{1}{k+h^\vee} J^a(z) J^a(z) \\ &= T''(z) + T'(z), \\ T'(z) &:= \frac{1}{k+h^\vee} J^{a'}(z) J^{a'}(z), \\ T''(z) &:= \frac{1}{k+h^\vee} J^{a''}(z) J^{a''}(z), \end{aligned}$$

と書く。ここで、 $T'$  は、あるレベルのアフィン  $\mathfrak{g}'$  のエネルギー-運動量テンソルであることに注意する。このレベルは埋め込み指数と呼ばれる正の整数  $x$  を使って、 $xk$  と書ける。この分解に関して OPE

$$T''(z) J^{a'}(w) \sim 0,$$

が成り立つことが実際の計算で確かめることができる。つまり、 $T'$  が定義する  $\mathfrak{g}'$  WZW 模型と  $T''$  が定義する模型は、独立である。この  $T''$  が定義する模型を「コセット模型」と呼ぶ。

このコセット模型の Hilbert 空間について調べよう。レベル  $k$  アフィン  $\mathfrak{g}$  とレベル  $xk$  アフィン  $\mathfrak{g}'$  の埋め込み関係があるので、レベル  $k$  アフィン  $\mathfrak{g}$  の表現をレベル  $xk$  アフィン  $\mathfrak{g}'$  の表現で分解することができる。この分解の時の係数は、一般に無限であり、これを次のように Hilbert 空間であらわす。 $\mathcal{H}_\Lambda$  をアフィン  $\mathfrak{g}$  のモジュール、 $\mathcal{H}'_\lambda$  をアフィン  $\mathfrak{g}'$  のモジュールとして次のような「モジュール」  $\mathcal{H}'_{\lambda,\Lambda}$  が存在する。

$$\mathcal{H}_\Lambda = \bigoplus_{\lambda} \mathcal{H}_{\Lambda,\lambda} \otimes \mathcal{H}'_{\lambda} \quad (2.14)$$

この  $\mathcal{H}_{\Lambda,\lambda}$  をコセット模型のモジュールと呼ぶことにしよう。この  $\mathcal{H}_{\Lambda,\lambda}$  には、実際  $T''$  が作用している。そこでこのモジュールの指標を

$$\chi_{\Lambda,\lambda}(\tau) := \text{Tr}_{\mathcal{H}_{\Lambda,\lambda}} [q^{L''_0 - c''/24}],$$

で定義する。 $L''_0, c''$  は、それぞれ  $T''$  の 0 モードと中心電荷である。式 (2.14) から指標の間に

$$\chi_{\Lambda}^{(k)}(\tau, \zeta) := \sum_{\lambda \in P'_+} \chi_{\Lambda,\lambda}(\tau) \chi'_{\lambda}{}^{(xk)}(\tau, \zeta), \quad (2.15)$$

という分岐関係がある。ここで、 $\chi_{\Lambda}^{(k)}(\tau, \zeta)$  は、アフィン  $\mathfrak{g}$  の指標、 $\chi_{\lambda}^{(xk)}(\tau, \zeta)$  は、アフィン  $\mathfrak{g}'$  の指標である。また、ここでは、 $\zeta$  は、 $\mathfrak{g}'$  の Cartan 部分代数の中に含まれるとする。

分岐条件 (2.15) から  $\chi_{\Lambda, \lambda}(\tau)$  のモジュラー変換性を読むことができ、これを使ってモジュラー不変な分配関数の構成や、境界状態などを普通の WZW 模型の場合と同様に議論することができる。

## 2.4.2 $\mathcal{N} = 2$ ミニマル模型

コセット構成の例としてあとで使う  $\mathcal{N} = 2$  ミニマル模型を見てみることにする。この  $\mathcal{N} = 2$  ミニマル模型は Kazama-Suzuki 模型 [24] と呼ばれる  $\mathcal{N} = 2$  超共形対称性をもつコセット模型の最も簡単な場合である。 $\mathcal{N} = 2$  ミニマル模型は、

$$\frac{\mathrm{SU}(2)_k \times \mathrm{SO}(2)_1}{\mathrm{U}(1)}$$

のコセット模型であらわされる。 $\mathrm{SU}(2)_k$  の指標を  $\chi_{\ell}^{(k)}(\tau, z)$ ,  $\ell = 0, \dots, k$ ,  $\mathrm{SO}(2)_1$  の指標を  $\chi_s^{\mathrm{SO}(2)}(\tau, z)$ ,  $s = 0, 1, 2, 3$ ,  $\mathrm{U}(1)$  (レベル  $k+2$ ) の指標を  $\chi_m^{\mathrm{U}(1)}(\tau, z)$ ,  $m \in \mathbb{Z}_{2(k+2)}$  としたとき、分岐関係は、

$$\chi_{\ell}^{(k)}(\tau, w) \chi_s^{\mathrm{SO}(2)}(\tau, w - z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_{2(k+2)}} \chi_m^{\ell, s}(\tau, z) \chi_m^{\mathrm{U}(1)}(\tau, w - 2z/(k+2)),$$

となる。この  $\chi_m^{\ell, s}(\tau, z)$  が  $\mathcal{N} = 2$  ミニマル模型の指標である。 $\chi_s^{\mathrm{SO}(2)}(\tau, z)$ 、 $\chi_m^{\mathrm{U}(1)}(\tau, z)$  は、 $\mathrm{SU}(2)$  古典テータ関数  $\Theta_m^{(k)}(\tau, z) =: \Theta_{m, k}(\tau, z)$  をつかって

$$\chi_s^{\mathrm{SO}(2)}(\tau, z) = \frac{\Theta_{s, 2}(\tau, z)}{\eta(\tau)}, \quad \chi_m^{\mathrm{U}(1)}(\tau, z) = \frac{\Theta_{m, k+2}(\tau, z)}{\eta(\tau)},$$

と書けるので、結局ミニマル模型の指標は、

$$\chi_{\ell}^{(k)}(\tau, w) \Theta_{s, 2}(\tau, w - z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_{2(k+2)}} \chi_m^{\ell, s}(\tau, z) \Theta_{m, k+2}(\tau, w - 2z/(k+2)),$$

で定義される。まとめると  $\mathcal{N} = 2$  のモジュールは 3 つの整数  $\ell, m, s$  でラベルされ、

$$\ell = 0, \dots, k, \quad m \in \mathbb{Z}_{k+2}, \quad s \in \mathbb{Z}_4,$$

の範囲を動く。ただしここでは述べなかったが、分解のときの選択条件

$$\ell + s + m \equiv 0 \pmod{2},$$

および同一視

$$(\ell, m, s) \sim (k - \ell, m + k + 2, s + 2)$$

を課す。



## 第3章 小弦理論のホログラフィーと 非コンパクト Gepner 模型

この章では、小弦理論と呼ばれる理論のホログラフィー的記述について述べる [6–9]。小弦理論とは、もともと II 型弦理論の NS5 ブレイン上の理論である。この NS5 ブレインの T 双対を考えることにより、一般に特異点を持つ Calabi-Yau 多様体上の弦理論で記述できる。このような特異点を持つような Calabi-Yau 多様体では、特異点の性質が理論を決定するので特異点のまわりのみをとってきた錐を考えればよい。

この錐の上を動く弦の世界面の理論を Landau-Ginzburg 理論で表し、さらに  $\mathcal{N} = 2$  ミニマル模型と  $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  Kazama-Suzuki 模型を用いた、Gepner 模型のような記述を考える。このような  $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  Kazama-Suzuki 模型を含む模型を「非コンパクト Gepner 模型」と呼ぶことにする。

### 3.1 NS5 ブレインと ALE

もともと小弦理論は、II 型弦理論における NS5 ブレイン上の場の理論として定義される。ただ、一般にブレイン上の理論はバルクの理論と結合しているので、このバルクの理論との結合を切り離すような極限を考える。つまり、小弦理論とは次のように定義される。

IIA 型 (IIB 型) 弦理論において  $N$  枚重なった NS5 ブレインのある背景を考え、弦の結合定数を 0 にする極限  $g_s \rightarrow 0$  をとったときにブレイン上に残る理論。

この小弦理論は NS5 ブレイン上の理論であり、6 次元の理論なのでこれまでに知られている繰り込み可能な場の理論ではあり得ない。小弦理論は、6 次元の理論の相空間における非自明な共形固定点上の理論であると考えられている。

だが、NS5 ブレインは弦理論においてあまりよく分かっていない物体なのでもう少し調べやすいように次のようなことを考える。NS5 ブレインに垂直な方向

の1つを  $S^1$  にコンパクト化する。このとき NS5 ブレインは、巻き付きモードに対する磁荷となる。ここで、このコンパクト化した方向に T 双対をとることを考える。T 双対は、巻き付きモードと Kaluza-Klein モードを入れ替えるので NS5 ブレインの T 双対は、Kaluza-Klein モードに対する磁荷、つまり Kaluza-Klein モノポールとなる。Kaluza-Klein モノポールは純粋に幾何学的な物体であり、Taub-NUT と呼ばれる多様体で表される。

さて、 $N \geq 2$  のとき、 $N$  枚完全に重なった NS5 ブレインの T 双対となる Taub-NUT 多様体は特異点を持つ。小弦理論を調べるために  $g_s \rightarrow 0$  の極限を考えてみると特異点以外のところの理論は、完全に自由な理論となってしまう結合がなくなる。ところが特異点の上ではそうとは限らないで非自明な理論が残ることがあり得る。この理論は特異点の性質にのみ依存しているので特異点のまわりのみ考えれば十分である。

今の設定における Taub-NUT の特異点は  $A_{N-1}$  型特異点と呼ばれる。この特異点の近傍のみを考えるとそれは、 $A_{N-1}$  型 ALE 空間というものになっている。これを利用して小弦理論の定義を次のようにすることも出来る。

$A_{N-1}$  型 ALE 空間による「コンパクト化」 $\mathbb{R}^{5,1} \times (\text{ALE})$  を考えて、 $g_s \rightarrow 0$  の極限をとったとき特異点上に残る理論。

このような定義を使うとほかの特異点をもつ Calabi-Yau 多様体の場合への拡張も出来る。特に複素3次元 Calabi-Yau 多様体を使った4次元へのコンパクト化では、Argyres-Douglas 固定点と呼ばれる共形固定点上の4次元の超共形場理論が現れると考えられている。また、Calabi-Yau 4-fold を使った2次元へのコンパクト化では、2次元の  $\mathcal{N} = 2$  ミニマル模型や Kazama-Suzuki 模型が現れると考えられている。

ここでは、まず NS5 ブレインの T 双対や ALE 空間について 超重力理論の解や計量、代数方程式による記述などを使って見てみることにする。

### 3.1.1 超重力理論の解

この NS5 ブレインのある背景は、T 双対をとることによって、Taub-NUT 空間と呼ばれる純粋に幾何学的な空間になる。これについて低エネルギーの超重力理論の古典解の立場から少し見てみよう。

NS5 ブレインの配位は次の表 3.1 ようなものとする。ここでは、T 双対をと

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
NS5	○	○	○	○	○	○	×	×	×	×

表 3.1: NS5 ブレインの配位

るために 9 方向は  $S^1$  にコンパクト化しておく。II 型弦理論の NS5 ブレインの解では、NSNS 場と呼ばれる計量  $G_{MN}$ 、2 階反対称テンソル場  $B_{MN}$ 、およびディラトン  $\Phi$  のみが非自明な値をとる。超重力理論の作用でこれらの場を含む部分は、

$$S_{SUGRA} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} e^{-2\Phi} \left[ R + 4(\partial\Phi)^2 - \frac{1}{12}H^2 \right],$$

$$(\partial\Phi)^2 = G^{MN} \partial_M \Phi \partial_N \Phi,$$

$$H = dB, \quad H^2 = G^{M_1 N_1} G^{M_2 N_2} G^{M_3 N_3} H_{M_1 M_2 M_3} H_{N_1 N_2 N_3},$$

となる。表 3.1 の NS5 ブレインの古典解は、

$$ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_5^2 + f(r) [dx_6^2 + \cdots + dx_9^2],$$

$$e^{2\Phi} = e^{2\Phi_0} f(r),$$

$$H_{ij9} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ij}{}^k \partial_k \log f(r),$$

$$f(r) = 1 + \frac{N}{r}, \quad r = \sqrt{x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}, \quad (3.1)$$

であたえられる。

さて、この古典解を  $x^9$  方向に T 双対をとることを考えよう。すると計量のみが非自明な値をもち、

$$ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_5^2 + f(r)(dx_6^2 + dx_7^2 + dx_8^2) + f(r)^{-1} \left( \frac{1}{R^2} dx_9^2 + \cos \theta d\varphi \right)^2$$

という形になる。ただし、 $x_6, \dots, x_8$  の極座標表示

$$x_6 = r \sin \theta \cos \varphi,$$

$$x_7 = r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$x_8 = r \cos \theta,$$

を使った。この解では、計量  $G_{MN}$  のみが、非自明になっているので純粋に幾何学的な配位である。この解は、 $x_0, \dots, x_5$  が作る平らな空間と  $x_6, \dots, x_9$  が作る Taub-NUT 空間 (の特別な場合) の直積になっている。今の場合 Taub-NUT 空間には、 $r = 0$  のところに特異点があり、 $g_s \rightarrow 0$  の極限ではこの特異点の部分のみに理論が残る。この特異点の性質を見るために、 $r \rightarrow 0$  での計量を見てみよう。

$$ds_{ALE}^2 = \frac{N}{r} (dx_6^2 + dx_7^2 + dx_8^2) + \frac{r}{N} \left( \frac{1}{R^2} dx_9^2 + \cos \theta d\varphi \right)^2$$

この特異点は、ALE の特異点と呼ばれる。以降の議論では、複素空間の中の超曲面で表示するのが便利である。上の ALE 空間は、 $\mathbb{C}^3 = \{(z_1, z_2, z_3)\}$  の中の方程式

$$z_1^N + z_2^2 + z_3^2 = 0,$$

であらわされる超曲面となっている。

ここで述べた ALE 空間は、我々の調べたい Calabi-Yau の特異点の最も簡単な場合であり、以降たびたび例としてつかう。

## 3.2 特異点を持つ Calabi-Yau 多様体

### 3.2.1 超曲面

前節では、ALE 空間について述べたが、ここではそれをさらに一般化したものを考えよう。ここでは、複素  $n$  次元多様体  $X$  として、 $\mathbb{C}^{n+1} = (z_1, \dots, z_{n+1})$  の中の次のような代数方程式で表される超曲面を考える。

$$F(z_1, \dots, z_{n+1}) = 0.$$

ここでは  $F(z)$  として、準同次 (quasi-homogeneous) な多項式を考える。この準同次な多項式とは、ある  $r_1, \dots, r_{n+1}$  が存在して任意の  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$  に対して、

$$F(\lambda^{r_1} z_1, \dots, \lambda^{r_{n+1}} z_{n+1}) = \lambda F(z_1, \dots, z_{n+1}), \quad (3.2)$$

となるものである。ここで、これらの  $r_1, r_2, \dots$  をそれぞれ  $z_1, z_2, \dots$  の「重み」と呼ぶことにする。この言葉を使うと  $F$  の重みは 1 であると言える。



ここでは、さらに  $X$  が原点のみに特異点をもつ場合を考えたいので次のような条件を課す。特異点とは、

$$F(z) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z_i}(z) = 0, \quad i = 1, \dots, n+1 \quad (3.3)$$

となる点である。 $F$  としては原点のみでこの条件 (3.3) を満たすものを考える。

特異点について詳しく調べるために、特異点を少し変形して考える。つまり次のような超曲面  $\tilde{X}$  を考える。

$$0 = \tilde{F}(z) := F(z) + \mu, \quad \mu \text{ はある定数。}$$

さて、果たして上のような  $\tilde{X}$  には、Calabi-Yau 計量 (Ricci 平坦な Kähler 計量) が入るだろうか。これに関してある定理が知られている。その定理を述べるために次の「正則  $n$  形式」を定義する。

$$\Omega = \frac{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}{(\partial \tilde{F} / \partial z_{n+1})}.$$

これを超曲面上に引き戻したものを超曲面上の「正則  $n$  形式」とする。ここで、この  $\Omega$  の (3.2) における「重み」を  $r_\Omega$  とすると、

$$r_\Omega = \sum_{j=1}^{n+1} r_j - 1, \quad (3.4)$$

となる。この  $r_\Omega$  を使って、 $\tilde{X}$  上の Calabi-Yau metric に関して次の Tian-Yau の定理がある。

$$r_\Omega > 0, \quad (3.5)$$

のとき、 $\tilde{X}$  には、Calabi-Yau 計量が存在し、そのときの体積形式は、 $\Omega \wedge \bar{\Omega}$  となる。しかも原点から十分離れたところでは、計量の形は、

$$ds^2 = dr^2 + r^2 dx_\perp^2$$

のような「錐」の形になる。

ここで扱う Calabi-Yau 多様体はこの条件を満たすものとする。

まとめると、ここで考える特異点を持つ Calabi-Yau 多様体は、 $\mathbb{C}^n$  内の  $F(z) = 0$  で表される超曲面で次の条件を満たすものである。

- $F(z)$  は、準同次多項式（条件 (3.2)）。
- 原点のみに孤立特異点を持つ。
- $r_\Omega > 0$ 。

次の節では、この多様体の上の弦理論を考える。

### 3.2.2 非コンパクトな場合の Calabi-Yau – Landau-Ginzburg 対応

今考えている多様体は、 $\mathbb{C}^{n+1}$  中の超曲面で表されているが、[5] で述べられている Calabi-Yau – Landau-Ginzburg 対応を使うためにこれを無理矢理重みのついた射影空間  $\mathbb{WCP}$  中の超曲面として表すことを考える。変形された錐  $\tilde{X}$  は、 $\mathbb{C}^n = \{(z_1, \dots, z_{n+1})\}$  中の

$$F(z) + \mu = 0$$

であるが、これを  $\mathbb{WCP}^{n+1}(-r_\Omega, r_1, \dots, r_{n+1})$  中の超曲面として次のように表す。

$$F(x_1, \dots, x_{n+1}) + \mu x_0^{-1/r_\Omega} = 0.$$

ここで、 $\mathbb{WCP}^{n+1}(-r_\Omega, r_1, \dots, r_{n+1})$  の同次座標を  $(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$  とした。このとき、 $r_0 := -r_\Omega$  と定義すると、Calabi-Yau 条件

$$\sum_{j=0}^{n+1} r_j - 1 = 0,$$

を満たす。

[5] の Calabi-Yau – Landau-Ginzburg 対応を使うとこの  $\tilde{X}$  を記述する Landau-Ginzburg 理論の超ポテンシャルは、

$$W(X_0, X_1, \dots, X_{n+1}) = F(X_1, \dots, X_{n+1}) + \mu X_0^{-1/r_\Omega}, \quad (3.6)$$

となる。ここで、 $X_1, \dots, X_{n+1}$  はカイラル超場である。

### 3.2.3 ALE の場合の例

ここでは、3.2.2 節の Calabi-Yau – Landau-Ginzburg 対応の議論を  $A_{N-1}$  ALE の場合の例で調べてみる。 $A_{N-1}$  ALE の場合、特異点を持つ多様体  $X$  は、 $\mathbb{C}^3$  の中の超曲面として

$$0 = F(z_1, z_2, z_3) := z_1^N + z_2^2 + z_3^2,$$

として表される。このとき確かに、 $F(z_1, z_2, z_3)$  は準同次な多項式であり、 $z_1, z_2, z_3$  の重みは、

$$r_1 = 1/N, \quad r_2 = r_3 = 1/2,$$

である。式 (3.4) にしたがって正則 2 形式  $\Omega$  の重みを求めてみると、

$$r_\Omega = r_1 + r_2 + r_3 - 1 = 1/N > 0,$$

となって確かに条件 (3.5) を満たしている。したがって、 $F(z) + \mu = 0$  で表される変形された超曲面  $\tilde{X}$  には、期待される Calabi-Yau 計量が入る。

さて、Calabi-Yau – Landau-Ginzburg 対応を使うと ALE 中の非線形シグマ模型が Landau-Ginzburg 理論で書き直せる。このときの超ポテンシャル (3.6) は、

$$W(X_0, X_1, X_2, X_3) = \mu X_0^{-N} + X_1^N + X_2^2 + X_3^2,$$

となる。

この超ポテンシャルであらわされる Landau-Ginzburg 理論の低エネルギーの共形場理論は、超ポテンシャルの各項のあらかず理論の直積となる。 $X_1^N$  のあらかず低エネルギーの共形場理論は、レベルが  $(N-2)$  のミニマル模型である。また、 $X_2^2$  および  $X_3^2$  の各項は、それぞれ  $X_2, X_3$  の質量項であり、低エネルギーでは、 $X_2, X_3$  は、消えてしまう。別の見方をすれば  $X_2^2, X_3^2$  であらわされる低エネルギー理論はレベルが 0 のミニマル模型であり、これは自明な理論である。

では、 $X_0^{-N}$  の項のあらかず低エネルギー理論は果たして何であろうか。これについてこれから議論する。

### 3.2.4 負べきの Landau-Ginzburg 理論

超ポテンシャル (3.6) であらわされる理論を考えよう。この理論の低エネルギーの共形場理論は  $W = F(X_1, \dots, X_{n+1})$  であらわされる理論と  $W = X_0^{-1/r_\Omega}$  であ

らわされる理論の直積である。前者は定義から正べきのみを含む多項式であり、それは「コンパクトな」理論である。一方、後者の負べきであらわされるような理論は今考えている理論の「非コンパクト性」をあらわしていると考えられる。これを詳しく見てみよう。

非常に単純に考えると、 $W = X_0^{-N_0}$ 、 $N_0 = 1/r_\Omega$  は、レベルが  $(-N_0 - 2)$  のミニマル模型ということになる。この理論は、レベルが  $N_0 + 2$  の  $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  の Kazama-Suzuki 模型であると考えられている。この直観的な理由は、例えば中心電荷である。レベルが  $N$  のミニマル模型の中心電荷の値は、

$$c/3 = \frac{N - 2}{N}$$

で与えられるが、この式で形式的に  $N = -N_0$  とおいてみると、

$$c/3 = \frac{N_0 + 2}{N_0}$$

となるが、これはレベルが  $(-N_0 - 2)$  の  $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  Kazama-Suzuki 模型の中心電荷と同じである。また、 $\mathcal{N} = 2$  ミニマル模型は、 $SU(2)/U(1)$  の Kazama-Suzuki 模型と同じであるが、レベルが負の  $SU(2)$  は、 $SL(2, \mathbb{R})$  となると思われているのも一つの証拠である。

ここでは、これらの証拠から

$W = X_0^{-N_0}$  の超ポテンシャルをもつ Landau-Ginzburg 理論の低エネルギーの共形場理論は、レベルが  $(-N_0 - 2)$  の  $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  Kazama-Suzuki 模型である。

ということを仮定して話を進める。

さらに、この  $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  Kazama-Suzuki 模型は、 $\mathcal{N} = 2$  Liouville 理論と等しいと考えられている。これは、もともと超対称性が無い場合の  $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  理論と sine-Liouville 理論が等価だという仮説が [25] によって出された。この仮説の  $\mathcal{N} = 2$  超対称性のある場合についての拡張やその証拠などは、[8, 26, 27] によって調べられている。ここでは、次の仮定を認めて話しを進めることにする。

レベルが  $(-N_0 - 2)$  の  $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  Kazama-Suzuki 模型は、背景電荷  $Q^2 = 2/N_0$  をもつ  $\mathcal{N} = 2$  Liouville 理論と等価である。

これを認めると、次の3つの理論は、すべて等価である。

- $W = X_0^{-N_0}$  の超ポテンシャルをもつ Landau-Ginzburg 理論の低エネルギーの共形場理論

- レベルが  $(-N_0 - 2)$  の  $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  Kazama-Suzuki 模型
- 背景電荷  $Q^2 = 2/N_0$  をもつ  $\mathcal{N} = 2$  Liouville 理論

これらの記述にはそれぞれ一長一短あるが、本論では、主に  $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  Kazama-Suzuki 模型の記述を使うことにする。

まとめると、 $\mathbb{C}^{n+1}$  のなかで  $F(z) + \mu = 0$  の超曲面であらわされる非コンパクトな Calabi-Yau  $n$ -fold 上の弦理論の世界面の理論は、 $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  Kazama-Suzuki 模型と  $W = F(X)$  の超ポテンシャルをもつ Landau-Ginzburg 理論の積で記述できる。ただし実際の理論を作るためには右回りモードと左回りモードの組み方をモジュラー不変になるように組まなければならない。これについて次章および次々章で実際に構成し、出来上がった理論を調べてみることにする。特にこの理論が元の Calabi-Yau 上の弦理論に本当になっているかは興味あるところで、これが言えればこれまで行ってきた議論が正しいことの一つの証拠となる。

これらのことを行うに当たっては特に  $SL(2, \mathbb{R})$  の WZW 模型についての知識を必要とする。これについて次節で議論する。

### 3.3 アフィン $SL(2, \mathbb{R})$ の表現

非コンパクトな Calabi-Yau 多様体を扱う際に  $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  Kazama-Suzuki 模型があらわれたが、この理論を調べるためには  $SL(2, \mathbb{R})$  という非コンパクトな群の WZW 模型を考えなければならない。  $SL(2, \mathbb{R})$  WZW 模型は、時間方向が曲がった空間で最も扱いやすいものとして昔から研究されてきた [28–35]。この非コンパクトな群の WZW 模型は、「時間方向」を持ちユニタリーな理論にはなり得ないが、時間方向で割った理論  $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  はユニタリーにすることができる。

また、 $SL(2, \mathbb{R})$  WZW 模型は、 $AdS_3$  の中の弦理論にも現れるが、このときは、BRS 条件を課すことによりユニタリーにすることができる。実は、 $U(1)$  で割ったときにユニタリーになれという条件と、BRS 条件を課した場合にユニタリーになれという条件は同じであることが知られている [29, 36]。

上の条件を仮にユニタリー条件と呼ぶことにすると、離散系列と呼ばれる一連の表現に関しては、ユニタリー条件は各運動量の大きさに上限を与えることになる [29]。この上限とモジュラー不変性や OPE が閉じていることなどの条件を両立させることは非常に困難であり未だ解決したとは言い難い。

本論では、特にモジュラー不変性に関して提案されている「スペクトル流でいった先をすべて足しあげる」という方法 [35, 37, 38] を採用することにする。

$SL(2, \mathbb{R})$  や  $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  の指標については、[29, 39–41] で求められている。

### 3.3.1 $SL(2, \mathbb{R})$ のユニタリー表現と対応するアフィン $SL(2, \mathbb{R})$ の表現

アフィン  $SL(2, \mathbb{R})$  の生成子をスピン基底で、 $J_n^3, J_n^\pm$  としよう。Sugawara エネルギー運動量テンソルの 0 モード (grading operator) を  $L_0$  とすると、交換関係は、

$$[J_m^3, J_n^3] = -\frac{k}{2}m\delta_{m+n},$$

$$[J_m^3, J_n^\pm] = \pm J_{m+n}^\pm,$$

$$[J_m^+, J_n^-] = km\delta_{m+n} - 2J_{m+n}^3,$$

$$[L_0, J_n^a] = -nJ_n^a,$$

となる。とりあえず  $L_0$  の固有値に下限があるような表現を求めたいので次のようなプライマリー状態  $|m\rangle$  を考える。

$$J_n^a|m\rangle = 0, \quad J_0^a|m\rangle = (t^a)_{m'}^m|m'\rangle.$$

ここで  $(t^a)_{m'}^m$  は、有限次元  $SL(2, \mathbb{R})$  代数の表現行列である。このプライマリー状態に  $J_{-n}^a$ ,  $n > 0$  を掛けていくことで、表現のモジュールが出来る。つまりアフィン  $SL(2, \mathbb{R})$  の、プライマリー状態から構成されるような表現は、有限次元  $SL(2, \mathbb{R})$  の表現を決めれば決まることになる。

なるべくユニタリーにしたいので有限次元  $SL(2, \mathbb{R})$  の表現としては、ユニタリー表現を持ってくることにしよう。 $SL(2, \mathbb{R})$  は非コンパクト群なので自明な表現以外のユニタリー表現は、無限次元である。 $SL(2, \mathbb{R})$  のユニタリー表現は、すべて分類がされている。カシミヤ演算子  $(J)^2 = (J_0^+ J_0^- + J_0^- J_0^+)/2 - (J_0^3)^2$  の固有値を  $-j(j-1)$ 、 $J_0^3$  の固有値を  $m$  として次のように分類されている。

1. 自明な表現  $j = 0$

$$\mathring{B} = \{|m = 0\rangle\}.$$

2. 最低ウェイトをもつ離散系列  $j > \frac{1}{2}$

$$\mathring{\mathcal{D}}_j^+ = \{|m\rangle | m = j, j+1, j+2, \dots\}.$$

3. 最高ウェイトをもつ離散系列  $j > \frac{1}{2}$

$$\mathring{\mathcal{D}}_j^- = \{|m\rangle | m = -j, -j-1, -j-2, \dots\}.$$

4. 主連続系列  $j = \frac{1}{2} + i\rho$ ,  $\rho \in \mathbb{R}$

$$\mathring{\mathcal{C}}_j^\alpha = \{|m\rangle | m = \alpha, \alpha \pm 1, \alpha \pm 2, \dots\},$$

$$0 \leq \alpha < 1.$$

5. 補連続系列  $1/2 < j < 1$

$$\mathring{\mathcal{E}}_j^\alpha = \{|m\rangle | m = \alpha, \alpha \pm 1, \alpha \pm 2, \dots\},$$

$$0 \leq \alpha < 1, \quad j - 1/2 < |\alpha - 1/2|.$$

ここでいくつかの注意を述べておく。一つめは、 $SL(2, \mathbb{R})$  の被覆についてである。 $SL(2, \mathbb{R})$  群多様体そのものは、時間方向、つまり  $J^3$  方向について周期があるのでここから  $m$  の値が整数または半整数に制限される。したがって、離散系列の場合は  $j$  が整数または半整数に制限され、連続系列の場合には、 $\alpha$  の値が  $0, 1/2$  に制限される。 $\kappa$  を正整数として、 $SL(2, \mathbb{R})$  の  $\kappa$  重被覆を考えたときには、離散系列では  $j \in \mathbb{Z}/(2\kappa)$  に、連続系列では、 $\alpha = a/\kappa$ ,  $a = 1, 2, \dots, (\kappa - 1)$  に制限される。 $AdS_3$  の弦理論を考えるときには  $SL(2, \mathbb{R})$  の普遍被覆を考えるが、このときには離散系列における  $j$ 、および連続系列における  $\alpha$  は連続的な値をとる。

もう一つの注意は、表現のなかの各状態を波動関数と思ったときに関してである。 $SL(2, \mathbb{R})$  の不変測度を使って  $L^2$  規格化可能な関数関数全体を  $L^2(SL(2, \mathbb{R}))$  と書くことにする。このとき、主連続系列  $\mathring{\mathcal{C}}_j^\alpha \otimes \mathring{\mathcal{C}}_j^\alpha$ ,  $j \in 1/2 + \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$  および離散系列  $\mathring{\mathcal{D}}_j^+ \otimes \mathring{\mathcal{D}}_j^+$ ,  $\mathring{\mathcal{D}}_j^- \otimes \mathring{\mathcal{D}}_j^-$ ,  $j > \frac{1}{2}$  で  $L^2(SL(2, \mathbb{R}))$  の完全系を張っている。したがって、 $SL(2, \mathbb{R})$  のユニタリー表現のなかでも離散系列と主連続系列は非常に重要であり、今後主にこれらの表現を考える。

さて、上で述べた  $SL(2, \mathbb{R})$  の表現をプライマリー状態とするアフィン  $SL(2, \mathbb{R})$  の表現のモジュールを  $\mathcal{B}, \mathcal{D}_j^\pm, \mathcal{C}_j^\alpha, \mathcal{E}_j^\alpha$  と書くことにしよう。実はこれらのアフィン

に持ち上げた表現はすべて非ユニタリーである。だが、この非ユニタリー性はあまり重要ではない。我々が必要なのは、 $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  のユニタリー性、または、 $AdS_3$  の弦理論の場合には、BRS 条件を課した後のユニタリー性である。前にふれたようにこの2つは等価であることが知られている。次の節では  $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  Kazama-Suzuki 模型の言葉を使ってこのユニタリー性について述べよう。

### 3.3.2 $\mathcal{N} = 2$ 超共形対称性との関係

#### $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ Kazama-Suzuki 模型の構成

ここでまず  $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  の Kazama-Suzuki 模型の  $\mathcal{N} = 2$  超共形代数のカレントを作ってみる。 $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  の Kazama-Suzuki 模型は、 $(SL(2, \mathbb{R}) \times SO(2))/U(1)$  の GKO coset 模型である。まず割られる方の  $SL(2, \mathbb{R})$  と  $SO(2)$  のカレントは、次のように作られる。 $SO(2)$  は、フェルミオン2つ  $\psi^\pm(z)$  で作り、 $SL(2, \mathbb{R})$  のカレントを  $J^{\pm,3}(z)$  とすると、OPE は、

$$\begin{aligned} \psi^+(z)\psi^-(w) &\sim \frac{2}{z-w}, \\ J^3(z)J^3(w) &\sim \frac{-k/2}{(z-w)^2}, \quad J^3(z)J^\pm(w) \sim \frac{\pm J^\pm(w)}{z-w}, \\ J^+(z)J^-(w) &\sim \frac{k}{(z-w)^2} + \frac{-2J^3(w)}{z-w}. \end{aligned}$$

ここで、 $\mathcal{N} = 2$  ミニマル模型の時と同様に

$$N := k - 2$$

と定義して、今後  $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  Kazama-Suzuki 模型のパラメータとしておもにこの  $N$  を使うことにする。また、割る方の  $U(1)$  のカレント  $\tilde{J}^3(z)$  を

$$\tilde{J}^3(z) = J^3 + \frac{1}{2}\psi^+\psi^-,$$

とすると、OPE

$$\tilde{J}^3(z)\tilde{J}^3(w) \sim \frac{-N/2}{(z-w)^2}$$



が言える。これらの材料を使って Kazama-Suzuki 模型の  $\mathcal{N} = 2$  カレント  $T(z), G^\pm(z), J(z)$  および中心電荷は次のように書ける。

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{1}{2(N)} (J^+ J^- + J^- J^+) + \frac{N+2}{4N} (\psi^+ \partial \psi^- + \psi^- \partial \psi^+) + \frac{1}{N} J^3 \psi^+ \psi^-, \\ \frac{c}{3} &= \frac{N+2}{N}, \\ G^\pm(z) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \psi^\mp J^\pm, \\ J(z) &= -\frac{1}{2} \psi^+ \psi^- - \frac{2}{N} \tilde{J}^3 = -\frac{2}{N} J^3 - \frac{N+2}{2N} \psi^+ \psi^-, \end{aligned} \quad (3.7)$$

とかける。このカレントは確かに直交関係の OPE

$$T(z) \tilde{J}^3(w) \sim G^\pm(z) \tilde{J}^3(w) \sim J(z) \tilde{J}^3(w) \sim 0,$$

を満たす。

さて、表現のモジュールの分岐関係について調べよう。 $\mathcal{H}_j$  をアフィン  $SL(2, \mathbb{R})$  の表現のモジュール  $\mathcal{B}, \mathcal{D}_j^\pm, \mathcal{C}_j^\alpha, \mathcal{E}_j^\alpha$  のいずれかとしよう。このときコセット  $(SL(2, \mathbb{R}) \times SO(2))/U(1)$  の分岐条件は、

$$\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_s^{\text{SO}(2)} = \bigoplus_m \mathcal{H}_{j,m,s} \otimes \mathcal{H}_m^{\text{U}(1)}$$

となる。 $\mathcal{H}_{j,m,s}$  には、 $\mathcal{N} = 2$  超共形代数が作用しているので  $\mathcal{N} = 2$  超共形代数のモジュールに分解できることは明らかだが、実は  $\mathcal{H}_{j,m,s}$  が、 $\mathcal{N} = 2$  超共形代数のモジュールそのものであることが知られている。これからこのことを見ていくことにしよう。

### $\mathcal{N} = 2$ 超共形代数の表現

ここで、 $\mathcal{N} = 2$  超共形代数の  $c > 3$  の場合の表現の分類について  $SL(2, \mathbb{R})$  の表現の分類と対応させて述べよう。また、 $\mathcal{N} = 2$  超共形代数には、NS セクターと R セクターがあるが、とりあえず NS セクターのみ書いて R セクターは  $\mathcal{N} = 2$  超共形代数のスペクトル流で考えることにする。

表現は、2つのパラメータ、共形次元  $h$  と電荷  $Q$  で特徴づけられる。これを  $j$  と  $m$  という別の2つのパラメータに次の式で置き換える。

$$h_{j,m} = \frac{-j(j-1) + m^2}{N},$$

$$Q_{j,m} = -\frac{2m}{N}.$$

これらの  $j, m$  の値によって表現は次のように分類できる [40]。

1. 「自明」  $j = 0, m = 0$   $\mathcal{B}^{NS}$
2. 「最低ウェイトをもつ離散系列」  $0 \leq j \leq \frac{k}{2}, m \in j + \mathbb{Z}_+$   $\mathcal{D}_{j,m}^{+NS}$
3. 「最高ウェイトをもつ離散系列」  $0 \leq j \leq \frac{k}{2}, m \in -j - \mathbb{Z}_+$   $\mathcal{D}_{j,m}^{-NS}$
4. 「主連続系列」  $j \in \frac{1}{2} + i\mathbb{R}$   $\mathcal{C}_{j,m}^{NS}$
5. 「補連続系列」  $0 < j < \frac{1}{2}, j - 1/2 < |m - [m] - 1/2|$   $\mathcal{E}_{j,m}^{NS}$

分類は、 $SL(2, \mathbb{R})$  の場合とほぼ同じであるが、注意することは、離散系列の  $j$  に上限がついていることである。

上のモジュールを後々つかいやすいように次のように fermion 数によって分けておく。 $(-1)^F$  を NS のプライマリー状態に対して  $+1$  , フェルミオンのな生成子  $G_r^\pm$  に対して

$$(-1)^F G_r^\pm (-1)^F = -G_r^\pm,$$

で定義する。このとき  $\mathcal{H}_{j,m}^{NS}$  を  $\mathcal{B}^{NS}, \mathcal{D}_{j,m}^{+NS}, \mathcal{C}_{j,m}^{NS}, \mathcal{E}_{j,m}^{NS}$  のいずれかとして  $\mathcal{H}_{j,m,s}$ ,  $s \in \mathbb{Z}_4$  を次のように射影で定義する。

$$\mathcal{H}_{j,m,s=0} = \frac{1}{2} \{1 + (-1)^F\} \mathcal{H}_{j,m}^{NS},$$

$$\mathcal{H}_{j,m,s=2} = \frac{1}{2} \{1 - (-1)^F\} \mathcal{H}_{j,m}^{NS},$$

$$\mathcal{H}_{j,m,s=1} = \frac{1}{2} \{1 + (-1)^F\} \mathcal{H}_{j,m}^R,$$

$$\mathcal{H}_{j,m,s=-1} = \frac{1}{2} \{1 - (-1)^F\} \mathcal{H}_{j,m}^R,$$

ここで、 $\mathcal{H}_{j,m}^R$  は、 $\mathcal{H}_{j,m}^{NS}$  の  $1/2$  のスペクトルで定義したものである。

実は、このように定義した  $\mathcal{H}_{j,m}^{NS}$  が前に述べたコセットで作った  $\mathcal{H}_{j,m}^{NS}$  と同じであることをこれから指標を使って示す。

## 指標

アフィン  $SL(2, \mathbb{R})$  の表現を  $\mathcal{H}_j$  として、その指標を

$$\chi(\mathcal{H}_j; \tau, z) := \text{Tr}_{\mathcal{H}_j} \left[ q^{L_0 - \frac{c}{24}} y^{J_0^3} \right]$$

で定義すると結果は知られていて

$$\begin{aligned}
\chi(\mathcal{B}; \tau, z) &= \frac{q^{\frac{1}{8}} \left( y^{-\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} \right)}{-i\theta_1(\tau, z)}, \\
\chi(\mathcal{D}_j^+; \tau, z) &= \frac{q^{-\frac{1}{N}(j-\frac{1}{2})^2} y^{j-\frac{1}{2}}}{-i\theta_1(\tau, z)}, \quad (0 < j < k/2) \\
\chi(\mathcal{D}_{j=k/2}^+; \tau, z) &= \frac{q^{-\frac{1}{N}(j-\frac{1}{2})^2} y^{j-\frac{1}{2}} (1 - qy^{-1})}{-i\theta_1(\tau, z)}, \\
\chi(\mathcal{D}_j^-; \tau, z) &= \frac{-q^{-\frac{1}{N}(j-\frac{1}{2})^2} y^{-j+\frac{1}{2}}}{-i\theta_1(\tau, z)}, \quad (0 < j < k/2) \\
\chi(\mathcal{D}_{j=k/2}^-; \tau, z) &= \frac{-q^{-\frac{1}{N}(j-\frac{1}{2})^2} y^{-j+\frac{1}{2}} (1 - qy)}{-i\theta_1(\tau, z)}, \\
\chi(\mathcal{C}_j^\alpha; \tau, z) = \chi(\mathcal{E}_j^\alpha; \tau, z) &= \frac{q^{-\frac{1}{N}(j-\frac{1}{2})^2}}{\eta(\tau)^3} \sum_{n \in \mathbb{Z}} y^{n+a},
\end{aligned} \tag{3.8}$$

一方、 $\mathcal{N} = 2$  超共形代数の指標

$$\chi(\mathcal{H}; \tau, z) := \text{Tr}_{\mathcal{H}} \left[ q^{L_0 - \frac{c}{24}} y^{J_0} \right]$$

は次のような形になることが知られている。

$$\begin{aligned}
\chi(\mathcal{B}^{NS}; \tau, z) &= \frac{(1-q)q^{-\frac{1}{4N}}}{(1+q^{1/2}y)(1+q^{1/2}y^{-1})} \frac{\theta_3(\tau, z)}{\eta(\tau)^3}, \\
\chi(\mathcal{D}_{j,m}^{+NS}; \tau, z) &= \frac{q^{-\frac{1}{N}(j-\frac{1}{2})^2 + \frac{m^2}{4N}} y^{-\frac{m}{N}}}{1+q^{-j+m+1/2}y^{-1}} \frac{\theta_3(\tau, z)}{\eta(\tau)^3}, \quad (0 < j < k/2) \\
\chi(\mathcal{D}_{j=k/2,m}^{+NS}; \tau, z) &= \frac{q^{-\frac{1}{N}(j-\frac{1}{2})^2 + \frac{m^2}{4N}} y^{-\frac{m}{N}} (1-q)}{(1+q^{-j+m+1/2}y^{-1})(1+q^{-j+m+3/2}y^{-1})} \frac{\theta_3(\tau, z)}{\eta(\tau)^3}, \\
\chi(\mathcal{D}_{j,m}^{-NS}; \tau, z) &= \frac{q^{-\frac{1}{N}(j-\frac{1}{2})^2 + \frac{m^2}{4N}} y^{-\frac{m}{N}}}{1+q^{-j-m+1/2}y} \frac{\theta_3(\tau, z)}{\eta(\tau)^3}, \quad (0 < j < k/2) \\
\chi(\mathcal{D}_{j=k/2,m}^{-NS}; \tau, z) &= \frac{q^{-\frac{1}{N}(j-\frac{1}{2})^2 + \frac{m^2}{4N}} y^{-\frac{m}{N}} (1-q)}{(1+q^{-j-m+1/2}y)(1+q^{-j-m+3/2}y)} \frac{\theta_3(\tau, z)}{\eta(\tau)^3}, \\
\chi(\mathcal{C}_{j,m}^{NS}; \tau, z) = \chi(\mathcal{E}_{j,m}^{NS}; \tau, z) &= q^{-\frac{1}{N}(j-\frac{1}{2})^2 + \frac{m^2}{4N}} y^{-\frac{m}{N}} \frac{\theta_3(\tau, z)}{\eta(\tau)^3}.
\end{aligned}$$

ここから、作った  $\mathcal{H}_{j,m,s}$  の指標の間に

$$\chi(\mathcal{H}_j; \tau, w_1) \chi_s^{\text{SO}(2)}(\tau, w_2) = \sum_m \chi(\mathcal{H}_{j,m,s}; \tau, z_1) \frac{q^{-\frac{1}{N}m^2} y_2^m}{\eta(\tau)},$$

の関係が成り立つことを示すことが出来る。ただしここで、 $q^{-\frac{1}{N}m^2} y_2^m / \eta(\tau)$  は、 $\tilde{J}_0^3$  から生成されるアフィン  $U(1)$  の指標、 $\chi_s^{\text{SO}(2)}(\tau, w_2)$  は、アフィン  $SO(2)$  の指標である。また、 $(z_1, z_2)$  と  $(w_1, w_2)$  の関係は、カレントの標識 (3.7) から読みとることが出来る。

### 3.3.3 スペクトル流と指標

$SL(2, \mathbb{R})$  の WZW 模型では、スペクトル流 (spectral flow) と呼ばれる対称性が重要な役割を果たしている。ここで述べるアフィン  $SL(2, \mathbb{R})$  のスペクトル流は、 $\mathcal{N} = 2$  超共形代数のスペクトル流とは、一応異なるものであるが、微妙な関係がある。

スペクトル流とは、アフィン  $SL(2, \mathbb{R})$  の一連の自己同型で整数  $v$  でラベルされる次のようなものである。

$$J_n^{3(v)} = J_n^3 - \frac{k}{2} \delta_{n,0}, \quad J_n^{\pm(v)} = J_{n \pm v}^{\pm}.$$

この  $J_n^{a(v)}$  は、アフィン  $SL(2, \mathbb{R})$  の代数を満たす。

このスペクトル流をカレントで書いてみると、

$$J^{3(v)}(z) = J^3(z) - \frac{k}{2} v z^{-1}, \quad J^{\pm(v)}(z) = J^{\pm}(z) z^{\pm v}.$$

やはり  $J^{a(v)}(z)$  は、アフィン  $SL(2, \mathbb{R})$  の OPE を満たす。Sugawara エネルギー運動量テンソルは、次のように変換する。

$$L_n^{(v)} = L_n + v J_n^3 - \frac{k}{4} v^2 \delta_{n,0}$$

さて、このスペクトル流がモジュールに対してどのように作用するかを調べよう。まず、 $v$  だけスペクトル流を起こすユニタリー演算子を  $U_v$  とする。つまり、演算子  $A$  に対して

$$A^{(v)} = U_v A U_v^{-1},$$

と変換させる演算子である。アフィン  $SL(2, \mathbb{R})$  のモジュールを  $\mathcal{H}_j$  があつたときこのモジュールを  $U_v$  で移した先は、やはりアフィン  $SL(2, \mathbb{R})$  のモジュールになるはずだが、これがどのようなモジュールになるかを調べてみよう。

$\mathcal{H}_j^{(v)} := U_v^{-1} \mathcal{H}_j$  と定義する。 $\mathcal{H}_j$  の  $L_0, J_0^3$  の固有値がそれぞれ  $h, m$  の状態を  $|h, m\rangle$  と書くと、これをスペクトル流で移した先の状態  $U_v^{-1}|h, m\rangle$  の  $L_0, J_0^3$  の固有値は、

$$\begin{aligned} L_0 U_v^{-1}|h, m\rangle &= U_v^{-1} L_0^{(v)}|h, m\rangle = U_v^{-1} (L_0 + v J_0^3 - \frac{k}{4} v^2)|h, m\rangle = (h + vm - \frac{k}{4} v^2) U_v^{-1}|h, m\rangle, \\ J_0^3 U_v^{-1}|h, m\rangle &= \left(m - \frac{k}{2} v\right) U_v^{-1}|h, m\rangle, \end{aligned}$$

となる。したがってスペクトル流で行った先のモジュールの指標は、

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{H}_j^{(v)})(\tau, z) &:= \text{Tr}_{\mathcal{H}_j^{(v)}} \left[ q^{L_0 - c/24} y^{J_0^3} \right] \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_j} \left[ q^{L_0 + v J_0^3 - kv^2/4 - c/24} y^{J_0^3 - kv/2} \right] \\ &= q^{-kv^2/4} y^{-kv/2} \text{Tr}_{\mathcal{H}_j} \left[ q^{L_0 - c/24} (q^v y)^{J_0^3} \right] \\ &= q^{-kv^2/4} y^{-kv/2} \chi(\mathcal{H}_j)(\tau, z + v\tau) \end{aligned}$$

となる。

このスペクトル流は、特に離散系列の分配関数を構成するときに重要な役割を果たす。以下主連続系列の場合と離散系列の場合の指標について述べる。

### 主連続系列

主連続系列の  $\mathcal{N} = 2$  の指標は、

$$\chi(\mathcal{C}_{j,m}^{NS}; \tau, z) = q^{-\frac{1}{N}(j-\frac{1}{2})^2 + \frac{m^2}{4N}} y^{-\frac{m}{N}} \frac{\theta_3(\tau, z)}{\eta(\tau)^3}.$$

となる。これは、線型ディラトン  $\phi$ , 自由ボゾン  $Y$ , 2つのフェルミオン  $\psi^\pm$  (レベル 1 アフィン  $SO(2)$ ) の直積の指標と全く同じである。これらの場合は、 $\mathcal{N} = 2$  Liouville 理論を自由場表示したときの場合であり、この  $\mathcal{N} = 2$  代数は、

$$\begin{aligned} T &= -\frac{1}{2}(\partial Y)^2 - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{Q}{2}\partial^2\phi - \frac{1}{2}(\psi^+\partial\psi^- - \partial\psi^+\psi^-), \\ G^\pm &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\psi^\pm(i\partial Y \pm \partial\phi) \mp \frac{Q}{\sqrt{2}}\partial\psi^\pm, \\ J &= \psi^+\psi^- - Qi\partial Y. \end{aligned}$$

$SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  との対応は、 $\phi$  の運動量を  $p_\phi$ 、 $Y$  の運動量を  $p_Y$  として

$$Q^2 = \frac{N}{2}, \quad p_Y = -\frac{Q}{2}m, \quad p_\phi = iQj$$

である。

本論では、連続系列の解析を行う際は、この  $\mathcal{N} = 2$  Liouville の自由場を使って行う。

### 離散系列

離散系列については、そのモジュラー変換性を見るために  $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  の分岐関係を用いて記述する。記号を簡単にするために、

$$\ell := 2j, \quad \chi(\mathcal{D}_{\ell/2}^+; \tau, z) = \chi_\ell^+(\tau, z)$$

と定義する。 $0 < \ell < k$  ( $0 < j < k/2$ ) に対して、スペクトル流で流したあとの指標は、

$$\begin{aligned} \chi_\ell^{+(v)}(\tau, z) &:= \text{Tr} \left[ q^{L_0^{(v)} - \frac{k}{8(k-2)} y J_0^{3(v)}} \right] \\ &= \frac{(-1)^v q^{-\frac{1}{4(k-2)}(\ell-1-kv)^2} y^{-\frac{1}{2(k-2)}(\ell-1-kv)}}{-i\theta_1(\tau, z)}. \end{aligned}$$

これを  $v$  について足し合わせると

$$\sum_{v \in 2\mathbb{Z}} \chi_\ell^{+(v)}(\tau, z) = \frac{\Theta_{\ell-1, -N}(\tau, z)}{-i\theta_1(\tau, z)},$$

となってテータ関数であらわされるのでモジュラー変換性がよい。今は、最低ウェイトをもつ離散系列を扱ったが、同じことを最高ウェイトをもつ離散系列に対しておこなうことも出来る。ただしこの両者は独立でなく次の関係がある。

$$\sum_{v \in 2\mathbb{Z}+1} \chi_\ell^{+(v)}(\tau, z) = \sum_{v \in 2\mathbb{Z}} \chi_{k-\ell}^{- (v)}(\tau, z) = \frac{-\Theta_{-N+\ell-1, -N}(\tau, z)}{-i\theta_1(\tau, z)}.$$

あとでモジュラー不変な分配関数を構成する際には、次のような指標の組み合わせをとっておくと便利である。

$$\check{\chi}_\ell(\tau, z) := \sum_{v \in 2\mathbb{Z}} \chi_\ell^{+(v)}(\tau, z) + \sum_{v \in 2\mathbb{Z}+1} \chi_{k-\ell}^{+(v)}(\tau, z) = \frac{\Theta_{\ell-1, -N}(\tau, z) - \Theta_{-(\ell-1), -N}(\tau, z)}{-i\theta_1(\tau, z)}. \quad (3.9)$$

時間方向の  $U(1)$  (割る  $U(1)$ ) については、つぎのような指標になる。

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_m} [q^{L_0 - \frac{1}{24}} y^{J_0^3}] = \Theta_{m, -N}(\tau, z) / \eta(\tau), \quad m \in \mathbb{Z}_{2N}. \quad (3.10)$$

これらの定義を使って、離散系列の指標をスペクトル流にそって足し合わせたもの  $\check{\chi}_m^{\ell, s}(\tau, z)$  は、次の分岐関係で定義することができる。

$$\check{\chi}_\ell \left( \tau, -\frac{2}{N} z_1 + z_2 \right) \Theta_{s, 2} \left( \tau, -\frac{k}{N} z_1 + z_2 \right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_N} \check{\chi}_m^{\ell, s}(\tau, z_1) \Theta_{m, -N}(\tau, z_2). \quad (3.11)$$

モジュラー変換性は、上の分岐関係 (3.11) から読みとることができる。

$$\begin{aligned} \check{\chi}_m^{\ell, s}(\tau + 1, z) &= e \left[ -\frac{\ell(\ell - 2)}{4N} + \frac{s^2}{8} + \frac{m^2}{4N} - \frac{N + 2}{8N} \right] \check{\chi}_m^{\ell, s}(\tau, z), \\ \check{\chi}_m^{\ell, s}(-1/\tau, z/\tau) &= e \left[ \frac{k}{2N} \frac{z^2}{\tau} \right] \sum_{\ell, m, s} (-1) \sqrt{\frac{2}{N}} \sin \pi \frac{(\ell - 1)(\ell' - 1)}{N} \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{8k}} e \left[ -\frac{ss'}{4} - \frac{mm'}{2N} \right] \check{\chi}_{m'}^{\ell', s'}(\tau, z). \end{aligned}$$

あとで非コンパクト Gepner 模型の離散部分を構成するときはこの指標を用いる。





## 第4章 連続系列

この章では、 $SL(2, \mathbb{R})$  の連続系列を使った部分についてモジュラー不変な分配関数の構成、および境界状態の方法を用いた D ブレインの解析を行う。この章の議論は、[42, 43] に基づくものである。

他に非コンパクト Gepner 模型の閉弦についての研究は [44–47]、D ブレインについての研究が [48, 49] にある。

### 4.1 モジュラー不変な分配関数

ここでは、 $SL(2, \mathbb{R})$  の表現のうち連続系列のみを使ってモジュラー不変な分配関数を構成する。連続系列の場合、 $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  は  $\mathcal{N} = 2$  の自由場表示におきかえてよいのでそのようにして考える。このとき考える共形場理論は、

$$\mathbb{R}^{d-2} \times \mathbb{R}_\phi \times S^1 \times M_{G_1, N_1} \times \cdots \times M_{G_R, N_R}.$$

全体の分配関数は、GSO 射影に関係ある部分と GSO 射影に関係ない部分の2つの因子に分かれる。つまり、GSO 射影に関係ある部分を  $Z_{GSO}$  関係無い部分を  $Z_0$  としたとき全体の分配関数  $Z$  はこれらの積で次のように書ける。

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = Z_0(\tau, \bar{\tau}) Z_{GSO}(\tau, \bar{\tau}).$$

このうち GSO 射影に関係無い部分  $Z_0$  は、比較的簡単である。一方、GSO 射影に関係ある部分の  $Z_{GSO}$  の構成はかなり非自明である。ここではまず  $Z_0$  を先に構成しあとで  $Z_{GSO}$  を構成することにする。

#### 4.1.1 GSO 射影に関係のない部分

この節では、GSO 射影に関係ない部分  $Z_0$  について考えよう。この部分の取り扱い、[45] にしたがう。

$Z_0$  の部分は、平らな時空の部分  $X^I$ , ( $I = 2, \dots, d-1$ ) からの寄与と、線型ディラトン  $\phi$  からの寄与である。

平らな時空の部分に関しては、よく知られていて Dedekind エータ関数  $\eta(\tau)$  を使って書ける。結果は、ボゾン 1 個あたり

$$\frac{1}{\sqrt{\tau_2}|\eta(\tau)|^2}.$$

となる。

一方、線型ディラトンの方は少し複雑で、次のようになる。主連続系列に対応するのは、

$$\exp(ip\phi), \quad p = -\frac{iQ}{2} + \ell, \quad \ell \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

の頂点演算子からできる状態である。これらを同じ重みで積分することにする。振動子の部分も入れて結果は、

$$\begin{aligned} Z_L &= \frac{1}{|\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)|^2} \int dp \exp \left[ -4\pi\tau_2 \left( \frac{1}{2}p^2 + \frac{i}{2}pQ - \frac{1+3Q^2}{24} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tau_2}|\eta(\tau)|^2}, \end{aligned}$$

となる。ここで  $p$  の積分範囲は (4.1) で与えられるもので、 $\ell$  について一様な重みで積分した。また、線型ディラトンの中心電荷は、 $1+3Q^2$  であることを使った。

結果的には、線型ディラトンの部分の寄与は、普通のボゾン 1 個と同じである。これらを合わせて GSO 射影に関係の無い部分全体  $Z_0$  は、自由ボゾン  $(d-1)$  個分と同じで次のようになる。

$$Z_0 = \left( \frac{1}{\sqrt{\tau_2}|\eta(\tau)|^2} \right)^{d-1}.$$

#### 4.1.2 GSO 射影に関係のある部分 : $d = 2, 6$ の場合

さて、GSO 射影に関係のある部分  $Z_{GSO}$  の構成に移ろう。GSO に関係のある部分は、 $d = 2, 6$  の場合と  $d = 4$  の場合で少し取り扱いが異なる。ここではまず  $d = 2, 6$  の場合について考えよう。

この部分に含まれるのは、次のものである。

- $(d-2)$  個の平らな時空からくる自由フェルミオン  $\psi^I$ , ( $I = 2, \dots, d-1$ )
- $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  Kazama-Suzuki の自由場表示からくる自由フェルミオン 2 個  $\psi^\phi, \psi^Y$
- $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  Kazama-Suzuki の自由場表示の  $S^1$  からくるボゾン  $Y$ 。

- ミニマル模型  $M_{G_1, N_1}, \dots, M_{G_R, N_R}$

まず上の2つの自由フェルミオンを合わせて  $d$  個の自由フェルミオンとなるが、これからレベル1のアフィン  $SO(d)$  をつくる。レベル1のアフィン  $SO(d)$  の可積分最高ウェイト表現は、スカラー、ベクトル、スピノール、共役スピノールの4種類であり、これらをそれぞれ  $s = 0, 2, 1, -1$  であらわすことにする。

U(1) 部分については運動量について足し合わせ、

$$\frac{\Theta_{m, KJ}(\tau, \frac{2z}{K})}{\eta(\tau)}$$

を指標とする。ただしここで  $K$  は  $N_j$  たちと2の最大公約数、また  $J$  は、

$$J := 2K \left( 1 - \frac{d}{8} - \sum_{j=1}^R \frac{N_j - 2}{4N_j} \right) \quad (= KQ^2/2)$$

の式で定義する。 $\Theta_{m, KJ}/\eta$  のモジュールのなかの状態の電荷は、2で割ったあまりが  $\frac{m}{K}$  であることもあとから重要になる。

このGSO射影に関係ある部分すべてをあわせたものの指標は、

$$\chi_{\mu}^{\lambda}(\tau, z) = \chi_{s_0}^{\text{so}(d)} \frac{\Theta_{m_0, KJ}(\tau, 2z/K)}{\eta(\tau)} \prod_{j=1}^R \chi_{m_j}^{\ell_j, s_j}(\tau, z).$$

で定義する。ただしラベル  $\lambda, \mu$  は、

$$\lambda := (\ell_1, \dots, \ell_R),$$

$$\mu := (s_0; s_1, \dots, s_R; m_0; m_1, \dots, m_R).$$

とする。

さて、これからこれらを使って「ベータ法」と呼ばれる方法 [1] でモジュラー不変な分配関数を構成する。この理論に含まれる状態は、次の条件を満たさねばならない。

- 全体の電荷が奇数 (GSO 条件)
- 超対称性のカレントがすべて NS またはすべて R (スピン構造条件)

これらの条件を満たす状態のみを使ってモジュラー不変な分配関数を構成するのがベータ法である。

上の条件を書き表すためにいくつかの記号を定義する。まずラベル  $\mu$  の間の内積を定義する。

$$\mu \cdot \mu' := -\frac{d}{2} \frac{s_0 s'_0}{4} - \sum_{j=1}^R \frac{s_j s'_j}{4} - \frac{m_0 m'_0}{2KJ} + \sum_{j=1}^R \frac{m_j m'_j}{2N_j}.$$

次に  $\mu$  と同じタイプの定数ベクトル「ベータベクトル」 $\beta_0, \beta_j, j = 1, \dots, R$  を導入する。

$$\beta_0 := (1; 1, \dots, 1; -J; 1, \dots, 1),$$

$$\beta_j := (2; 0, \dots, 0, \underset{\hat{s}_j}{2}, 0, \dots, 0; 0; 0, \dots, 0).$$

これらのベクトルを使うと GSO 条件とスピン構造条件は次のように簡単にあらわすことが出来る。

$$2\beta_0 \cdot \mu \in 2\mathbb{Z} + 1,$$

$$\beta_j \cdot \mu \in \mathbb{Z}, \quad (j = 1, \dots, R) \quad (4.2)$$

このように書き表した条件を「ベータ条件」と呼ぶことにする。

ベータベクトルの間の内積は後々重要になる。

$$\beta_0 \cdot \beta_0 = -1,$$

$$\beta_j \cdot \beta_j = -\frac{d}{2} - 1, \quad (j = 1, \dots, R)$$

$$\beta_j \cdot \beta_{j'} = -\frac{d}{2}, \quad (j, j' = 1, \dots, R, \quad j \neq j')$$

$$\beta_j \cdot \beta_0 = \frac{1}{2} \left( -\frac{d}{2} - 1 \right). \quad (4.3)$$

注意することは、 $\beta_0 \cdot \beta_0$  が奇数、 $\beta_j \cdot \beta_j$  が偶数（ここで  $d = 2, 6$  であることを使っている） $\beta_j \cdot \beta_{j'}$  と  $\beta_j \cdot \beta_0$  が整数であることである。

ある  $\mu$  がベータ条件 (4.2) を満たしていたとしよう。このとき  $b_0, b_j$  を整数として  $\mu + b_0 \beta_0 + \sum_{j=1}^R b_j \beta_j$  もベータ条件を満たすことが分かる。したがって、ベ-

タ条件を満たす  $\mu$  に対してブロック  $F_\mu^\lambda$  を

$$F_\mu^\lambda(\tau) = \sum_{\substack{b_0 \in \mathbb{Z}_{2K} \\ b_j \in \mathbb{Z}_2}} (-1)^{s_0 + b_0} \chi_{\mu + b_0 \beta_0 + \sum_j b_j \beta_j}^\lambda(\tau),$$

で定義するとこの中に含まれる状態はすべてベータ条件を満たす。ここで、符号  $(-1)^{s_0 + b_0}$  は R セクターで  $(-1)$  になるように入れた。

上のような  $F_\mu^\lambda$  を定義した理由は、これが非常によいモジュラー変換性をもつからである。ここで実際にモジュラー変換性を調べてみることにしよう。 $\chi_\mu^\lambda$  のモジュラー変換性は、

$$\chi_\mu^\lambda(\tau + 1) = e \left[ \sum_j \frac{\ell_j(\ell_j + 2)}{4N_j} - \frac{1}{2} \mu \cdot \mu - \frac{1}{8} \left( \sum_j \frac{N_j - 2}{N_j} + \frac{d}{6} + \frac{1}{3} \right) \right] f_\mu^\lambda(\tau),$$

$$\chi_\mu^\lambda(-1/\tau) = \sum_{\lambda', \mu'} \left( \prod_j A_{\ell_j \ell'_j}^{(N_j - 2)} \right) \left( \prod_j \frac{1}{\sqrt{8N_j}} \right) \frac{1}{\sqrt{8KJ}} e^{[\mu \cdot \mu']} f_{\mu'}^{\lambda'}(\tau),$$

となる。ここで、 $A_{\ell \ell'}^{(N-2)}$  は、レベル  $(N-2)$  アフィン  $SU(2)$  のモジュラー S 行列である。これを使ってブロック  $F_\mu^\lambda$  のモジュラー変換性を調べると次のようになる。特筆すべきは S 変換に関してベータ条件を満たすものだけにかけていることである。

$$F_\mu^\lambda(\tau + 1) = e \left[ \sum_j \frac{\ell_j(\ell_j + 2)}{4N_j} - \frac{1}{2} \mu \cdot \mu - \frac{1}{8} \left( \sum_j \frac{N_j - 2}{N_j} + \frac{d}{6} + \frac{1}{3} \right) \right] F_\mu^\lambda(\tau),$$

$$F_\mu^\lambda(-1/\tau) = \sum_{\lambda', \mu'}^{\text{beta}} \left( \prod_j A_{\ell_j \ell'_j}^{(N_j - 2)} \right) \left( \prod_j \frac{1}{\sqrt{8N_j}} \right) \frac{1}{\sqrt{8KJ}} e^{[\mu \cdot \mu']} (-1)^{s_0 + s'_0} F_{\mu'}^{\lambda'}(\tau).$$

ここで和  $\sum_{\lambda', \mu'}^{\text{beta}}$  は、ベータ条件を満たすもののみとっている。

さて、ここまでくればあとはこのブロックを使って次のように簡単にモジュラー不変な分配関数  $Z_{GSO}$  を作れる。

$$Z_{GSO}(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{4^R \times 2^K} \sum_{\lambda, \bar{\lambda}, \mu}^{\text{beta}} \left( \prod_j L_{\ell_j \ell'_j}^{(G_j, N_j - 2)} \right) F_\mu^\lambda(\tau) \bar{F}_\mu^{\bar{\lambda}}(\bar{\tau}),$$

ここで、 $L_{\ell_j \ell'_j}^{(G_j, N_j - 2)}$  は、レベル  $(N_j - 2)$  アフィン  $SU(2)$  の  $G_j = A, D, E$  モジュラー不変行列である [17–19]。実際に上の  $Z_{GSO}$  がモジュラー不変であることを確かめることができる。

このようにしてモジュラー不変な分配関数を構成することが出来た。これで理論のスペクトルが完全に求まったことになる。

時空の超対称性から、ここで求めた分配関数は、0 になることが期待されるが、これについては [50] で実際に 0 になることを示した。これを示すのには、 $d = 6$  のときには、Jacobi の隠れた恒等式 (abstruse identity) を、 $d = 2$  のときには、[51, 52] で発見されたテータ関数の恒等式を使う。

#### 4.1.3 GSO 射影に関係のある部分 : $d = 4$ の場合

さて、 $d = 4$  の場合に移ろう。 $d = 4$  の場合には、4 個の自由フェルミオンがあるが、これをレベル 1 アフィン  $SO(2)$  2 つに組む。そしてこのモジュールのラベルを  $s_{-1}$  および  $s_0$  とする。こうすれば、 $d = 2, 6$  の場合とほぼ同様に出来る。

全体の指標を

$$\chi_\mu^\lambda(\tau) := \chi_{s_{-1}}^{\text{so}(2)}(\tau) \chi_{s_0}^{\text{so}(2)}(\tau) \chi_m^{\ell_1, s_1}(\tau) \dots \chi_m^{\ell_R, s_R}(\tau) \Theta_{m_0, KJ}(\tau) / \eta(\tau),$$

と定義する。ここで、全体のモジュールのラベルは、 $\lambda$  の方は  $d = 2, 6$  の場合と同様、 $\mu$  の方は、 $s_{-1}$  を入れて次のように組む。

$$\mu := (s_{-1}, s_0; s_1, \dots, s_R; m_0; m_1, \dots, m_R),$$

ベータ法のための  $\mu$  の間の内積は、次のように定義する。

$$\mu \cdot \mu' := -\frac{s_{-1}s'_{-1}}{4} - \frac{s_0s'_0}{4} - \sum_j \frac{s_j s'_j}{4} - \frac{m_0 m'_0}{2KJ} + \sum_j \frac{m_j m'_j}{2N_j}.$$

ベータベクトルの定義は、

$$\beta_0 = (1, 1; 1, \dots, 1; -J; 1, \dots, 1),$$

$$\beta_j = (0, 2; 0, \dots, 0, \underset{\wedge}{2}, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0; 0), \quad (j = 1, \dots, R),$$

$$\beta_{-1} = (2, 2; 0, \dots, 0; 0, \dots, 0; 0).$$

ベータ条件は、

$$2\beta_0 \cdot \mu \in 2\mathbb{Z} + 1, \quad \beta_j \cdot \mu \in \mathbb{Z}, \quad \beta_{-1} \cdot \mu \in \mathbb{Z}, \quad (4.4)$$

と書くことができる。

ブロックの定義は、

$$F_\mu^\lambda(\tau) = \sum_{b_0 \in \mathbb{Z}_{2K}, b_j \in \mathbb{Z}_2, b_{-1} \in \mathbb{Z}_2} (-1)^{b_0 + s_0} f_{\mu + b_0 \beta_0 + \sum_j b_j \beta_j + b_{-1} \beta_{-1}}^\lambda(\tau),$$

となる。このブロックを使って分配関数  $Z_{GSO}$  は、

$$Z_{GSO}(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{4^R \times 4^K} \sum_{\lambda, \bar{\lambda}, \mu}^{\text{beta}} \left( \prod_j L_{\ell_j \bar{\ell}_j}^{(G_j, N_j - 2)} \right) F_\mu^\lambda(\tau) \bar{F}_\mu^{\bar{\lambda}}(\bar{\tau}).$$

と書ける。実際にこの分配関数がモジュラー不変であることは確かめることができる。

この場合も時空の超対称性から分配関数は実際に 0 になることを示すことができる [50]。これを示すのには、[53] で示されたテータ関数の恒等式を使う。

## 4.2 楕円種数

### 4.2.1 楕円種数の計算

この節では、楕円種数 (elliptic genus) を計算する [54]。楕円種数とはトポロジー的な量で、Calabi-Yau のシグマ模型と比較することができる量である。

楕円種数の定義は、

$$I(\tau, \bar{\tau}, z) := \text{Tr}_{RR} (-1)^F q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0 - c/24} y^{J_0},$$

で与えられる。ここで、トレースは、RR セクターのみでとる。この楕円種数は、次のような性質を持つ。

$$\begin{aligned} I(\tau + 1, \bar{\tau} + 1, z) &= I(\tau, \bar{\tau}, -z) = I(\tau, \bar{\tau}, z), \\ I(-1/\tau, -1/\bar{\tau}, z/\tau) &= e^{\left[ \frac{c}{6} \frac{z^2}{\tau} \right]} I(\tau, \bar{\tau}, z). \end{aligned} \quad (4.5)$$

ここでは、平らな時空の方は無視して非コンパクトな Calabi-Yau 多様体  $X$  の部分のみの楕円種数を計算する。

まず、複素  $n$  次元の Calabi-Yau 多様体  $X$  の臨界条件、別の言葉で言えば Calabi-Yau 条件について考えよう。これは、全中心電荷が  $3n$  ということであり、

ミニマル模型のレベルと Liouville の背景電荷の間に次の関係がある。

$$n = c/3 = 1 + Q^2 + \sum_j \frac{N_j - 2}{N_j}. \quad (4.6)$$

$\mathcal{N} = 2$  Liouville の U(1) の部分の character は、

$$\Theta_{m, K' J'} \left( \tau, \frac{2z}{K'} \right)$$

で定義しておく。ここで、 $K'$  は  $N_j$  の最小公倍数、 $J'$  は、

$$J' := \frac{K' Q^2}{2},$$

で定義している。ここでは、 $(n - 1 - R)$  が偶数の時のみ扱うことにする。したがって (4.6) から  $J'$  は整数である。

やはりここでもベータ法を使うために次のような  $m$  をまとめたベクトルとその間の内積を導入する。

$$\vec{m} := (m_0; m_1, \dots, m_R),$$

$$\vec{m} \cdot \vec{m}' := \frac{m_0 m'_0}{2K' J'} \sum_j \frac{m_j m'_j}{2N_j}.$$

さらにベータベクトル  $\vec{\beta}_0$  を導入する。

$$\vec{\beta}_0 := (-2J'; 2, \dots, 2).$$

今の場合、Calabi-Yau の共形場理論を考えたいので U(1) 電荷が整数の状態に射影する。この条件は、ベータベクトルを使って

$$\vec{\beta}_0 \cdot \vec{m} \in \mathbb{Z},$$

と書ける。前と同じようにこの条件をベータ条件と呼ぶことにする。

$(-1)^F$  を挿入した指標  $I_{\vec{m}}^\lambda$  を

$$I_{\vec{m}}^\lambda(\tau, z) := \sum_{s_0, s_j=1,3} (-1)^{-\frac{s_0}{2} - \sum_j \frac{s_j}{2} + \vec{\beta}_0 \cdot \vec{m}} \frac{\Theta_{m_0, K' J'}(\tau, 2z/K')}{\eta(\tau)} \prod_{j=1}^R \chi_{m_j}^{\lambda_j, s_j}(\tau, z),$$

ここで次のような関数  $I_m^\ell$  を導入する。

$$I_m^\ell(\tau, z) := \chi_m^{\ell,1}(\tau, z) - \chi_m^{\ell,3}(\tau, z).$$



この関数を使うと先ほどの  $I_{\vec{m}}^\lambda(\tau, z)$  は、

$$I_{\vec{m}}^\lambda(\tau, z) := (-1)^{\vec{\beta} \cdot \vec{m}} \frac{\theta_1(\tau, z)}{\eta} \frac{\Theta_{m_0, K'J'}(\tau, 2z/K')}{\eta(\tau)} \prod_{j=1}^R I_{m_j}^{\ell_j}(\tau, z),$$

さて、これらの  $I_{\vec{m}}^\lambda(\tau, z)$  のうち、ベータ条件を満たすもののみを使って楕円種数を構成する。ある  $\vec{m}$  がベータ条件を満たしているとする。これに  $b_0$  を整数として  $\vec{m} + b_0 \vec{\beta}_0$  もベータ条件を満たしている。したがって、ベータ条件を満たす  $\vec{m}$  に対して次のようなブロック  $G_{\vec{m}}^\ell(\tau, z)$  を定義するとこのブロックのなかに含まれる状態は、すべてベータ条件を満たす。

$$G_{\vec{m}}^\ell(\tau, z) = \sum_{b_0 \in \mathbb{Z}_N} I_{\vec{m} + b_0 \vec{\beta}_0}^\lambda(\tau, z),$$

楕円種数の正しいモジュラー変換性を確かめるために、これらの関数のモジュラー変換性を調べる。  $I_{\vec{m}}^\lambda$  のモジュラー変換性は、

$$I_{\vec{m}}^\lambda(\tau + 1, z) = e^{\left[ \sum_j \frac{\ell_j(\ell_j + 1)}{4N_j} - \frac{1}{2} \vec{m} \cdot \vec{m} + \frac{R+1}{8} - \frac{1}{8} \left( \sum_j \frac{N_j - 2}{N_j} + \frac{2}{3} \right) \right]} I_{\vec{m}}^\lambda(\tau, z),$$

$$I_{\vec{m}}^\lambda(-1/\tau, z/\tau) = (-i)^R e^{\left[ \frac{n}{2} \frac{z^2}{\tau} \right]}$$

$$\times \sum_{\lambda', \vec{m}'} \left( \prod_j A_{\ell_j \ell_j'}^{(N_j-2)} \right) \frac{1}{\prod_j \sqrt{2N_j}} \frac{1}{\sqrt{2K'J'}} e^{[\vec{m} \cdot \vec{m}']} (-1)^{\vec{\beta}_0 \cdot (\vec{m} - \vec{m}')} I_{\vec{m}'}^{\lambda'}(\tau, z),$$

$G_{\vec{m}}^\ell$  は、ベータ条件を満たすものの中で閉じている。

$$G_{\vec{m}}^\lambda(\tau + 1, z) = e^{\left[ \sum_j \frac{\ell_j(\ell_j + 1)}{4N_j} - \frac{1}{2} \vec{m} \cdot \vec{m} + \frac{R+1}{8} - \frac{1}{8} \left( \sum_j \frac{N_j - 2}{N_j} + \frac{2}{3} \right) \right]} G_{\vec{m}}^\lambda(\tau, z),$$

$$G_{\vec{m}}^\lambda(-1/\tau, z/\tau) = (-i)^R e^{\left[ \frac{n}{2} \frac{z^2}{\tau} \right]}$$

$$\times \sum_{\lambda', \vec{m}'}^{\text{beta}} \left( \prod_j A_{\ell_j \ell_j'}^{(N_j-2)} \right) \frac{1}{\prod_j \sqrt{2N_j}} \frac{1}{\sqrt{2N_j}} e^{[\vec{m} \cdot \vec{m}']} (-1)^{\vec{\beta}_0 \cdot (\vec{m} - \vec{m}')} G_{\vec{m}'}^{\lambda'}(\tau, z).$$

これらの関数を使って楕円種数は、

$$Z(\tau, \bar{\tau}, z) = \frac{1}{2^R N} \frac{1}{\sqrt{\tau_2} |\eta(\tau)|^2} \sum_{\lambda, \vec{\lambda}, \vec{m}}^{\text{beta}} \left( \prod_j L_{\ell_j \ell_j}^{(G_j, N_j-2)} \right) G_{\vec{m}}^\lambda(\tau, z) \bar{G}_{\vec{m}}^{\vec{\lambda}}(\bar{\tau}, 0).$$

のように得られる。ここで、  $L_{\ell_j \ell_j}^{(G_j, N_j-2)}$  は、レベル  $(N_j - 2)$  アフィン  $SU(2)$  のモジュラー不変な行列、  $1/\sqrt{\tau_2} |\eta(\tau)|^2$  の因子は、線型ディラトンからの寄与であ

る。この楕円種数が実際にモジュラー変換性 (4.5) を  $c/3 = n$  で満たすことは、確かめることが出来る。

実際にはこの楕円種数は、 $\bar{\theta}_1(\bar{\tau}, 0) = 0$  の因子を含むため 0 になる。

## 4.2.2 Hodge 数と Witten 指数

この楕円種数は 0 になってしまったが、ここから何か情報を引き出すことは出来るだろうか。特異点の消滅コホモロジー等は、特異点付近に局在した情報なので連続系列でなく離散系列に含まれると考えられる。連続系列に含まれるのは、特異点から遠くの方にある情報、つまり錐の底面  $X/\mathbb{C}^\times$  の情報と考えられる。一方、動径方向の方はほぼ自明な寄与を与えると考えられ、このために楕円種数は 0 になったものと考えられる。ここでは、この動径方向の寄与を分離して底面の情報を取り出すことを考えよう。それには、次のような  $\hat{I}$  を見ればよいと思われる。

$$I(\tau, \bar{\tau}, z) = \frac{\theta_1(\tau, z)\bar{\theta}_1(\bar{\tau}, 0)}{\sqrt{\tau_2}|\eta(\tau)|^6} \hat{I}(\tau, \bar{\tau}, z),$$

$$\hat{I}(\tau, \bar{\tau}, z) = \frac{1}{2^R N} \sum_{\lambda, \bar{\lambda}, \vec{m}}^{\text{beta}} \left( \prod_{j=1}^R L_{\ell_j \bar{\ell}_j}^{(G_j, N_j - 2)} \right) \hat{G}_{\vec{m}}^\lambda(\tau, z) \bar{G}_{\vec{m}}^{\bar{\lambda}}(\bar{\tau}, 0),$$

$$\hat{G}_{\vec{m}}^\lambda(\tau, z) = \sum_{b_0 \in \mathbb{Z}_N} \hat{I}_{\vec{m} + b_0 \vec{\beta}_0}^\lambda(\tau, z),$$

$$\hat{I}_{\vec{m}}^\lambda(\tau, z) = (-1)^{\vec{\beta}_0 \cdot \vec{m}} \Theta_{m_0, K' J'}(\tau, 2z/K') \prod_{j=1}^R I_{m_j}^{\ell_j},$$

ここで、基底状態について詳しく見てみるために  $\tau \rightarrow i\infty$  の極限をとってみることにしよう。この極限で  $\Theta_{m_0, K' J'}$  は

$$\Theta_{m_0, K' J'}(i\infty, z) = \delta_{m_0}^{\text{mod } 2K' J'},$$

となる。したがって、 $\hat{G}$  は、次のように評価できる。

$$\hat{G}_{\vec{m}}^\lambda = \begin{cases} \prod_{j=1}^R I_{m_j + \frac{m_0}{2J'}}^{\ell_j}(i\infty, z) & (m_0 \equiv 0 \pmod{2J'}), \\ 0 & (\text{others}). \end{cases}$$

これを使うと  $\hat{I}$  は、次のようになる。

$$\lim_{\tau \rightarrow i\infty} \hat{I} = \frac{1}{2^R K'} \sum_{\lambda, \bar{\lambda}, \vec{m}}^{\text{beta}} \delta_{m_0}^{\text{mod } 2J'} \prod_{j=1}^R \left[ L_{\ell_j \bar{\ell}_j}^{(G_j, N_j - 2)} I_{m_j + \frac{m_0}{2J'}}^{\ell_j}(i\infty, z) \bar{I}_{m_j + \frac{m_0}{2J'}}^{\bar{\ell}_j}(-i\infty, 0) \right].$$

ここで和をとる変数の変数変換  $m_j + \frac{m_0}{2j} = m'_j$  (プライムは省略する。)を行うと  $m_0$  についての和が実行できる。さらに、

$$I_{m_j}^{\ell_j}(-i\infty, z) = \delta_{m_j - \ell_j - 1}^{\text{mod } 2N_j} y^{\frac{\ell_j + 1}{N} - \frac{1}{2}} - \delta_{m_j + \ell_j + 1}^{\text{mod } 2N_j} y^{-\frac{\ell_j + 1}{N} + \frac{1}{2}},$$

も考慮する。結果は、

$$\lim_{\tau \rightarrow i\infty} \hat{I} = \frac{1}{2^R} \sum_{\{m_j\}}^{\text{beta}} \prod_j \left[ \sum_{\ell_j, \bar{\ell}_j} L_{\ell_j, \bar{\ell}_j}^{(N_j)} I_{m_j}^{\ell_j}(i\infty, z) I_{m_j}^{\bar{\ell}_j}(-i\infty, 0) \right].$$

となる。

さてここまでは、かなり一般的な場合でやってきたが、ここからは、さらに具体的な計算をするために次のような場合に限ることにする。

- すべてのミニマル模型は A 型、つまり  $L_{\lambda\bar{\lambda}} = \delta_{\lambda\bar{\lambda}}$ 。
- $R = n + 1$ 。
- $N_1 = N_2 = \dots = N_R = N$ 。

言い換えるとこの例は、Calabi-Yau 多様体  $X$  として次のような超曲面を考えているということになる。

$$z_1^N + z_2^N + \dots + z_{n+1}^N = 0 \text{ in } \mathbb{C}^{n+1}. \quad (4.7)$$

有限距離条件は  $N < n + 1$  と書くことが出来るがこれは  $X/\mathbb{C}^\times$  の第 1 Chern 数が正であり、 $X/\mathbb{C}^\times$  は、正に曲がった多様体であることと等価である。

さて、この簡単な例では楕円種数の非自明な因子の基底状態は、計算できて

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow i\infty} \hat{I} &= \frac{1}{2^R} \sum_{\{m_j\}}^{\text{beta}} \prod_j \left[ \sum_{\ell_j} \left( \delta_{m_j - \ell_j - 1}^{\text{mod } 2N_j} y^{\frac{\ell_j + 1}{N} - \frac{1}{2}} - \delta_{m_j + \ell_j + 1}^{\text{mod } 2N_j} y^{-\frac{\ell_j + 1}{N} + \frac{1}{2}} \right) \left( \delta_{m_j + \ell_j + 1}^{\text{mod } 2N_j} - \delta_{m_j - \ell_j - 1}^{\text{mod } 2N_j} \right) \right] \\ &= \frac{y^{-\frac{n+1}{2}}}{2^R} \sum_{\{m_j\}}^{\text{beta}} \prod_j \left[ \sum_{\ell_j} \left( \delta_{m_j - \ell_j - 1}^{\text{mod } 2N_j} y^{\frac{\ell_j + 1}{N}} + \delta_{m_j + \ell_j + 1}^{\text{mod } 2N_j} y^{-\frac{\ell_j + 1}{N} + 1} \right) \right]. \end{aligned}$$

となる。さらに、 $m_j = a_j + Nb_j$ , ( $b_j = 0, -1$ ;  $a_j = 0, 1, \dots, N - 1$ ) の変数変換を行うとベータ条件は

$$\sum_j a_j \equiv 0 \pmod{N},$$

$n = 3$				$n = 4$					$n = 5$					
$N \setminus p$	1	2	3	$N \setminus p$	1	2	3	4	$N \setminus p$	1	2	3	4	5
3	0	6	0	3	0	5	5	0	3	0	1	20	1	0
4	1	19	1	4	0	30	30	0	4	0	21	141	21	0
				5	1	101	101	1	5	0	120	580	120	0
									6	1	426	1751	426	1

表 4.1:  $n = 3, 4, 5$ ,  $N = 3, \dots, n+1$  の場合の  $h_p$  の値。  $N = n+1$  の場合は、有限距離条件を満たさないが、参考のため表に含めた。

と書ける。これらを使って  $\hat{I}$  をさらに計算すると結果は、

$$\lim_{\tau \rightarrow i\infty} \hat{I} = \sum_{p=1}^n h_p y^{p - \frac{n+1}{2}},$$

$$h_p := \sum_{a_j=1, \dots, N-1, \sum_j a_j = pN} 1 = \sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{n+1}{i} \binom{(p-i)(N-1) + p - 1}{n}.$$

となる。表 4.1 に  $n, N$  が小さい場合に、いくつかの  $h_p$  の具体的な値を示す。これらの係数  $h_p$  は、  $X/\mathbb{C}^\times$  の真ん中の次元の Hodge 数に Kähler 形式のべきを除いて一致している。

特に Witten 指数を計算してみると、

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow i\infty, z \rightarrow 0} \hat{I} &= \sum_{p=1}^n h_p \\ &= (-1)^{n+1} \left[ 1 + \frac{(1-N)^{n+1} - 1}{N} \right] \\ &= (-1)^{n+1} \left[ n+1 + \frac{(1-N)^{n+1} - 1}{N} - n \right]. \end{aligned}$$

一方、  $X/\mathbb{C}^\times$  のオイラー数の幾何学的な結果は知られていて、

$$\chi_{X/\mathbb{C}^\times} = n+1 + \frac{(1-N)^{n+1} - 1}{N}.$$

共形場理論から求めた Witten 指数と幾何学的に求めた Euler 数はほぼ一致している。これらの相違点の1つは、符号  $(-1)^{n+1}$  であるが、これは重要ではない。もう1つの相違点は、Witten 指数の方が Euler 数よりも  $n$  だけ小さいことである。この差は、Kähler 形式のべきからくるコホモロジーの元と思われる。こ

これらの元がなぜ共形場理論の方に入っていないのかはよく分からない未解決の問題である。

## 4.3 境界状態と交点数

### 4.3.1 $\mathcal{N} = 2$ Liouville 理論の境界状態

さて、ここでは、連続系列のみを使ったモデルにおいて共形場理論の境界状態を調べることににより D ブレインとその上にのっている弦の性質を調べることにしよう。

一般に、 $\mathcal{N} = 2$  の超共形場理論においては A 型と B 型と呼ばれる 2 つのタイプの貼り合わせ条件があることが知られている。この 2 つの貼り合わせ条件は  $z = \bar{z}$  において次のように貼り合わせることである。

- A 型貼り合わせ条件

$$T = \bar{T}, G^\pm = \varepsilon \bar{G}^\mp, J = -\bar{J}.$$

- B 型貼り合わせ条件

$$T = \bar{T}, G^\pm = \varepsilon \bar{G}^\pm, J = +\bar{J}.$$

ここで  $\varepsilon$  は、スピン構造に関するもので NS セクターでは、 $\varepsilon = 1$ 、R セクターでは、 $z > 0$  で  $\varepsilon = 1$ 、 $z < 0$  で  $\varepsilon = -1$  となる。

連続系列においては、自由場表示で考えてよく、自由場表示は、 $\mathcal{N} = 2$  Liouville と同じになる。まずこの  $\mathcal{N} = 2$  Liouville の部分についてどのような境界条件が可能かを見てみよう。まず、A 型と B 型の貼り合わせ条件は、自由場を使って次のように書ける。

- A 型

$$\partial\phi = \bar{\partial}\phi \text{ (Neumann)}, \partial Y = -\bar{\partial}Y \text{ (Dirichlet)}, \psi^\pm = \varepsilon \bar{\psi}^\mp.$$

- B 型

$$\partial\phi = \bar{\partial}\phi \text{ (Neumann)}, \partial Y = +\bar{\partial}Y \text{ (Neumann)}, \psi^\pm = \varepsilon \bar{\psi}^\pm.$$

ここで1つ注意を述べる。ここでは線型ディラトン場  $\phi$  に対して Dirichlet 境界条件を課すことは考えない。線型ディラトン場に対する Dirichlet 境界条件は非常に微妙な問題で単純に  $\partial\phi = -\bar{\partial}\phi$  としてしまうと  $T = \bar{T}$  とならないので共形対称性を保つという条件を壊してしまうのでだめである。

さて、線型ディラトンの部分の境界状態を  $|B_L\rangle\rangle$  としてこれについて考えよう。線型ディラトンの部分についてはいつも Neumann 境界条件であり自由に動かせるパラメータは無いので、境界状態は1つしかない。

線型ディラトンの円環振幅は、開弦の見方を使って簡単に計算することが出来る。

$$\mathrm{Tr}_O q^{L_0^O - (1+3Q^2)/24} = \frac{1}{\sqrt{\tau_2}\eta(\tau)} = \langle\langle B_L | \tilde{q}^{L_0^C + \bar{L}_0^C - (1+3Q^2)/12} | B_L \rangle\rangle. \quad (4.8)$$

線型ディラトンの部分は自由場であり、しかも U(1) 電荷を持たないので他の部分とは全く結合していない。したがって次のようにして全体の円環振幅は、線型ディラトンの部分を因数分解できる。線型ディラトン以外の部分の境界状態を  $|\alpha\rangle\rangle$  と書くことにすると全体の境界状態は、 $|B_L\rangle\rangle \otimes |\alpha\rangle\rangle$  と書くことが出来る。これを使って円環振幅は

$$\begin{aligned} & (\langle\langle B_L | \otimes \langle\langle \tilde{\alpha} |) \tilde{q}^{L_0^{(\text{total})} C + \bar{L}_0^{(\text{total})} C - c/12} (|B_L\rangle\rangle \otimes |\alpha\rangle\rangle) \\ &= \langle\langle B_L | \tilde{q}^{L_0^{(\text{linear dilaton})} C + \bar{L}_0^{(\text{linear dilaton})} C - (1+3Q^2)/12} | B_L \rangle\rangle \langle\langle \alpha | \tilde{q}^{L_0^{(\text{other})} C + \bar{L}_0^{(\text{other})} C - c_{\text{other}}/12} | \alpha \rangle\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tau_2}\eta(\tau)} \langle\langle \alpha | \tilde{q}^{L_0^{(\text{other})} C + \bar{L}_0^{(\text{other})} C - c_{\text{other}}/12} | \alpha \rangle\rangle. \end{aligned}$$

となり、線型ディラトンの部分とそれ以外に因数分解されることが分かった。この章では以後、線型ディラトンからの寄与を書かないことが多い。この場合でも全体の円環振幅は、線型ディラトンからの寄与  $\frac{1}{\sqrt{\tau_2}\eta(\tau)}$  をかけるだけで得られる。

さて、次に  $S^1$  の部分について見てみよう。 $S^1$  ボゾンの部分の境界状態は通常のコヒーレント状態で表される。A 型 (Dirichlet) の場合は、

$$|p\rangle\rangle_A := \exp \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} Y_{-n} \bar{Y}_{-n} \right] |p, \bar{p} = p\rangle,$$

とあらわされる。ここで  $|p, \bar{p}\rangle$  は、閉弦の Fock 真空で右回りと左回りの 0 モードの固有値がそれぞれ  $p, \bar{p}$  のものである。

B 型 (Neumann) の場合の境界状態は、A 型の境界状態の表示で  $\bar{Y}_n$  と  $\bar{p}$  の符号を変えることで次のように得られる。

$$|p\rangle\rangle_B := \exp \left[ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} Y_{-n} \bar{Y}_{-n} \right] |p, \bar{p} = -p\rangle.$$

これからの議論では、A 型 B 型両方の場合に成り立つ場合には、添え字  $A, B$  を書かない。

これらの境界状態の間の遷移振幅は Dedekind エータ関数を使って

$$\langle\langle p' | \tilde{q}^{HC} | p \rangle\rangle = \delta_{p,p'} \frac{\tilde{q}^{\frac{1}{2}p^2}}{\eta(\tilde{\tau})},$$

のようにあらわすことが出来る。しかしこの振幅は、モジュラー変換性があまり良くないので、閉弦のときと同様に境界状態の線形結合をとって、振幅のモジュラー変換性をよくする。

$$|m_0\rangle\rangle = \sum_{u \in \mathbb{Z}} |p = \frac{2KJu + m_0}{KQ}\rangle\rangle.$$

このようにしたとき、 $|m_0\rangle\rangle$  と  $|m_0\rangle\rangle'$  の間の遷移振幅は、 $SU(2)$  古典テータ関数を使って

$$\langle\langle m'_0 | \tilde{q}^{HC} | m_0 \rangle\rangle := \delta_{m_0 - m'_0}^{\text{mod } 2KJ} \frac{\Theta_{m_0, KJ}(\tilde{\tau})}{\eta(\tilde{\tau})},$$

と書ける。これはモジュラー変換性が非常によいのでこれを境界状態のブロックとする。

### 4.3.2 全体の境界状態と交点数

さて、上で行った議論に他の部分もいれて全体の境界状態を考えよう。Calabi-Yau 多様体に対応するところのみをとってきて

$$\mathbb{R}_\phi \times S^1 \times M_{N_1} \times M_{N_2} \times \cdots \times M_{N_r}$$

という理論を考え、ここに出てくる境界状態について考えよう。ただし本論では有理境界状態と呼ばれる境界状態のみを考える<sup>1</sup> [56]。有理境界状態とは、全体の Ishibashi 状態を個々の有理共形場理論の Ishibashi 状態のテンソル積とし、その線型結合で書けるような境界状態ということである。Ishibashi 状態は、次のように表示出来る。

$$|a\rangle\rangle := |s_0\rangle\rangle \otimes |m_0\rangle\rangle \otimes |\ell_1, m_1, s_1\rangle\rangle \otimes \cdots \otimes |\ell_r, m_r, s_r\rangle\rangle.$$

ここで、ラベル  $a = (\vec{\ell}, \vec{m}, \vec{s})$  を使った。また  $|\ell_j, m_j, s_j\rangle\rangle$  は、通常の  $\mathcal{N} = 2$  ミニマル模型の Ishibashi 状態である。

<sup>1</sup>Gepner 模型における有理境界状態以外の境界状態について [55] に議論がある。

Ishibashi 状態としては、閉弦のスペクトルにある状態のみが使えるので、貼り合わせ条件 A 型、B 型で使える状態は異なる。A 型の場合、左右で U(1) 電荷が同じになるのでベータ条件  $\vec{\beta} \cdot \vec{m} \in \mathbb{Z}$  を満たすすべての状態が使える。一方 B 型の場合、左右で U(1) 電荷が逆符号になるので次のような条件を満たす状態のみが使える。

$$\vec{m} = \frac{1}{2}b\vec{\beta}, \quad b \in \mathbb{Z}.$$

これらの Ishibashi 状態を使って Cardy 条件を満たす Cardy 状態 [20] を A 型、B 型それぞれについて作ることにする。

### A 型境界状態

A 型貼り合わせ条件に対応する Cardy 状態は、 $\alpha = (\vec{L}, \vec{M}, \vec{S})$  でラベルされる。ここで  $\vec{L}, \vec{M}, \vec{S}$  はそれぞれ  $\vec{\ell}, \vec{m}, \vec{s}$  と同じタイプのベクトルである。

Cardy 状態は、次のように Ishibashi 状態の線型結合で書かれる。

$$|\alpha\rangle\rangle_A = \frac{1}{\kappa_\alpha^A} \sum_a^{\text{beta}} B_\alpha^a |a\rangle\rangle_A,$$

$$B_\alpha^a = \frac{S_{\alpha a}}{\sqrt{S_{0a}}},$$

ここで記号  $0 := (\vec{\ell} = 0, \vec{m} = 0, \vec{s} = 0)$  を使った。上の式の中の規格化定数  $\kappa_\alpha^A$  は円環振幅が Cardy 条件を満たすように決める。

まず、2つの Cardy 状態  $|\alpha\rangle\rangle_A$  と  ${}_A\langle\langle\tilde{\alpha}|$  の間の NS セクターのみの振幅を計算しよう。この振幅は、開弦の方から見ると NS セクターの 1 ループの分配関数になる。先ほどの Cardy 状態の具体的な表式を使って計算すると、

$$\begin{aligned} Z_{\alpha\tilde{\alpha}}^A &= {}_A\langle\langle\tilde{\alpha}|\tilde{q}^{\frac{1}{2}H^C}|\alpha\rangle\rangle_A \text{ NS} \\ &= \frac{1}{\kappa_\alpha^A \kappa_{\tilde{\alpha}}^A} \sum_{a,\tilde{a}}^{\text{beta,NS}} B_\alpha^a B_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}*} \langle\langle\tilde{a}|\tilde{q}^{\frac{1}{2}H^C}|a\rangle\rangle \\ &= \frac{1}{\kappa_\alpha^A \kappa_{\tilde{\alpha}}^A} \sum_a^{\text{beta,NS}} B_\alpha^a B_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}*} f_a(\tilde{q}) \\ &= \frac{1}{\kappa_\alpha^A \kappa_{\tilde{\alpha}}^A} \sum_{a'}^{\text{beta,NS}} \sum_a B_\alpha^a B_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}*} S_{aa'} f_{a'}(q). \end{aligned}$$



ここで、 $B_\alpha^a B_{\tilde{\alpha}}^{a*} S_{aa'}$  をさらに計算すると

$$\begin{aligned} B_\alpha^a B_{\tilde{\alpha}}^{a*} S_{aa'} &= \frac{S_{\alpha a} S_{\tilde{\alpha} a'} S_{aa'}}{S_{0a}} \\ &= \frac{A_{\tilde{L}\tilde{l}} A_{\tilde{L}\tilde{l}} A_{\tilde{L}\tilde{l}}}{A_{\tilde{0}\tilde{l}}} \left( \prod_j \frac{1}{8N_j} \right) \frac{1}{8KJ} \mathbf{e} \left[ \vec{m} \cdot (\vec{M} - \vec{M} + \vec{m}') + \vec{s} \cdot (\vec{S} - \vec{S} + \vec{s}') \right]. \end{aligned}$$

ベータ条件を課した和  $\sum_a^{\text{beta,NS}}$  を実行するために Lagrange の未定常数  $\nu_0$  を導入し

$$\sum_{\vec{\ell}, \vec{m}}^{\text{beta,NS}} = \sum_{\vec{\ell}, \vec{m}}^{\text{NS}} \frac{1}{K} \sum_{\nu_0=0}^{K-1} \mathbf{e} \left[ \nu_0 \vec{\beta} \cdot \vec{m} \right].$$

と書き直して計算を進めると、開弦の NS セクターの分配関数が得られる。

$$Z_{\alpha\tilde{\alpha}}^A = \frac{1}{\xi_\alpha \xi_{\tilde{\alpha}}} \sum_{a'}^{\text{NS}} \sum_{\nu_0=0}^{K-1} \left( \prod_j N_{L_j \tilde{L}_j}^{\ell_j'} \right) \delta_{\vec{M} - \vec{M} + \vec{m}' + \nu_0 \vec{\beta}} f_{a'}(q),$$

ここで、 $\xi_\alpha$  は、 $\kappa_\alpha^A$  に比例するある定数である。また、 $N_{L_j \tilde{L}_j}^{\ell_j'}$  は、アフィン SU(2) の fusion 係数である。

次に、トポロジース的不変量である「開弦の Witten 指数」を計算しよう。この指数は、2つの接続層の間の交差形式の情報を持っていると考えらる。これは、後に幾何学的方法で得たものと比較することができる。

開弦の Witten 指数は、閉弦の見方からすると RR 振幅を  $|\alpha\rangle\rangle_A$  と  ${}_A\langle\langle\tilde{\alpha}|$  の RR 振幅を  $(-1)^{F_L}$  を挿入して評価することができる

$$I_{\alpha\tilde{\alpha}}^A := \text{Tr}_{\alpha, \tilde{\alpha}, \text{R}} [(-1)^F q^{H^O}] = {}_A\langle\langle\tilde{\alpha}|(-1)^{F_L} \tilde{q}^{\frac{1}{2}H^C} |\alpha\rangle\rangle_{A, \text{R}}.$$

先に求めた Cardy 状態を使って開弦の Witten 指数は

$$\begin{aligned} I_{\alpha\tilde{\alpha}}^A &= \frac{1}{\kappa_\alpha^A \kappa_{\tilde{\alpha}}^A} \sum_{a, \tilde{a}}^{\text{beta, R}} B_\alpha^a B_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}*} \langle\langle\tilde{a}|(-1)^{F_L} \tilde{q}^{\frac{1}{2}H^C} |a\rangle\rangle \\ &= \frac{1}{\kappa_\alpha^A \kappa_{\tilde{\alpha}}^A} \sum_a^{\text{beta, R}} B_\alpha^a B_{\tilde{\alpha}}^{a*} (-1)^{-\frac{1}{2}s_0 - \sum_j \frac{1}{2}s_j + \vec{\beta} \cdot \vec{m}} f_a(\tilde{q}) \\ &= \frac{1}{\xi_\alpha \xi_{\tilde{\alpha}}} \sum_{a'}^{\text{R}} \sum_{\nu_0=0}^{K-1} \left( \prod_{j=1}^r N_{L_j \tilde{L}_j}^{\ell_j'} \right) \delta_{\vec{M} - \vec{M} + \vec{m} + (\nu_0 + 1/2)\vec{\beta}} (-1)^{\sum_{j=0}^r \frac{s_j - \tilde{s}_j + s_j}{2}} f_{a'}(q), \end{aligned}$$

と計算できる。これは、さらに評価できて

$$\begin{aligned} I_{\alpha\tilde{\alpha}}^A &= \frac{1}{\xi_\alpha \xi_{\tilde{\alpha}}} (-1)^{\sum_{j=0}^r \frac{s_j - \tilde{s}_j}{2}} \sum_{\nu_0=0}^{K-1} \left( \prod_{j=1}^r N_{L_j \tilde{L}_j}^{2\nu_0 + M_j - \tilde{M}_j} \right) \delta_{-(2\nu_0+1)J+M_0-\tilde{M}_0}^{\text{mod } 2KJ} \frac{\theta_1(\tau)}{(\eta(\tau))^2} \\ &= \frac{1}{\xi_\alpha \xi_{\tilde{\alpha}}} (-1)^{\sum_{j=0}^r \frac{s_j - \tilde{s}_j}{2}} \left( \prod_{j=1}^r N_{L_j \tilde{L}_j}^{M_0 - \tilde{M}_0 + M_j - \tilde{M}_j - 1} \right) \delta_{M_0 - \tilde{M}_0 - J}^{\text{mod } 2J} \frac{\theta_1(\tau)}{(\eta(\tau))^2}. \end{aligned}$$

実際にはこの指数は  $\theta_1(\tau) = 0$  の因子を含むので 0 になってしまう。これは、閉弦の場合の楕円指数と同じ現象である。この意味はあとで述べる。

## B 型境界状態

A 型の場合とは異なり、B 型の場合に使える Ishibashi 状態は、 $\vec{m} = (1/2) b\vec{\beta}$ ,  $b \in \mathbb{Z}$  を満たすものに限られる。

これらの Ishibashi 状態の線型結合で Cardy 状態を次のように構成する。

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle\rangle_B &= \frac{1}{\kappa_\alpha^B} \sum_{\mathbf{a}; \vec{m} = \frac{1}{2} b\vec{\beta}}^{\text{beta}} B_\alpha^{\mathbf{a}} |\mathbf{a}\rangle\rangle, \\ B_\alpha^{\mathbf{a}} &= \frac{S_{\alpha\mathbf{a}}}{\sqrt{S_{0\mathbf{a}}}}. \end{aligned}$$

Cardy 状態  $B_\alpha^{\mathbf{a}}$  は、 $\vec{M}$  に対して、 $b\vec{\beta} \cdot \vec{M}$  という形を通じてのみ依存している。したがって、Cardy 状態は一つの数  $M := \vec{\beta} \cdot \vec{M}$  および 2 つのベクトル  $\vec{L}, \vec{S}$  でラベルされる。

A 型の場合と同じ方法を使い  $|\alpha\rangle\rangle_B$  と  ${}_B\langle\langle\tilde{\alpha}|$  の間の NS セクターの振幅を計算することができる。

$$\begin{aligned} Z_{\alpha\tilde{\alpha}}^B &= {}_B\langle\langle\tilde{\alpha}|\tilde{q}^{H^C}|\alpha\rangle\rangle_{B \text{ NS}} \\ &= \frac{1}{\zeta_\alpha \zeta_{\tilde{\alpha}}} \sum_{\mathbf{a}'}^{\text{even, NS}} \delta_{\frac{1}{2}(M - \tilde{M} + K\vec{\beta} \cdot \vec{m}')}^{\text{mod } K} \prod_{j=1}^r N_{L_j, \tilde{L}_j}^{\ell'_j} f_{\mathbf{a}'}(q). \end{aligned} \quad (4.9)$$

ここで  $\zeta_\alpha$  は  $\kappa_\alpha^B$  に比例する定数である。

B 型の場合にも A 型の場合と同様に開弦の Witten 指数を計算することができる。

$$\begin{aligned} I_{\alpha\tilde{\alpha}}^B &= {}_B\langle\langle\tilde{\alpha}|(-1)^{F_L} \tilde{q}^{H^C} |\alpha\rangle\rangle_{B \text{ R}} \\ &= \frac{1}{\zeta_\alpha \zeta_{\tilde{\alpha}}} (-1)^{\frac{s - \tilde{s}}{2}} \sum_{m'_1, \dots, m'_R} \delta_{\frac{1}{2}[M - \tilde{M} + \sum_j \frac{K(m'_j + 1)}{2N_j}]}^{\text{mod } K} \left( \prod_{j=1}^r N_{L_j, \tilde{L}_j}^{m_j - 1} \right) \frac{\theta_1(\tau)}{(\eta(\tau))^2}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

A 型の場合と同じようにやはり B 型の場合も開弦の Witten 指数は、0 になってしまう。

### 4.3.3 簡単な例

前とその前の節で示したように我々の模型の連続系列の Witten 指数は 0 になってしまう。これは、前の楕円指数の場合と同様に  $\frac{\theta_1(\tau)}{\sqrt{\tau_2}\eta(\tau)^3}$  ( $= 0$ ) と非自明な因子に因数分解出来る。これからは、この非自明な因子の意味について考えていくことにしよう。

簡単のために B 型の境界状態のみを考える。特異点をもつ多様体  $X$  は、底空間  $X/\mathbb{C}^\times$  上のファイバー束としてあらわせる。

$$X = X/\mathbb{C}^\times \times_f \mathbb{C}^\times.$$

ここで、記号 “ $\times_f$ ” は、ひねった積をあらわす。Gepner 的な記述においては、 $X/\mathbb{C}^\times$  の部分がミニマル模型の積であらわされ  $\mathbb{C}^\times$  の部分が  $\mathcal{N} = 2$  Liouville 理論になっていると思われる。B 型の貼り合わせ条件においては 2 つのボゾン  $\phi$ 、 $Y$  は Neuman 境界条件であった。つまり、すべての B 型の D プレインは  $\mathbb{C}^\times$  の方向に広がっているということである。したがって、 $\mathbb{C}^\times$  の部分は自明な構造をもつため B 型の D プレインは図 4.1 で示したように  $X/\mathbb{C}^\times$  の中のサイクルであらわされると言える。

前の閉弦の場合と同様に  $X$  が

$$z_1^N + z_2^N + \cdots + z_{n+1}^N = 0 \text{ in } \mathbb{C}^{n+1}.$$

と書けるような簡単な場合について考えよう。

$\mathbb{C}P^n \cong (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^\times$  であることを思い出すと  $X/\mathbb{C}^\times$  は、 $\mathbb{C}P^n$  の中の正に曲がった複素  $(n-1)$  次元多様体である。さらに解析を簡単にするために境界状態として  $L = S = 0$  のものだけをとってことにする。また、式 (4.9) において  $\zeta_\alpha = 1$  とする。これは、Cardy 条件を満たす。

このような簡単な場合には、境界状態はただ 1 つの数  $M$  によってラベルされ

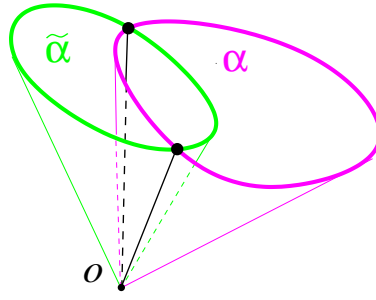


図 4.1: 非コンパクトな2つのサイクルの交わりの様子。全体の空間が非コンパクトで特異点をもつ Calabi-Yau 多様体  $X$  とし、原点  $O$  を孤立特異点とする。動径方向を  $\phi$  と  $Y$  方向とすると、すべての B 型 D ブレインは、この方向に広がっている。錐  $\alpha$  および  $\tilde{\alpha}$  が D ブレインをあらわす。これらの交わりは  $\mathbb{C}^\times$  方向の面になってしまっているためこの交点数は不定である。このために我々が開弦の Witten 指数から得た交点数は 0 になってしまったわけである。これらのサイクルを錐の底面に限った場合、 $X/\mathbb{C}^\times$  の中での交点数は、定義可能である。我々は、開弦の Witten 指数の非自明な因子がこの交点数に対応すると主張する。

る。これらの B 型境界状態の間の開弦の Witten 指数をあらわに書いてみると

$$\begin{aligned} \hat{I}_{M\tilde{M}} &= \sum_{m'_1, \dots, m'_r=0, \dots, 2N} \delta_{M-\tilde{M}+\sum_j(m'_j+1)}^{\text{mod } 2N} \left( \prod_{j=1}^r N_{0,0}^{m'_j-1} \right) \\ &= \sum_{m'_1, \dots, m'_r=0, \dots, 2N} \delta_{M-\tilde{M}+\sum_j(m'_j+1)}^{\text{mod } 2N} \prod_{j=1}^r \left( \delta_{m'_j,1} - \delta_{m'_j,2N-1} \right), \end{aligned}$$

となる。  $M$  および  $\tilde{M}$  は偶数なので  $a = M/2$ ,  $b = \tilde{M}/2$  となる整数  $a, b$  を導入して上の式を書き換えると次のような簡単な式になる。

$$\begin{aligned} \hat{I}_{a,b} &= \sum_{c=0}^r \delta_{a-b+c}^{\text{mod } N} \binom{r}{c} (-1)^{r-c} \\ &= (-1)^r \sum_{m \geq 0} \binom{r}{b-a+mN} (-1)^{b-a+mN}. \end{aligned}$$

この交点数を行列として書いてみると次の  $I_G$  という行列になる。

$$I_G = (g^{-1} - 1)^r, \quad g^N = 1. \quad (4.11)$$

ここで  $g$  は、次の  $N \times N$  行列である。

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ここで得られた交点形式は対称でも反対称でもない。これから (反) 対称な交点形式について述べよう。  $I_G$  の (反) 対称部分を

$$I_\diamond := -[I_G^t + (-1)^{r-1} I_G],$$

とすると、  $I_\diamond$  の形は

$$I_\diamond = (g^{-1} - 1)^r (g^{r-N} - 1). \quad (4.12)$$

と書くことが出来る。これは次のように解釈できる。

通常コンパクトな Gepner 模型は次の超ポテンシャルをもつ Landau-Ginzburg 模型である。

$$W = z_0^{N_0} + z_1^{N_1} + \cdots + z_r^{N_r},$$

この場合の交点形式は、次のように書かれる [57, 58]。

$$I_{L=\tilde{L}=0} = \prod_j (g^{-K/N_j} - 1), \quad K = \text{lcm}(N_j).$$

[59] にしたがって負で分数のべきを入れて

$$W = z_0^{-N/(r-N)} + z_1^N + \cdots + z_r^N,$$

で形式的に交点形式を当てはめると (4.12) が得られる。

これらの結果を次の節で幾何学的に得た交点形式と比較する。

## 4.4 幾何学的解釈

この節では、多様体  $M = X/\mathbb{C}^\times$  のトポロジ的な性質について議論する。この節では純粋に幾何学的方法で解析し前節で得られた結果と比較する。これによって我々が構成した共形場理論による記述の有効性が確かめられることになる。

### 4.4.1 交点形式

まず、複素  $d = n - 1$  次元の正に曲がった多様体  $M = X/\mathbb{C}^\times$

$$M; z_1^N + z_2^N + \cdots + z_r^N = 0 \quad \text{in } \mathbb{C}P^{r-1},$$

$$r = d + 2 = n + 1,$$

を考える。この多様体の第 1 Chern 類は、コホモロジーの元  $H \in H^2(M)$  を使って

$$c_1(TM) = (r - N)H,$$

と書ける。

$M$  は、射影空間  $V = \mathbb{C}P^{r-1}$  中の超曲面としてあらわされているので  $V$  の特性類を  $M$  に制限することで  $M$  のトポロジックな性質を議論しよう。前節で議論した D ブレインは超対称サイクルである。Gepner 点で便利な超対称サイクルの基底は  $V$  上の直線束（接続層） $\{\mathcal{O}(-a)\}$  ( $a = 0, 1, 2, \dots, r-1$ ) であらわされるものである [60–65]。関連する解析は、[66–69] で行われている。また、 $\mathcal{N} = 2$  ゲージ理論への応用が [70, 59, 71] で提案されている。

円環振幅であらわされる開弦の Witten 指数は、ゲージベクトル束  $(E, E')$  の Dirac 演算子の指数に対応する。言い換えると開弦の Witten 指数に対応する接続層の間の自然な内積は、 $V$  上の相対 Euler 数  $\chi_V(E, E')$  である。 $E = \mathcal{O}(-a)$ 、 $E' = \mathcal{O}(-b)$  とした場合この内積は、

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(-a), \mathcal{O}(-b) \rangle_V &:= \chi_V(\mathcal{O}(-a), \mathcal{O}(-b)) \\ &= \int_V \text{ch}(\mathcal{O}(-a)^*) \text{ch}(\mathcal{O}(-b)) \text{Td}(TV) \\ &= \binom{r-1+a-b}{a-b} =: I_{a,b}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$(0 \leq a \leq r-1; 0 \leq b \leq r-1),$$

$$\text{Td}(TV) = \left( \frac{H}{1 - e^{-H}} \right)^r,$$

となる。今後、便宜的な記号  $R_a := \mathcal{O}(-a)$  ( $a = 0, 1, \dots, r-1$ ) を使うことにする。

次に、上の内積に対する  $\{R_a\}$  の双対基底  $\{S^a\}$ ,  $(0 \leq a \leq r-1)$  を導入する。 $S^a$  は、

$$\text{ch}(S^a)^* := \sum_b (I^{-1})_{a,b} \text{ch}(R_b)^* = \sum_b (-1)^{a-b} \binom{r}{a-b} \text{ch}(R_b)^*,$$

となる。これらは上で定義した内積に対して、次のような直交条件を満たす。

$$\langle S^a, R_b \rangle_V = \chi_V(S^a, R_b) = \chi_V(S^{a*} \otimes R_b) = \delta^a_b.$$

直線束の集合  $\{\mathcal{O}(a)\}$  ( $a = 0, 1, \dots, r-1$ ) は、 $V = \mathbb{C}P^{r-1}$  の上の接続層の「強い例外集合 (strongly exceptional collection)」になっていて  $V$  中の「螺旋 (helix)」の基礎集合になっている。

ここで次の「左ミュートーション  $\mathbf{L}$ 」という操作を導入する。この定義は完全系列

$$0 \rightarrow \text{Ext}^0(\mathcal{O}(a-1), \mathcal{O}(a)) \otimes \mathcal{O}(a-1) \rightarrow \mathcal{O}(a) \rightarrow \mathbf{L}_{\mathcal{O}(a-1)}(\mathcal{O}(a)) \rightarrow 0, \quad (4.14)$$

または、

$$0 \rightarrow \mathbf{L}_{\mathcal{O}(a-1)}(\mathcal{O}(a)) \rightarrow \text{Ext}^0(\mathcal{O}(a-1), \mathcal{O}(a)) \otimes \mathcal{O}(a-1) \rightarrow \mathcal{O}(a) \rightarrow 0, \quad (4.15)$$

でなされる。ここで  $V$  に対しては  $\text{Ext}^0(\mathcal{O}(a-1), \mathcal{O}(a)) = H^0(\mathcal{O}(a-1), \mathcal{O}(a)) \neq 0$  という事実を使った。重要なのは左ミュートーションで作られる接続層の Chern 指標に対する関係式

$$\pm \text{ch}(\mathbf{L}_{a-1}\mathcal{O}(a)) = \text{ch}(\mathcal{O}(a)) - \chi_V(\mathcal{O}(a-1), \mathcal{O}(a)) \text{ch}(\mathcal{O}(a-1)), \quad (4.16)$$

である。ここで便宜的な記号  $\mathbf{L}_{a-1}\mathcal{O}(a) = \mathbf{L}_{\mathcal{O}(a-1)}\mathcal{O}(a)$  を使った。式 (4.16) の符号は、左ミュートーションで式 (4.14) と式 (4.15) のどちらを使ったかによって決まる。つまり、式 (4.14) を使った場合 (+)、式 (4.15) を使った場合 (-)、となる。(4.16) の関係次々と使うことにより  $S^{a*}$  を次のように書き直すことが出来る。

$$\text{ch}(S^a)^* = \sum_{b=0}^a (-1)^{a-b} \binom{r}{a-b} \text{ch}(\mathcal{O}(b)) = \text{ch}(\mathbf{L}_0 \mathbf{L}_1 \cdots \mathbf{L}_{a-1} \mathcal{O}(a)). \quad (4.17)$$

つまり、それぞれの  $S^{a*}$  は、 $R_a^* = \mathcal{O}(a)$  に左ミュートーションを次々と施すことにより得られる。

次に、接続層  $\{\mathcal{O}(-a)\}$  に対して  $\mathbb{Z}_N$  の周期性を持たせるような同値類  $\mathcal{O}(-[a])$  を導入する。これは、 $M$  が  $\mathbb{Z}_N$  の対称性を持つために導入されるもので、次の式で定義する。

$$\mathcal{O}(-[a + N]) = \mathcal{O}(-[a]).$$

$[a]$  は、 $N$  を法とした余りで定義される。同じことだが数  $a$  を巡回群  $\mathbb{Z}_N$  の元とする。この同値類の元を便宜的に  $R_{[a]} = \mathcal{O}(-[a])$  ( $a = 0, 1, \dots, N-1$ ) と書くことにする。

前の節で議論した、 $M$  上の弦理論に対応すると思われる Gepner 模型の開弦の Witten 指数と比較すべきものは、上の同値類の間の次のような内積である。

$$\mathbf{I}_{a,b} := \langle R_{[a]}, R_{[b]} \rangle := \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq 0} \int_M \text{ch}(R_{a+N\ell})^* \text{ch}(R_{b+Nm}) \text{Td}(TM), \quad (4.18)$$

$$\text{Td}(TM) = \left( \frac{H}{1 - e^{-H}} \right)^r \left( \frac{1 - e^{-NH}}{NH} \right).$$

$m$  の和を実行すると、式 (4.18) は、次のような形に書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \langle R_{[a]}, R_{[b]} \rangle &= \sum_{\ell \geq 0} \int_M \text{ch}(R_{a+N\ell})^* \text{ch}(R_b) \frac{1}{1 - e^{-NH}} \cdot \text{Td}(TM) \\ &= \sum_{\ell \geq 0} \int_V \text{ch}(R_{a+N\ell})^* \text{ch}(R_b) \text{Td}(TV). \end{aligned}$$

ここで、 $\int_M(\dots) = \int_V NH \times (\dots)$  という関係を使った。これらから次のような内積の表式が得られる。

$$\begin{aligned} \langle R_{[a]}, R_{[b]} \rangle &= \sum_{\ell \geq 0} \int_V \text{ch}(R_{a+N\ell})^* \text{ch}(R_b) \text{Td}(TV) \\ &=: \sum_{c=0}^{r-1} \delta_{a,c}^{\text{mod } N} \int_V \text{ch}(\mathcal{O}(-a))^* \text{ch}(\mathcal{O}(-b)) \text{Td}(TV) = \sum_{c=0}^{r-1} \delta_{a,c}^{\text{mod } N} I_{c,b}, \\ &\quad (0 \leq a \leq N-1; 0 \leq b \leq N-1). \end{aligned}$$

この式は、式 (4.13) で定義される  $V$  の上の接続層の内積の形と同値類の取り方から見て非常に自然なものである。またこの  $\mathbf{I}_{a,b}$  は、差  $(a-b)$  のみに依存して



いるので  $I_{a-b}$  と書くこともできる。この  $I_{a-b}^2$  は一般に対称でも反対称でもない。  $a$  と  $b$  を入れ替えると

$$I_{a-b} = (-1)^r I_{b-a+N-r},$$

のように振る舞う。これは、  $c_1(TM) = 0$  のときのみ対称 ( $r =$  偶数のとき) または反対称 ( $r =$  奇数のとき) である。次のように (反) 対称の内積  $\mathcal{I}_{a,b}$  も定義することが出来る。

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a,b} &:= I_{a,b} + (-1)^{r-1} I_{b,a} \\ &= I_{a-b} + (-1)^{r-1} I_{b-a}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\mathcal{I}_{a,b} = (-1)^{r-1} \mathcal{I}_{b,a}.$$

この  $\mathcal{I}_{a,b}$  は特性類を使って次のようにあらわすことも出来る。

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a,b} &= \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq 0} \int_M \text{ch}(R_{a+N\ell})^* \text{ch}(R_{b+Nm}) \text{Td}(TM) \cdot (1 - e^{-c_1(TM)}), \\ &= \sum_{\ell \geq 0} \int_V \text{ch}(R_{a+N\ell})^* \text{ch}(R_b) \text{Td}(TV) \cdot (1 - e^{-(r-N)H}). \end{aligned}$$

さて、次に  $\{R_{[a]}\}$  の双対基底  $\{S^{[a]}\}$  を導入する。Chern 指標であらわすと

$$\text{ch}(S^{[a]})^* = \sum_{c=0}^{r-1} \delta_{c,a}^{\text{mod } N} \text{ch}(S^c)^* := \sum_{\ell \geq 0} \text{ch}(S^{a+N\ell})^*, \quad (4.20)$$

<sup>2</sup>A ループ種数を使って (反) 対称な内積  $I_{a,b}^D$  と  $I_{[a],[b]}^D$  を次のように作ることもできる。

$$\begin{aligned} I_{a,b}^D &:= \int_M \text{ch}(R_a)^* \text{ch}(R_b) \hat{A}(TM), \\ I_{[a],[b]}^D &:= \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq 0} \int_M \text{ch}(R_{a+N\ell})^* \text{ch}(R_{b+Nm}) \hat{A}(TM), \\ \hat{A}(TM) &= e^{-\frac{1}{2}c_1(TM)} \text{Td}(TM), \\ I_{a,b}^D &= (-1)^{r-2} I_{b,a}^D, \quad I_{[a],[b]}^D = (-1)^{r-2} I_{[b],[a]}^D. \end{aligned}$$

しかし本論では、この内積については議論しない。

となる。これらは直交条件

$$\begin{aligned}
\langle S^{[a]}, R_{[b]} \rangle &= \chi_V(S^{[a]}, R_{[b]}) \\
&= \sum_{c=0}^{r-1} \delta_{c,a}^{\text{mod } N} \int_V \text{ch}(S^c)^* \text{ch}(R_b) \text{Td}(TV) \\
&= \sum_{c=0}^{r-1} \delta_{c,a}^{\text{mod } N} \delta_{c,b} = \delta_{b,a}^{\text{mod } N} = \delta_a^b, \\
\langle R_{[a]}, S^{[b]} \rangle &= \chi_V(R_{[a]}, S^{[b]}) \\
&= \sum_{c=0}^{r-1} \delta_{c,a}^{\text{mod } N} \int_V \text{ch}(R_c^*) \text{ch}(S^b) \text{Td}(TV) \\
&= \sum_{c=0}^{r-1} \delta_{c,a}^{\text{mod } N} \delta_{c,b} = \delta_{b,a}^{\text{mod } N} = \delta_a^b, \\
&(0 \leq a \leq N-1; 0 \leq b \leq N-1),
\end{aligned}$$

を満たす。ここで、 $S^{[a]}, S^{[b]}$  ( $a, b = 0, 1, \dots, N-1$ ) の内積を計算してみると

$$\begin{aligned}
\langle S^{[a]}, S^{[b]} \rangle &= \chi_V(S^{[a]}, S^{[b]}) \\
&= \sum_{c=0}^{r-1} \delta_{c,a}^{\text{mod } N} \int_V \text{ch}(S^c)^* \text{ch}(S^b) \text{Td}(TV) \\
&= \sum_{c=0}^{r-1} \delta_{a,c}^{\text{mod } N} (I^{-1})_{c,b} = \sum_{c=0}^r \delta_{a,c}^{\text{mod } N} \binom{r}{c-b} \cdot (-1)^{c-b} \\
&= \sum_{m \geq 0} \binom{r}{a-b+Nm} (-1)^{a-b+Nm}, \tag{4.21} \\
&(0 \leq a \leq N-1; 0 \leq b \leq N-1).
\end{aligned}$$

前に共形場理論の立場から求めた交点形式は、

$$\begin{aligned}
(I_G)_{a,b}^t &= (-1)^r \sum_{m \geq 0} \binom{r}{a-b+Nm} (-1)^{a-b+Nm}, \tag{4.22} \\
&(0 \leq a \leq N-1; 0 \leq b \leq N-1).
\end{aligned}$$

であったが、これは、式 (4.21) と符号 (重要ではない) を除いて完全に一致している。つまり我々が前章で求めた境界状態は、接続層の同値類  $\{S^{[a]}\}$  ( $a = 0, 1, \dots, N-1$ ) に対応しているということである。

ここで求めた交点形式は、対称でも反対称でもなかった。式 (4.19) を (反) 対称化したものは、

$$\begin{aligned}
\langle S^{[a]}, S^{[b]} \rangle_{\mathcal{I}} &= \langle S^{[a]}, S^{[b]} \rangle + (-1)^{r-1} \langle S^{[b]}, S^{[a]} \rangle \\
&= \sum_{c=0}^{r-1} \delta_{a,c}^{\text{mod } N} \binom{r}{c-b} \cdot (-1)^{c-b} + (-1)^{r-1} \sum_{c=0}^{r-1} \delta_{b,c}^{\text{mod } N} \binom{r}{c-a} \cdot (-1)^{c-a} \\
&= \sum_{m \geq 0} \binom{r}{a-b+Nm} (-1)^{a-b+Nm} + (-1)^{r-1} \sum_{m \geq 0} \binom{r}{b-a+Nm} (-1)^{b-a+Nm}, \\
&\quad (0 \leq a \leq N-1; 0 \leq b \leq N-1).
\end{aligned}$$

ここで、 $\langle S^{[a]}, S^{[b]} \rangle_{\mathcal{I}} = (-1)^{r-1} \langle S^{[b]}, S^{[a]} \rangle_{\mathcal{I}}$  である。式 (4.12) の (反) 対称化した交点形式は、

$$I_G = (g^{-1} - 1)^r,$$

$$I_{\blacklozenge} = (g^{-1} - 1)^r (g^{r-N} - 1) = (-1)[I_G + (-1)^{r-1} I_G^t],$$

$$(-1)^{r-1} (I_{\blacklozenge})_{a,b}^t = (-1)^r [(I_G)_{a,b}^t + (-1)^{r-1} (I_G)_{a,b}]$$

$$= \sum_{m \geq 0} \binom{r}{a-b+Nm} (-1)^{a-b+Nm} + (-1)^{r-1} \sum_{m \geq 0} \binom{r}{b-a+Nm} (-1)^{b-a+Nm},$$

である。ここで  $(I_{\blacklozenge})^t = (-1)^{r-1} I_{\blacklozenge}$  とおいた。

まとめると共形場理論での交点形式  $(-1)^{r-1} (I_{\blacklozenge})_{a,b}^t$  は、幾何学的な交点形式  $\langle S^{[a]}, S^{[b]} \rangle_{\mathcal{I}}$  に次のように対応している。

$$(-1)^{r-1} (I_{\blacklozenge})_{a,b}^t = \langle S^{[a]}, S^{[b]} \rangle_{\mathcal{I}},$$

$$\langle S^{[b]}, S^{[a]} \rangle_{\mathcal{I}} = (-1)^{r-1} \langle S^{[a]}, S^{[b]} \rangle_{\mathcal{I}}.$$

したがって、(反) 対称化した交点形式が一致することから境界状態  $|\{L=0\}; M=2a; S=0\rangle$  は、接続層  $S^{[a]*}$  に対応することが分かった。

形式的には、 $L \neq 0$  の共形場理論の境界状態もある接続層  $\text{ch}(E) = \sum_a q_a \text{ch}(S^{[a]*})$  で書くことができる。(コンパクトの場合には [60–65] などを見よ。)



## 第5章 離散系列

この章では、 $SL(2, \mathbb{R})$  の離散系列の表現からできる部分について閉弦の理論のモジュラー不変な分配関数の構成、境界状態の方法による D ブレインの解析を行う。この章の議論は、[72] に基づくものである。

### 5.1 一般の非コンパクト Gepner 模型

この節では、非コンパクト Gepner 模型の離散系列のうち、 $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  のレベルが整数のものを扱う。具体的には、いくつかの  $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  Kazama-Suzuki 模型といくつかの  $\mathcal{N} = 2$  ミニマル模型からなる模型である。このタイプの模型は、ALE 模型 [73] や [59] で議論されている Seiberg-Witten 曲線を含んでいる。

ここでは、それぞれの  $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  の離散部分のみしか扱わないが連続部分や離散と連続が混じった部分などがある。

#### 5.1.1 閉弦の理論

ここでは、閉弦の理論を考え、その分配関数を構成しよう。ここでは、内部空間のみを考える。ここで考える模型は、

$$\left( \frac{SL(2, \mathbb{R})_{\tilde{N}_1}}{U(1)} \times \frac{SL(2, \mathbb{R})_{\tilde{N}_2}}{U(1)} \times \cdots \times \frac{SL(2, \mathbb{R})_{\tilde{N}_{\tilde{r}}}}{U(1)} \times \frac{SU(2)_{N_1}}{U(1)} \times \frac{SU(2)_{N_2}}{U(1)} \times \cdots \times \frac{SU(2)_{N_r}}{U(1)} \right) / \mathbb{Z}_K,$$

とあらわされるものである。ただし、 $K = \text{lcm}(\tilde{N}_j, N_j) |_{j=1, \dots, \tilde{r}, j=1, \dots, r}$  である。ここに出てきているオービフォールド射影は、 $U(1)$  電荷が整数の状態への射影である。この理論は、2次元の  $\mathcal{N} = 2$  Landau-Ginzburg 理論でその超ポテンシャルが

$$W = Y_1^{-\tilde{N}_1} + Y_2^{-\tilde{N}_2} + \cdots + Y_{\tilde{r}}^{-\tilde{N}_{\tilde{r}}} + X_1^{N_1} + \cdots + X_r^{N_r},$$

とあらわされるものと同じである。ここで  $Y_1, \dots, Y_{\tilde{r}}, X_1, \dots, X_r$  はカイラル超場である。ここでもベータ法によりモジュラー不変な分配関数を構成し、右回りと左回りの組み方を決定する。

この理論の中心電荷は、

$$c/3 = \sum_{j=1}^{\check{r}} \frac{\check{N}_j + 2}{\check{N}_j} + \sum_{j=1}^r \frac{N_j - 2}{N_j} = r + \check{r} + \sum_{j=1}^{\check{r}} \frac{2}{\check{N}_j} - \sum_{j=1}^r \frac{2}{N_j},$$

と書ける。

ここでは、Calabi-Yau 多様体上のシグマ模型を記述したいので  $c/3$  が整数の場合のみを取り扱う。さらに技術的な理由から  $\check{r} + r - c/3$  が偶数の場合のみを取り扱う。

この理論全体のモジュールはそれぞれの部分理論のテンソル積になる。このモジュールの指標はそれぞれの部分理論の指標の積で次のようにあらわされる。

$$f_a(\tau, z) := \check{\chi}_{\check{m}_1}^{\check{\ell}_1, \check{s}_1}(\tau, z) \cdots \check{\chi}_{\check{m}_{\check{r}}}^{\check{\ell}_{\check{r}}, \check{s}_{\check{r}}}(\tau, z) \chi_{m_1}^{\ell_1, s_1}(\tau, z) \cdots \chi_{m_r}^{\ell_r, s_r}(\tau, z).$$

ここで、 $\chi_m^{\ell, s}$  は、 $\mathcal{N} = 2$  ミニマル模型の指標である。ラベル  $a$  は次のように定義する。

$$\vec{\ell} = (\check{\ell}_1, \dots, \check{\ell}_{\check{r}}; \ell_1, \dots, \ell_r), \quad \vec{m} = (\check{m}_1, \dots, \check{m}_{\check{r}}; m_1, \dots, m_r), \quad \vec{s} = (\check{s}_1, \dots, \check{s}_{\check{r}}; s_1, \dots, s_r),$$

$$a = (\vec{\ell}, \vec{m}, \vec{s}).$$

ここで、 $(\check{\ell}_j, \check{m}_j, \check{s}_j)$  は、それぞれの  $SL(2, \mathbb{R})_{\check{N}_j}/U(1)$  のモジュールのラベルであり、 $(\ell_j, m_j, s_j)$  は、 $SU(2)_{N_j}/U(1)$  のモジュールのラベルである。ベータ法を使うために  $\vec{m}$  同士の間、 $\vec{s}$  同士の間次のように内積を定義する。

$$\vec{m} \cdot \vec{m}' := - \sum_j \frac{\check{m}_j \check{m}'_j}{2\check{N}_j} + \sum_j \frac{m_j m'_j}{2N_j}, \quad \vec{s} \cdot \vec{s}' := - \sum_j \frac{\check{s}_j \check{s}'_j}{4} - \sum_j \frac{s_j s'_j}{4}.$$

また、 $\vec{m}$  と同じタイプのベータベクトル  $\vec{\beta} = (2, \dots, 2; 2, \dots, 2)$  を導入する。このベータベクトルを使って、 $U(1)$  電荷が整数という条件は、

$$\vec{\beta} \cdot \vec{m} \in \mathbb{Z},$$

と書ける。この条件をベータ条件と呼ぶことにする。

モジュラー不変な分配関数を構成するために  $f_a$  のモジュラー変換性が必要である。このモジュラー変換性は、

$$f_a(\tau + 1, z) = e^{\left[ - \sum_j \frac{\check{\ell}_j(\check{\ell}_j - 2)}{4\check{N}_j} + \sum_j \frac{\ell_j(\ell_j + 2)}{4N_j} - \frac{1}{2}(\vec{s} \cdot \vec{s}' + \vec{m} \cdot \vec{m}') + \frac{c}{12} \right]} f_a(\tau, z),$$

$$f_a(-1/\tau, z/\tau) = e^{\left[ \frac{c}{6} \frac{z^2}{\tau} \right]} \sum_{a'} S_{aa'} f_{a'}(\tau, z),$$

$$S_{aa'} := \left( \prod_{j=1}^{\check{r}} (-1) A_{\check{\ell}_j - 2, \check{\ell}'_j - 2} \right) \left( \prod_{j=1}^r A_{\ell_j, \ell'_j} \right) \frac{1}{8N} e^{[\vec{s}' \cdot \vec{s} + \vec{m}' \cdot \vec{m}]}, \quad (5.1)$$

となる。ここで、 $A_{\ell\ell'}$  は、 $SU(2)$  の  $S$  変換行列である。

これらの記号を使って、NS セクターの分配関数は

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{2^{\tilde{r}+r}} \sum_{b=0}^{K-1} \sum_{\substack{\vec{\ell}, \vec{m}, \vec{s} \\ \tilde{s}_j, s_j, \check{s}_j, \check{s}_j = 0, 2 \\ \vec{\beta} \cdot \vec{m} \in \mathbb{Z}}} f_{(\vec{\ell}, \vec{m}, \vec{s})}(\tau) \bar{f}_{(\vec{\ell}, \vec{m}+b\vec{\beta}, \vec{s})}(\bar{\tau}),$$

と書ける。この分配関数が実際にモジュラー不変であることは式 (5.1) を使って確かめることができる。

この模型に対してもトポロジ的な性質を見るために楕円種数を調べよう。楕円種数  $I(\tau, \bar{\tau}, z) := \text{Tr}_{\text{RR}}[(-1)^F q^{L_0-c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0-c/24} y^{J_0}]$  は、次のようになる。

$$I(\tau, \bar{\tau}, z) = \frac{1}{2^{\tilde{r}+r}} \sum_{b=0}^{K-1} \sum_{\substack{\vec{\ell}, \vec{m} \\ \vec{\beta} \cdot \vec{m} \in \mathbb{Z}}} I_{\vec{m}}^{\vec{\ell}}(\tau, z) \bar{I}_{\vec{m}+b\vec{\beta}}^{\vec{\ell}}(\bar{\tau}, 0),$$

$$I_{\vec{m}}^{\vec{\ell}}(\tau, z) = \check{I}_{\vec{m}_1}^{\check{\ell}_1}(\tau, z) \dots \check{I}_{\vec{m}_r}^{\check{\ell}_r}(\tau, z) I_{\vec{m}_1}^{\ell_1}(\tau, z) \dots I_{\vec{m}_r}^{\ell_r}(\tau, z). \quad (5.2)$$

ここで、 $I_m^\ell = \chi_m^{\ell,1} - \chi_m^{\ell,-1}$ 、 $\check{I}_m^{\check{\ell}} = \check{\chi}_m^{\check{\ell},1} - \check{\chi}_m^{\check{\ell},-1}$  とした。この楕円種数が正しいモジュラー変換性 [54] を持つことは確かめることができる。

Witten 指数は、 $I(\tau, \bar{\tau}, 0)$  と書ける。この Witten 指数は、実際には  $\tau$  によらない。

### 5.1.2 D ブレイン

ここでは、上で考えた模型に対する境界状態や円環振幅、そして開弦の Witten 指数について調べよう。これは、連続系列で行ったのとほぼ同じ方法で解析することが出来る。ここでは、結果のみを示すことにする。

$\mathcal{N} = 2$  超共形代数には、2 種類の貼り合わせ条件 (A 型と B 型) が存在する。[74]。どちらの場合も境界状態のラベルを  $\alpha = (\vec{L}, \vec{M}, \vec{S})$  (a と同じ形のラベル) とする。

A 型の場合、開弦の NS の分配関数は、

$$Z_{\alpha\check{\alpha}}^A := \text{Tr}_{\alpha\check{\alpha}, A, \text{NS}} [q^{L_0-c/24}]$$

$$= \frac{1}{2^{\tilde{r}+r}} \sum_{a'} \sum_{b=0}^{K-1} \left( \prod_{j=1}^{\tilde{r}} N_{\check{L}_j-2, \check{L}_j-2}^{\check{\ell}'_j-2} \delta_{-\check{M}_j+\check{M}_j+\check{m}'_j+2b}^{\text{mod } 2\check{N}_j} \right) \left( \prod_{j=1}^r N_{L_j, \tilde{L}_j}^{\ell'_j} \delta_{-M_j+\tilde{M}_j+m'_j+2b}^{\text{mod } 2N_j} \right) f_{a'}(\tau).$$

ここで  $N_{\check{L}\tilde{L}}^\ell$  は、 $SU(2)$  の fusion 係数である。

A 型の開弦の Witten 指数は、

$$I_{\alpha\tilde{\alpha}}^A := \text{Tr}_{\alpha\tilde{\alpha}, A, R} [q^{L_0 - c/24} (-1)^F] = (-1)^{\frac{1}{2}(\tilde{S} - S)} \sum_{b=0}^{K-1} \left( \prod_j N_{\tilde{L}_j - 2, \tilde{L}_j - 2}^{\tilde{M}_j - \tilde{M}_j + 2b - 2} \right) \left( \prod_j N_{L_j \tilde{L}_j}^{M_j - \tilde{M}_j + 2b - 2} \right), \quad (5.3)$$

となる。ここで  $S = \sum_{j=1}^{\tilde{r}} \check{S}_j + \sum_{j=1}^r S_j$ ,  $\tilde{S} = \sum_{j=1}^{\tilde{r}} \check{\tilde{S}}_j + \sum_{j=1}^r \tilde{S}_j$  である。

一方 B 型の場合、開弦の NS の分配関数は、

$$Z_{\alpha\tilde{\alpha}}^B := \text{Tr}_{\alpha\tilde{\alpha}, B, NS} [q^{L_0 - c/24}] = \frac{1}{2^{\tilde{r}+r}} \sum_{a'}^{NS} \left( \prod_{j=1}^{\tilde{r}} N_{\tilde{L}_j - 2, \tilde{L}_j - 2}^{\check{\ell}'_j - 2} \right) \left( \prod_{j=1}^r N_{L_j \tilde{L}_j}^{\ell'_j} \right) \delta_{-M + \tilde{M} + K\vec{\beta} \cdot \vec{m}}^{\text{mod } K} f_{a'}(\tau),$$

となる。ここで  $M = K\vec{\beta} \cdot \vec{M}$ ,  $\tilde{M} = K\vec{\beta} \cdot \vec{\tilde{M}}$  である。開弦の Witten 指数は、

$$I_{\alpha\tilde{\alpha}}^B := \text{Tr}_{\alpha\tilde{\alpha}, B, R} [q^{L_0 - c/24} (-1)^F] \\ = (-1)^{\frac{1}{2}(\tilde{S} - S)} \sum_{\vec{m}'} \left( \prod_{j=1}^{\tilde{r}} N_{\tilde{L}_j - 2, \tilde{L}_j - 2}^{\check{m}'_j - 1} \right) \left( \prod_{j=1}^r N_{L_j \tilde{L}_j}^{m'_j - 1} \right) \delta_{-M + \tilde{M} + K\vec{\beta} \cdot (\vec{m}' + 1/2\vec{\beta})}^{\text{mod } K}, \quad (5.4)$$

となる。

どちらの貼り合わせ条件の場合でも開弦の Witten 指数は、 $\tau$  によらない。

### 5.1.3 例 — ALE 空間 —

この節では、上で考えた模型の例として  $A_{N-1}$  ALE 空間をあらわす模型のについて詳しく調べる。この模型は、 $SL(2, \mathbb{R})_N / U(1)$  Kazama-Suzuki 模型 1 つとレベル  $(N-2)$  ミニマル模型 1 つからなる [73]。

この  $A_{N-1}$  ALE 模型の楕円種数は、式 (5.2) の特別な場合として得ることができる。特に開弦の Witten 指数は  $I(\tau, \bar{\tau}, z=0) = N-1$  となるが、これは  $A_{N-1}$  ALE 空間の  $(2, 2)$  コンパクトコホモロジーの次元  $(N-1)$  と完全に一致している。 $A_{N-1}$  ALE 空間の  $(2, 2)$  以外のコンパクトコホモロジーは、0 次元であることが知られている。

開弦の Witten 指数については式 (5.3) と式 (5.4) の特別な場合として得られる。今の  $A_{N-1}$  ALE 模型の場合は、A 型と B 型の結果は同じになり、これは  $A_{N-1}$  ALE 空間のミラーが自分自身ということと対応している。開弦の Witten 指数の結果は、

$$I_{\alpha\tilde{\alpha}} = (-1)^{(S - \tilde{S})/2} \sum_{m=0}^{2N-1} N_{\tilde{L}_1 - 2, \tilde{L}_1 - 2}^{M - \tilde{M} + m} N_{L_1 \tilde{L}_1}^m. \quad (5.5)$$



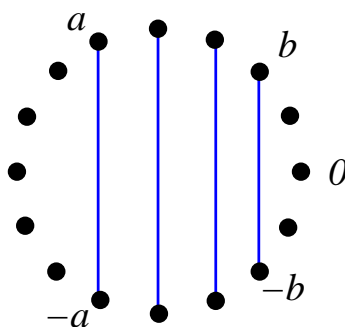


図 5.1: 境界状態  $\check{L}_1, L_1, M = -1, S = 0$   $\check{L}_1 + L_1 \in 2\mathbb{Z}$  に対応するサイクルのイメージ。ALE 空間を  $\mathbb{C}^3$  内の  $x^N + y^2 + z^2 = \mu$  であらわされる超曲面としたときの  $x$  平面に射影した絵を描いている。点であらわされているのは方程式  $x^N = \mu$  の  $N$  個の根である。2つの点を結ぶ線は 2-サイクル  $C_{-\nu, \nu}$ ,  $\nu = b, b+1, \dots, a$ ,  $a = (\check{L}_1 + L_1 - 1)/2$ ,  $b = |\check{L}_1 - L_1 - 2|/2 + 1/2$  である。図に描いたすべてのサイクルの和が上で述べた境界状態に対応するサイクルである。

となる。

式 (5.5) で、 $\check{L}_1 = 2$  とおいたときは [59] で提案されたものと一致し、 $A_{N-1}$  ALE 空間の消滅 2 サイクルの交点形式と完全に一致する。特に、 $S = \tilde{S} = L_1 = \check{L}_1 = 0$  としたときは、 $A_{N-1}$  の拡大 Cartan 行列に一致する。

一般の  $\check{L}_1, L_1$  に対応するサイクルは、次のようになる。まず ALE 空間の 2-サイクルを  $C_\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{Z}$ ,  $C_{\nu+N} = C_\nu$ ,  $\sum_{\nu=0}^{N-1} C_\nu = 0$  であらわすことにする。ここで交点形式は、 $\langle C_\nu, C_{\nu'} \rangle = 2\delta_{\nu, \nu'}^{\text{mod } N} - \delta_{\nu, \nu'+1}^{\text{mod } N} - \delta_{\nu, \nu'-1}^{\text{mod } N}$  とする。また、便宜上  $C_{\nu_1 \nu_2} := C_{\nu_1} + C_{\nu_1+1} + \dots + C_{\nu_2-1}$  も定義する。

$\check{L}_1 \leq (N+2)/2$ ,  $L_1 \leq (N-2)/2$ ,  $\check{L}_1 + L_2 \in 2\mathbb{Z}$ ,  $M = S = 0$  であらわされる境界状態については対応するサイクルを

$$\gamma_{(\check{L}_1, L_1, M=0, S=0)} = C_{-a+1, a} + C_{-a+2, a-1} + \dots + C_{-b, b+1},$$

$$\text{where, } a = \frac{1}{2}(\check{L}_1 + L_1), \quad b = \frac{1}{2}|\check{L}_1 - L_1 - 2|.$$

と書くことができる。一方、 $\check{L}_1 \leq (N+2)/2$ ,  $L_1 \leq (N-2)/2$ ,  $\check{L}_1 + L_2 \in 2\mathbb{Z} + 1$ ,  $M = -1$ ,  $S = 0$  の場合のサイクルは、

$$\gamma_{(\check{L}_1, L_1, M=-1, S=0)} = C_{-a, a} + C_{-a+1, a-1} + \dots + C_{-b, b}$$

$$\text{where, } a = \frac{1}{2}(\check{L}_1 + L_1 - 1), \quad b = \frac{1}{2}|\check{L}_1 - L_1 - 2| + \frac{1}{2},$$

とあらわされる。こうすると式 (5.5) の開弦の Witten 指数とサイクル間の交点形式が完全に一致する。境界状態に対応するサイクルがどのようなものを図 5.1 に示した。一般の  $M$  に対応するサイクルは、上のものを  $\mathbb{Z}_N$  変換で回すことで得られる。

## 第6章 結論

### 6.1 まとめ

本論では、非コンパクトな Calabi-Yau 多様体上の弦理論についてその Gepner 模型的な可解な共形場理論による記述を構成しそれを調べた。一般に共形場理論による記述は、世界面における量子効果が非常に大きい点での記述であり、量子効果によって幾何学がどのように変形されるのかが見えるという点で非常に興味深い。また非コンパクトな Calabi-Yau 多様体の場合には、小弦理論のホログラフィーのという立場から高次元の共形場理論とその変形と弦理論の対応への応用を目指してのものである。

非コンパクトな Calabi-Yau 多様体の場合、その弦理論のスペクトルの中には連続部分と離散部分が含まれる。一方 Gepner 的な記述には、理論の中に  $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$  Kazama-Suzuki 模型という非コンパクトな模型が含まれていて、この  $SL(2, \mathbb{R})$  のユニタリー表現のうち主連続系列の表現が連続部分、離散系列の表現が離散部分になっている。

本論では、まず非コンパクト Gepner 模型のスペクトルを決定するためにモジュラー不変な分配関数を構成した。この構成には、スペクトル流を足し合わせるという方法を用いた。これにより、連続部分、および特別な場合には離散部分のモジュラー不変な分配関数を構成し、スペクトルを完全に決定することに成功した。

ここで構成した非コンパクト Gepner 模型ともとの Calabi-Yau 多様体をターゲット空間とするシグマ模型は見た目が全く異なるので本当に同じ理論を記述しているかを調べる必要があるであり、そのためには連続変形で不変な種々の指数、特に超対称性の指数 (Witten 指数) を比較することが有効である。

この問題に対して本論では、閉弦の場合については楕円種数、特にその基底状態を調べた。連続部分については、楕円種数は 0 になるがこれは、連続部分は特異点の性質を拾っていないということであり、問題はない。また、楕円種数の非自明な因子が、錐の底面の性質を反映しているという結果を得たがこれは、連

続部分の波動関数が錐の遠くまで届いているという考察から非常に妥当な結果である。離散部分に関しては、Calabi-Yau 多様体の特異点の消滅コホモロジーと完全に対応していた。これも離散系列の波動関数が変形した特異点付近に局在しているという事実から妥当な結果である。これらの解析の結果は、非コンパクト Gepner 模型が本当に Calabi-Yau 多様体のシグマ模型を記述しているという有力な証拠である。

また、この非コンパクト Calabi-Yau 多様体あるいは、非コンパクト Gepner 模型における D ブレインについても調べた。古典的な Calabi-Yau 多様体のシグマ模型の立場からは、D ブレインは、サイクル、あるいは接続層である。一方、非コンパクト Gepner 模型の立場からは、D ブレインは、境界のある世界面の境界条件（境界状態）である。

まず、非コンパクト Gepner 模型について Cardy の方法を用いて D ブレイン（境界状態）の分類、およびそれらの間をつなぐ開弦のスペクトルを完全に決定した。また、この非コンパクト Gepner 模型の結果と古典幾何学的なサイクル（接続層）を比較するために、開弦の Witten 指数を比較した。この結果、連続部分から出てくる D ブレインについては非コンパクトな錐状のサイクルをあらゆる接続層と完全に対応をつけることが出来た。一方、離散部分から出てくる D ブレインについては、コンパクトな特異点の消滅サイクルと完全に対応させることが出来た。これらは、その波動関数の性質から考えて非常に妥当な結果である。

特にホログラフィーの立場からは、消滅サイクルに巻き付いた D ブレインは、対応する場の理論のソリトンなので、そのスペクトルを弦の補正も完全に含めて決定したのは重要な結果である。

## 6.2 今後の課題

まず記述的な問題として、離散部分において  $SL(2, \mathbb{R})$  のレベルが分数になる場合には、まだモジュラー不変な分配関数が構成できていない。 $SL(2, \mathbb{R})$  のレベルが分数になる模型は、複素 3 次元の ADE 型特異点などの様々な興味深い模型を含んでいるのでこれは、是非とも解決すべき問題である。

また、弦理論がほぼ完全に出来たので、これを用いてホログラフィーを調べることも重要な問題である。特に場の理論が可積分系になる場合に、弦理論における D ブレインと場の理論におけるソリトンを比較し、対応を調べるのは興味深い問題である。

これとは別に最近、Calabi-Yau 多様体以外に  $G_2$  や  $\text{Spin}(7)$  といった例外的なホロノミーを持つ多様体上の弦理論や M 理論が注目されている [75–84]。これらの多様体に関する共形場理論の記述 [85–91] を使った解析は興味深い。

また、本論では  $\text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{U}(1)$  の中の D ブレインについての解析を行ったが、この結果を踏まえて  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  の普遍被覆である  $\text{AdS}_3$  の中の D ブレインの解析 [92–105] を行い、これが AdS/CFT 対応の立場からどのように見えるかを考察するのは興味深いと考えられる。

## 謝辞

本論の内容のうち、連続系列の D ブレインの解析は、京都大学総合人間学部の杉山勝之先生との共同研究に基づくものである。杉山先生には、そのほかの部分に関する多くの議論をいただいている。京都大学総合人間学部の植松恒夫先生にも本論の研究に関して議論をいただき、また貴重なお時間をさいて本論の校正をしていただいた。植松先生には他にも研究その他の面で普段からご指導をいただいた。京都大学総合人間学部の松田哲先生、青山秀明先生にも普段から様々な面でご指導をいただいた。京都大学総合人間学部の素粒子論研究室のメンバーの方々にも日頃からお世話になった。京都大学基礎物理学研究所および理学部物理学教室のメンバーの方々には、インフォーマルセミナーなどでお世話になった。また、山梨での Summer Institute '99, 2000, 2001 の世話人の方々には貴重な議論の場を用意していただき、参加者の方々にも議論をいただいた。みなさんに感謝したい。



# 付録A 記号と公式集

## A.1 雑多な記号と公式

記号の定義

$$\begin{aligned} \mathbf{e}[x] &:= \exp(2\pi i x), \\ \delta_m^{\bmod N} &:= \begin{cases} 1 & (m \equiv 0 \pmod{N}), \\ 0 & (\text{others}), \end{cases} \\ \delta_{m,m'}^{\bmod N} &:= \delta_{m-m'}^{\bmod N}, \end{aligned}$$

指標の中で、

$$q = \mathbf{e}[\tau], \quad y = \mathbf{e}[z]$$

和の公式。  $m$  と  $N$  は整数として

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}_N} \mathbf{e}\left[\frac{jm}{N}\right] = N \delta_m^{\bmod N}.$$

$m, m', N$  を整数として

$$\sum_{j=1}^{N-1} \sin \pi \frac{jm}{N} \sin \pi \frac{jm'}{N} = \frac{N}{2} (\delta_{m-m'}^{\bmod 2N} - \delta_{m+m'}^{\bmod 2N}).$$

## A.2 テータ関数

Jacobi のテータ関数

$$\begin{aligned} \theta_1(\tau, z) &:= i \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{1}{2}(n-\frac{1}{2})^2} y^{(n-\frac{1}{2})}, & \theta_2(\tau, z) &:= \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}(n-\frac{1}{2})^2} y^{(n-\frac{1}{2})}, \\ \theta_3(\tau, z) &:= \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}n^2} y^n, & \theta_4(\tau, z) &:= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{1}{2}n^2} y^n. \end{aligned}$$

## 無限積表示

$$\theta_1(\tau, z) = -iq^{\frac{1}{8}}(y^{\frac{1}{2}} - y^{-\frac{1}{2}}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 - yq^n)(1 - y^{-1}q^n),$$

$$\theta_2(\tau, z) = q^{\frac{1}{8}}(y^{\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 + yq^n)(1 + y^{-1}q^n),$$

$$\theta_3(\tau, z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 + yq^{n-\frac{1}{2}})(1 + y^{-1}q^{n-\frac{1}{2}}),$$

$$\theta_4(\tau, z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 - yq^{n-\frac{1}{2}})(1 - y^{-1}q^{n-\frac{1}{2}}).$$

## 周期

$$\theta_1(\tau, z + 1) = -\theta_1(\tau, z), \quad \theta_1(\tau, z + \tau) = -q^{-\frac{1}{2}}y^{-1}\theta_1(\tau, z),$$

$$\theta_2(\tau, z + 1) = -\theta_1(\tau, z), \quad \theta_2(\tau, z + \tau) = q^{-\frac{1}{2}}y^{-1}\theta_1(\tau, z),$$

$$\theta_3(\tau, z + 1) = \theta_1(\tau, z), \quad \theta_3(\tau, z + \tau) = q^{-\frac{1}{2}}y^{-1}\theta_1(\tau, z),$$

$$\theta_4(\tau, z + 1) = \theta_1(\tau, z), \quad \theta_4(\tau, z + \tau) = -q^{-\frac{1}{2}}y^{-1}\theta_1(\tau, z),$$

$$\theta_1(\tau, z + 1/2) = \theta_2(\tau, z), \quad \theta_1(\tau, z + \tau/2) = iq^{-\frac{1}{8}}y^{-1/2}\theta_4(\tau, z),$$

$$\theta_2(\tau, z + 1/2) = -\theta_1(\tau, z), \quad \theta_2(\tau, z + \tau/2) = q^{-\frac{1}{8}}y^{-1/2}\theta_3(\tau, z),$$

$$\theta_3(\tau, z + 1/2) = \theta_4(\tau, z), \quad \theta_3(\tau, z + \tau/2) = q^{-\frac{1}{8}}y^{-1/2}\theta_2(\tau, z),$$

$$\theta_4(\tau, z + 1/2) = \theta_3(\tau, z), \quad \theta_4(\tau, z + \tau/2) = iq^{-\frac{1}{8}}y^{-1/2}\theta_1(\tau, z).$$

## Dedekind のエータ関数

$$\eta(\tau) := q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n).$$



Dedekind のエータ関数と、Jacobi のテータ関数の公式

$$\eta(\tau)^3 = \frac{1}{2}\theta_2(\tau)\theta_3(\tau)\theta_4(\tau), \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial z}(\tau) = -i\eta(\tau)^3, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{1}{-i\theta_1(\tau, z)} = \frac{1}{\eta(\tau)^3} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{u=0}^{\infty} (-1)^u q^{\frac{u(u+2m+1)}{2}} y^{m+\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.3})$$

SU(2) 古典テータ関数

$$\Theta_{m,k}(\tau, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{k(n+\frac{m}{2k})^2} y^{k(n+\frac{m}{2k})},$$

SU(2) 古典テータ関数に関する公式

$$\Theta_{m/p, k/p}(\tau, z) = \sum_{t \in \mathbb{Z}_p} \Theta_{m+2kt, pk}(\tau, z/p).$$

$$\Theta_{m_1, k_1}(\tau, z_1) \Theta_{m_2, k_2}(\tau, z_2) = \sum_{r \in \mathbb{Z}_{k_1+k_2}} \Theta_{m_2 k_1 - m_1 k_2 + 2k_1 k_2 r, k_1 k_2 (k_1+k_2)}(\tau, u) \Theta_{m_1 + m_2 + 2k_2 r, k_1 + k_2}(\tau, v),$$

$$u = \frac{z_2 - z_1}{k_1 + k_2}, \quad v = \frac{k_1 z_1 + k_2 z_2}{k_1 + k_2}.$$

Jacobi テータ関数との関係

$$2\Theta_{0,2} = \theta_3 + \theta_4, \quad 2\Theta_{1,2} = \theta_2 + i\theta_1, \quad 2\Theta_{2,2} = \theta_3 - \theta_4, \quad 2\Theta_{3,2} = \theta_2 - i\theta_1.$$

テータ関数の恒等式

$$\theta_3(\tau)^4 - \theta_4(\tau)^4 - \theta_2(\tau)^4 = 0, \quad (\text{Jacobi's abstruse identity}),$$

$$\sum_{s \in \mathbb{Z}_4} (-1)^s \Theta_{s,2}(\tau) \Theta_{s+2a+1,2}(\tau) \Theta_{s+a,1}(\tau) = 0, \quad a = 0, 1,$$

$$\sum_{s \in \mathbb{Z}_4} (-1)^s \Theta_{6+4a-3s,6}(\tau) \Theta_{s,2}(\tau) = 0, \quad a = 0, \pm 1,$$

モジュラー変換性

$$\Theta_{m,k}(\tau + 1, z) = \mathbf{e} \left[ \frac{m^2}{4k} \right] \Theta_{m,k}(\tau, z),$$

$$\theta_1(\tau + 1, z) = \mathbf{e} \left[ \frac{1}{8} \right] \theta_1(\tau, z), \quad \theta_2(\tau + 1, z) = \mathbf{e} \left[ \frac{1}{8} \right] \theta_2(\tau, z),$$

$$\theta_3(\tau + 1, z) = \theta_4(\tau, z), \quad \theta_4(\tau + 1, z) = \theta_3(\tau, z),$$

$$\eta(\tau + 1) = \mathbf{e} [1/24] \eta(\tau),$$

$$\Theta_{m,k}(-1/\tau, z/\tau) = \sqrt{-i\tau} e \left[ \frac{k z^2}{4 \tau} \right] \sum_{m' \in \mathbb{Z}_{2k}} \frac{1}{\sqrt{2k}} e \left[ -\frac{mm'}{2k} \right] \Theta_{m',k}(\tau, z),$$

$$\theta_1(-1/\tau, z/\tau) = -i\sqrt{-i\tau} e \left[ \frac{1 z^2}{2 \tau} \right] \theta_1(\tau, z), \quad \theta_2(-1/\tau, z/\tau) = \sqrt{-i\tau} e \left[ \frac{1 z^2}{2 \tau} \right] \theta_4(\tau, z),$$

$$\theta_3(-1/\tau, z/\tau) = \sqrt{-i\tau} e \left[ \frac{1 z^2}{2 \tau} \right] \theta_3(\tau, z), \quad \theta_4(-1/\tau, z/\tau) = \sqrt{-i\tau} e \left[ \frac{1 z^2}{2 \tau} \right] \theta_2(\tau, z),$$

$$\eta(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau} \eta(\tau).$$

## A.3 代数

### A.3.1 OPE と交換関係の対応

$$A(z) := \sum_n A_n z^{-n-h_A}, \quad B(z) := \sum_n B_n z^{-n-h_B}$$

としたとき、

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_0 dz A(z) z^{n+h_A-1},$$

$$[A_m, B_n] = \frac{1}{2\pi i} \oint_0 dw w^{n+h_B-1} \frac{1}{2\pi i} \oint_w dz z^{m+h_A-1} A(z) B(w).$$

### A.3.2 共形代数

Virasoro 代数 (OPE)

$$T(z)T(w) \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w}.$$

Virasoro 代数 (交換関係)

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n}.$$

$\mathcal{N} = 1$  超共形代数 (OPE)

$$T(z)T(w) \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w},$$

$$T(z)G(w) \sim \frac{\frac{3}{2}G(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial G(w)}{z-w},$$

$$G(z)G(w) \sim \frac{\frac{2}{3}c}{(z-w)^3} + \frac{2T(w)}{z-w}.$$

$\mathcal{N} = 1$  超共形代数 (交換關係)

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n},$$

$$[L_m, G_r] = (m/2 - r)G_{r+m},$$

$$\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{c}{3} \left( r^2 - \frac{1}{4} \right) \delta_{r+s}.$$

$\mathcal{N} = 2$  超共形代数 (OPE)

$$T(z)T(w) \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w},$$

$$T(z)G^\pm(w) \sim \frac{\frac{3}{2}G^\pm(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial G^\pm(w)}{z-w},$$

$$T(z)J(w) \sim \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J(w)}{z-w},$$

$$G^+(z)G^-(w) \sim \frac{\frac{2}{3}c}{(z-w)^3} + \frac{2J(w)}{(z-w)^2} + \frac{2T(w) + \partial J(w)}{z-w},$$

$$G^+(z)G^+(w) \sim G^-(z)G^-(w) \sim 0,$$

$$J(z)G^\pm(w) \sim \frac{\pm G(w)}{z-w},$$

$$J(z)J(w) \sim \frac{c/3}{(z-w)^2},$$

$\mathcal{N} = 2$  超共形代数 (交換関係)

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n},$$

$$[L_m, G_r^\pm] = (m/2 - r)G_{r+m}^\pm,$$

$$[L_m, J_n] = -nJ_{m+n},$$

$$\{G_r^+, G_s^-\} = 2L_{r+s} + (r - s)J_{r+s} + \frac{c}{3}\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{r+s},$$

$$\{G_r^+, G_s^+\} = \{G_r^-, G_s^-\} = 0,$$

$$[J_m, J_n] = \frac{c}{3}\delta_{m+n},$$

$$[J_m, G_r] = \pm G_{m+r}^\pm$$

### A.3.3 アフィン Lie 代数

直交基底 (OPE)

$$J^a(z)J^b(w) \sim \frac{k/2}{(z-w)^2} + \frac{if^{ab}_c J^c(w)}{z-w}$$

直交基底 (交換関係)

$$[J_m^a, J_n^b] = if^{ab}_c J_{m+n}^c + \frac{k}{2}m\delta^{ab}\delta_{m+n}$$

Weyl-Cartan 基底 (交換関係)

$$[H_m^I, H_n^J] = \delta^{IJ}\delta_{m+n}mk,$$

$$[H_m^I, E_n^\alpha] = \alpha^I E_{m+n}^\alpha,$$

$$[E_m^\alpha, E_n^\beta] = \begin{cases} \frac{2}{|\alpha|^2}\alpha \cdot H_{m+n} + \frac{2}{|\alpha|^2}\delta_{m+n}mk & (\alpha = -\beta) \\ \mathcal{N}_{\alpha,\beta}E_{m+n}^{\alpha+\beta} & (\alpha + \beta \in \Delta) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases},$$

$$[L_0, J_n] = -nJ_n, \quad (J_n = H_n^i, E_n^\alpha),$$

$$[k, (\text{anything})] = 0,$$

アフィン SU(2) (スピ基底) (OPE)

$$J^3(z)J^3(w) \sim \frac{k/2}{(z-w)^2},$$

$$J^3(z)J^\pm(w) \sim \frac{\pm J^\pm(w)}{z-w},$$

$$J^+(z)J^-(w) \sim \frac{k}{(z-w)^2} + \frac{2J^3(z)}{z-w},$$

アフィン SU(2) (スピ基底) (交換関係)

$$[J_m^3, J_n^3] = \frac{k}{2}m\delta_{m+n},$$

$$[J_m^3, J_n^\pm] = \pm J_{m+n}^\pm,$$

$$[J_m^+, J_n^-] = km\delta_{m+n} + 2J_{m+n}^3$$

アフィン SL(2,ℝ) (スピ基底) (OPE)

$$J^3(z)J^3(w) \sim \frac{-k/2}{(z-w)^2},$$

$$J^3(z)J^\pm(w) \sim \frac{\pm J^\pm(w)}{z-w},$$

$$J^+(z)J^-(w) \sim \frac{k}{(z-w)^2} + \frac{-2J^3(z)}{z-w},$$

アフィン SL(2,ℝ) (スピ基底) (交換関係)

$$[J_m^3, J_n^3] = -\frac{k}{2}m\delta_{m+n},$$

$$[J_m^3, J_n^\pm] = \pm J_{m+n}^\pm,$$

$$[J_m^+, J_n^-] = km\delta_{m+n} - 2J_{m+n}^3$$



## 付録B 有限次元 Lie 代数

### B.1 ルート系

#### B.1.1 交換関係と Killing 形式

Lie 代数  $\mathfrak{g}$ , ランク  $r$ , Cartan-Weyl 基底  $H^I, E^\alpha, \alpha \in \Delta$

$$[H^I, H^J] = 0,$$

$$[H^I, E^\alpha] = \alpha^I E^\alpha,$$

$$[E^\alpha, E^\beta] = \begin{cases} \frac{2}{|\alpha|^2} \alpha \cdot H & (\alpha = -\beta) \\ \mathcal{N}_{\alpha, \beta} E^{\alpha+\beta} & (\alpha + \beta \in \Delta) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}.$$

Killing 形式は、対称双線型形式  $K(X, Y), X, Y \in \mathfrak{g}$  で次の性質を満たす。

$$K([X, Y], Z) = K(X, [Y, Z]), \quad X, Y, Z \in \mathfrak{g}$$

Cartan-Weyl 基底では、

$$K(H^I, H^J) = \delta^{IJ}, \quad K(E^\alpha, E^{-\alpha}) = \frac{2}{|\alpha|^2}, \quad (\text{他は } 0)$$

Cartan 部分代数を  $\mathfrak{h} \cong \mathbb{R}^r$  とする。ここの内積を  $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{h}$ ,  $(\lambda|\lambda') := K(\lambda, \lambda')$  とする。 $\mathfrak{h}$  の正規直交基底は、 $H^I$  であり、成分を  $\lambda = \lambda^I H^I$  で定義する。

#### B.1.2 単純ルート

- $\alpha$  の最初の 0 でない成分が正のものを正ルート。正ルート全体を  $\Delta_+$ 。
- 正ルートでないルートを負ルート。負ルート全体を  $\Delta_-$ 。  $\Delta = \Delta_+ \oplus \Delta_-$ 。

- 正ルートであって、2つの正ルートの和に書けないものを単純ルート  $\alpha_i$ 。  
 $\alpha_i$  は  $r$  個あってウェイト空間の基底になっている。特に、正ルートは、正の整数の係数の線形結合で書ける。
- 余ルート  $\alpha^\vee = 2\alpha/|\alpha|^2$ 。特に 単純余ルート  $\alpha_i^\vee = 2\alpha_i/|\alpha_i|^2$ 。

Cartan 行列

$$A_{ij} := \frac{2(\alpha_i|\alpha_j)}{|\alpha_j|^2} = (\alpha_i|\alpha_j^\vee)$$

成分は整数になる。

最高ルートとは、 $\theta \in \Delta$  で、 $\theta = \sum_i a_i \alpha_i$  と表したとき、 $\sum_i a_i$  が最大になるもの。このとき、 $a_i$  をマーク、 $\theta = \sum_i a_i^\vee \alpha_i^\vee$  と書いたとき、 $a_i^\vee$  を余マークと呼ぶ。また、Coxeter 数  $h = \sum_i a_i$ 、および双対 Coxeter 数  $h^\vee = \sum_i a_i^\vee$  を定義する。

また、ルート格子、余ルート格子をそれぞれ

$$Q := \sum_{i=1}^r \mathbb{Z}\alpha_i, \quad Q^\vee := \sum_{i=1}^r \mathbb{Z}\alpha_i^\vee,$$

で定義する。

### B.1.3 基本ウェイト

基本ウェイト  $w_i$  とは、単純余ルートの双対基底

$$(w_i|\alpha_j^\vee) = \delta_{ij}$$

ウェイト  $\lambda$  を  $w_i$  で  $\lambda = \sum_i \lambda_i w_i$  のように分解したとき  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  を Dynkin ラベルと呼ぶ。

$$\lambda = \sum_i \lambda_i w_i \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = (\lambda|\alpha_i^\vee)$$

Cartan 行列は、単純ルートの Dynkin ラベル

$$\alpha_i = \sum_j A_{ij} w_j$$

Weyl ベクトル

$$\rho := \sum_i w_i = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha$$



## B.2 Weyl 群

$\alpha, \alpha'$  をルートとしたとき

$$s_\alpha \alpha' = \alpha' - (\alpha^\vee | \alpha') \alpha,$$

もルート。 $s_\alpha, \alpha \in \Delta$  が生成する群を Weyl 群  $W$ 。 $s_i := s_{\alpha_i}$  を単純鏡映とよぶ。 $W$  は、 $s_i$  から生成される。 $w \in W$  を  $w = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_n}$  と書いたとき  $\epsilon(w) := (-1)^n$  を  $w$  の符号とよぶ。符号は、単純鏡映への分解のしかたによらない。

## B.3 有限次元表現

最高ウェイト  $|\lambda\rangle$

$$E^\alpha |\lambda\rangle = 0, \quad H^I |\lambda\rangle = \lambda^I.$$

最高ウェイトから作られる表現が有限次元ユニタリー表現  $\Leftrightarrow$  すべての Dynkin ラベルが整数で  $\lambda_i \geq 0$ 。このような  $\lambda$  を「優ウェイト」と呼び、優ウェイト全体を  $P_+$  と書く。有限次元表現の性質を調べるのに有効なのは指標

$$\chi_\lambda(\zeta) := \text{Tr} \, e \left[ \sum_I \zeta^I H^I \right].$$

である。結果は Weyl の指標公式として知られていて

$$\chi_\lambda(\zeta) = \frac{\sum_{w \in W} \epsilon(w) e[(w(\lambda + \rho) | \zeta)]}{\sum_{w \in W} \epsilon(w) e[(w(\rho) | \zeta)]}$$

この公式の「分母」に関して次の式が成り立つ（分母公式）。

$$D_\rho(\zeta) := \sum_{w \in W} \epsilon(w) e[(w(\rho) | \zeta)] = \prod_{\alpha \in \Delta_+} \{ e[(\alpha | \zeta)] - e[-(\alpha | \zeta)] \}.$$

この式を使うと表現の次元  $\text{Tr} \, 1 = \chi_\lambda(\zeta = 0)$  が計算できる（ $\lim_{t \rightarrow 0} \chi_\lambda(t\rho)$  を計算すればよい。）

$$\chi_\lambda(\zeta = 0) = \prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{(\lambda + \rho | \alpha)}{(\rho | \alpha)}.$$



## 参考文献

- [1] D. Gepner, “*Space-time supersymmetry in compactified string theory and superconformal models*”, *Nucl. Phys.* **B296** (1988) 757.
- [2] D. Gepner, “*Exactly solvable string compactifications on manifolds of  $SU(n)$  holonomy*”, *Phys. Lett.* **B199** (1987) 380–388.
- [3] C. Vafa, “*String vacua and orbifoldized L-G models*”, *Mod. Phys. Lett.* **A4** (1989) 1169.
- [4] K. A. Intriligator and C. Vafa, “*Landau-Ginzburg orbifolds*”, *Nucl. Phys.* **B339** (1990) 95–120.
- [5] E. Witten, “*Phases of  $N = 2$  theories in two dimensions*”, *Nucl. Phys.* **B403** (1993) 159–222, [[hep-th/9301042](#)].
- [6] O. Aharony, M. Berkooz, D. Kutasov and N. Seiberg, “*Linear dilatons,  $NS5$ -branes and holography*”, *JHEP* **10** (1998) 004, [[hep-th/9808149](#)].
- [7] A. Giveon, D. Kutasov and O. Pele, “*Holography for non-critical superstrings*”, *JHEP* **10** (1999) 035, [[hep-th/9907178](#)].
- [8] A. Giveon and D. Kutasov, “*Little string theory in a double scaling limit*”, *JHEP* **10** (1999) 034, [[hep-th/9909110](#)].
- [9] A. Giveon and D. Kutasov, “*Comments on double scaled little string theory*”, *JHEP* **01** (2000) 023, [[hep-th/9911039](#)].
- [10] A. Giveon, D. Kutasov and N. Seiberg, “*Comments on string theory on  $AdS_3$* ”, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 733–780, [[hep-th/9806194](#)].

- [11] S. Yamaguchi, Y. Ishimoto and K. Sugiyama, “*AdS<sub>3</sub>/CFT<sub>2</sub> correspondence and space-time  $N = 3$  superconformal algebra*”, *JHEP* **02** (1999) 026, [[hep-th/9902079](#)].
- [12] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Sénéchal, “*Conformal field theory*”, Springer-Verlag New York Inc., 1997.
- [13] S. V. Ketov, “*Conformal field theory*”, World Scientific Publishing, 1995.
- [14] V. G. Kac, “*Infinite dimensional Lie algebras*”, Cambridge University Press, 3rd ed., 1990.
- [15] 脇本 実, “無限次元 Lie 環”, 岩波講座 現代数学の展開, 岩波書店, 1999.
- [16] J. L. Cardy, “*Operator content of two-dimensional conformally invariant theories*”, *Nucl. Phys.* **B270** (1986) 186–204.
- [17] A. Cappelli, C. Itzykson and J. B. Zuber, “*Modular invariant partition functions in two-dimensions*”, *Nucl. Phys.* **B280** (1987) 445–465.
- [18] A. Cappelli, C. Itzykson and J. B. Zuber, “*The ADE classification of minimal and  $A_1^{(1)}$  conformal invariant theories*”, *Commun. Math. Phys.* **113** (1987) 1.
- [19] A. Kato, “*Classification of modular invariant partition functions in two-dimensions*”, *Mod. Phys. Lett.* **A2** (1987) 585.
- [20] J. L. Cardy, “*Boundary conditions, fusion rules and the Verlinde formula*”, *Nucl. Phys.* **B324** (1989) 581.
- [21] N. Ishibashi, “*The boundary and crosscap states in conformal field theories*”, *Mod. Phys. Lett.* **A4** (1989) 251.
- [22] R. E. Behrend, P. A. Pearce, V. B. Petkova and J.-B. Zuber, “*Boundary conditions in rational conformal field theories*”, *Nucl. Phys.* **B570** (2000) 525–589, [[hep-th/9908036](#)].
- [23] A. Recknagel and V. Schomerus, “*Boundary deformation theory and moduli spaces of D-branes*”, *Nucl. Phys.* **B545** (1999) 233–282, [[hep-th/9811237](#)].

- [24] Y. Kazama and H. Suzuki, “*New  $N = 2$  superconformal field theories and superstring compactification*”, *Nucl. Phys.* **B321** (1989) 232.
- [25] V. A. Fateev, A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, unpublished.
- [26] K. Hori and A. Kapustin, “*Duality of the fermionic 2d black hole and  $N = 2$  Liouville theory as mirror symmetry*”, *JHEP* **08** (2001) 045, [hep-th/0104202].
- [27] T. Fukuda and K. Hosomichi, “*Three-point functions in sine-Liouville theory*”, *JHEP* **09** (2001) 003, [hep-th/0105217].
- [28] J. Balog, L. O’Raifeartaigh, P. Forgacs and A. Wipf, “*Consistency of string propagation on curved space-times: An  $SU(1,1)$  based counterexample*”, *Nucl. Phys.* **B325** (1989) 225.
- [29] L. J. Dixon, M. E. Peskin and J. Lykken, “ *$N = 2$  superconformal symmetry and  $SO(2,1)$  current algebra*”, *Nucl. Phys.* **B325** (1989) 329–355.
- [30] P. M. S. Petropoulos, “*Comments on  $SU(1,1)$  string theory*”, *Phys. Lett.* **B236** (1990) 151.
- [31] N. Mohammadi, “*On the unitarity of string propagation on  $SU(1,1)$* ”, *Int. J. Mod. Phys.* **A5** (1990) 3201–3212.
- [32] I. Bars and D. Nemeschansky, “*String propagation in backgrounds with curved space-time*”, *Nucl. Phys.* **B348** (1991) 89–107.
- [33] S. Hwang, “*No ghost theorem for  $SU(1,1)$  string theories*”, *Nucl. Phys.* **B354** (1991) 100–112.
- [34] M. Henningson and S. Hwang, “*The unitarity of  $SU(1,1)$  fermionic strings*”, *Phys. Lett.* **B258** (1991) 341–345.
- [35] M. Henningson, S. Hwang, P. Roberts and B. Sundborg, “*Modular invariance of  $SU(1,1)$  strings*”, *Phys. Lett.* **B267** (1991) 350–355.

- [36] J. M. Evans, M. R. Gaberdiel and M. J. Perry, “*The no-ghost theorem for  $AdS_3$  and the stringy exclusion principle*”, *Nucl. Phys.* **B535** (1998) 152–170, [[hep-th/9806024](#)].
- [37] S. Hwang and P. Roberts, “*Interaction and modular invariance of strings on curved manifolds*”, [hep-th/9211075](#).
- [38] J. Maldacena and H. Ooguri, “*Strings in  $AdS_3$  and  $SL(2,R)$  WZW model. I*”, *J. Math. Phys.* **42** (2001) 2929–2960, [[hep-th/0001053](#)].
- [39] K. Sfetsos, “*Degeneracy of string states in 2-d black hole and a new derivation of  $SU(1,1)$  parafermion characters*”, *Phys. Lett.* **B271** (1991) 301–306.
- [40] I. Bakas and E. Kiritsis, “*Beyond the large  $N$  limit: Nonlinear  $W(\infty)$  as symmetry of the  $SL(2,R)/U(1)$  coset model*”, *Int. J. Mod. Phys.* **A7** (1992) 55–81, [[hep-th/9109029](#)].
- [41] K. Huitu, “*Modular invariants of  $n=2$  supersymmetric  $su(1,1)$  models*”, *Phys. Lett.* **B313** (1993) 75–82, [[hep-th/9206008](#)].
- [42] S. Yamaguchi, “*Gepner-like description of a string theory on a non-compact singular Calabi-Yau manifold*”, *Nucl. Phys.* **B594** (2001) 190–208, [[hep-th/0007069](#)].
- [43] K. Sugiyama and S. Yamaguchi, “*D-branes on a noncompact singular Calabi-Yau manifold*”, *JHEP* **02** (2001) 015, [[hep-th/0011091](#)].
- [44] S. Mizoguchi, “*Modular invariant critical superstrings on four-dimensional Minkowski space  $\times$  two-dimensional black hole*”, *JHEP* **04** (2000) 014, [[hep-th/0003053](#)].
- [45] T. Eguchi and Y. Sugawara, “*Modular invariance in superstring on Calabi-Yau  $n$ -fold with  $A$ - $D$ - $E$  singularity*”, *Nucl. Phys.* **B577** (2000) 3–22, [[hep-th/0002100](#)].
- [46] S. Mizoguchi, “*Noncompact Gepner models for type II strings on a conifold and an ALE instanton*”, [hep-th/0009240](#).

- [47] M. Naka and M. Nozaki, “*Singular Calabi-Yau manifolds and ADE classification of CFTs*”, *Nucl. Phys.* **B599** (2001) 334–360, [hep-th/0010002].
- [48] S. Elitzur, A. Giveon, D. Kutasov, E. Rabinovici and G. Sarkissian, “*D-branes in the background of NS fivebranes*”, *JHEP* **08** (2000) 046, [hep-th/0005052].
- [49] T. Eguchi and Y. Sugawara, “*D-branes in singular Calabi-Yau  $n$ -fold and  $N=2$  Liouville theory*”, *Nucl. Phys.* **B598** (2001) 467–491, [hep-th/0011148].
- [50] S. Yamaguchi, “*Coset character identities in superstring compactifications*”, *JHEP* **01** (2002) 023, [hep-th/0112004].
- [51] T. Eguchi, H. Ooguri, A. Taormina and S.-K. Yang, “*Superconformal algebras and string compactification on manifolds with  $SU(n)$  holonomy*”, *Nucl. Phys.* **B315** (1989) 193.
- [52] D. Kutasov, “*Some properties of (non)critical strings*”, hep-th/9110041.
- [53] A. Bilal and J.-L. Gervais, “*New critical dimensions for string theories*”, *Nucl. Phys.* **B284** (1987) 397.
- [54] T. Kawai, Y. Yamada and S.-K. Yang, “*Elliptic genera and  $N=2$  superconformal field theory*”, *Nucl. Phys.* **B414** (1994) 191–212, [hep-th/9306096].
- [55] S. Mizoguchi and T. Tani, “*Wound D-branes in Gepner models*”, *Nucl. Phys.* **B611** (2001) 253–280, [hep-th/0105174].
- [56] A. Recknagel and V. Schomerus, “*D-branes in Gepner models*”, *Nucl. Phys.* **B531** (1998) 185–225, [hep-th/9712186].
- [57] I. Brunner, M. R. Douglas, A. E. Lawrence and C. Römelsberger, “*D-branes on the quintic*”, *JHEP* **08** (2000) 015, [hep-th/9906200].
- [58] D.-E. Diaconescu and C. Römelsberger, “*D-branes and bundles on elliptic fibrations*”, *Nucl. Phys.* **B574** (2000) 245–262, [hep-th/9910172].

- [59] W. Lerche, “*On a boundary CFT description of nonperturbative  $N = 2$  Yang-Mills theory*”, hep-th/0006100.
- [60] D.-E. Diaconescu and M. R. Douglas, “*D-branes on stringy Calabi-Yau manifolds*”, hep-th/0006224.
- [61] K. Sugiyama, “*Comments on central charge of topological sigma model with Calabi-Yau target space*”, Nucl. Phys. **B591** (2000) 701–737, [hep-th/0003166].
- [62] S. Hosono, “*Local mirror symmetry and type IIA monodromy of Calabi-Yau manifolds*”, Adv. Theor. Math. Phys. **4** (2000) 335–376, [hep-th/0007071].
- [63] S. Govindarajan and T. Jayaraman, “*D-branes, exceptional sheaves and quivers on Calabi-Yau manifolds: From Mukai to McKay*”, Nucl. Phys. **B600** (2001) 457–486, [hep-th/0010196].
- [64] A. Tomasiello, “*D-branes on Calabi-Yau manifolds and helices*”, JHEP **02** (2001) 008, [hep-th/0010217].
- [65] P. Mayr, “*Phases of supersymmetric D-branes on Kähler manifolds and the McKay correspondence*”, JHEP **01** (2001) 018, [hep-th/0010223].
- [66] K. Hori, A. Iqbal and C. Vafa, “*D-branes and mirror symmetry*”, hep-th/0005247.
- [67] S. Govindarajan, T. Jayaraman and T. Sarkar, “*Worldsheet approaches to D-branes on supersymmetric cycles*”, Nucl. Phys. **B580** (2000) 519–547, [hep-th/9907131].
- [68] S. Govindarajan and T. Jayaraman, “*On the Landau-Ginzburg description of boundary CFTs and special Lagrangian submanifolds*”, JHEP **07** (2000) 016, [hep-th/0003242].
- [69] S. Govindarajan, T. Jayaraman and T. Sarkar, “*On D-branes from gauged linear sigma models*”, Nucl. Phys. **B593** (2001) 155–182, [hep-th/0007075].



- [70] W. Lerche, C. A. Lutken and C. Schweigert, “*D-branes on ALE spaces and the ADE classification of conformal field theories*”, *Nucl. Phys.* **B622** (2002) 269–278, [hep-th/0006247].
- [71] J. Fuchs *et. al.*, “*Boundary fixed points, enhanced gauge symmetry and singular bundles on  $K3$* ”, *Nucl. Phys.* **B598** (2001) 57–72, [hep-th/0007145].
- [72] S. Yamaguchi, “*Noncompact Gepner models with discrete spectra*”, *Phys. Lett.* **B509** (2001) 346–354, [hep-th/0102176].
- [73] H. Ooguri and C. Vafa, “*Two-dimensional black hole and singularities of CY manifolds*”, *Nucl. Phys.* **B463** (1996) 55–72, [hep-th/9511164].
- [74] H. Ooguri, Y. Oz and Z. Yin, “*D-branes on Calabi-Yau spaces and their mirrors*”, *Nucl. Phys.* **B477** (1996) 407–430, [hep-th/9606112].
- [75] D. D. Joyce, “*Compact Riemannian 7-manifolds with  $G_2$  holonomy I*”, *J. Diff. Geom.* **43** (1996) 291.
- [76] D. D. Joyce, “*Compact Riemannian 7-manifolds with  $G_2$  holonomy II*”, *J. Diff. Geom.* **43** (1996) 329.
- [77] D. D. Joyce, “*Compact 8-manifolds with holonomy  $Spin(7)$* ”, *Inven. Math.* **123** (1996) 507.
- [78] B. S. Acharya, “*On realising  $N = 1$  super Yang-Mills in M theory*”, hep-th/0011089.
- [79] M. Atiyah, J. Maldacena and C. Vafa, “*An M-theory flop as a large  $N$  duality*”, *J. Math. Phys.* **42** (2001) 3209–3220, [hep-th/0011256].
- [80] M. Cvetič, G. W. Gibbons, H. Lu and C. N. Pope, “ *$M3$ -branes,  $G_2$  manifolds and pseudo-supersymmetry*”, *Nucl. Phys.* **B620** (2002) 3–28, [hep-th/0106026].
- [81] M. Cvetič, G. W. Gibbons, H. Lu and C. N. Pope, “*New complete non-compact  $Spin(7)$  manifolds*”, *Nucl. Phys.* **B620** (2002) 29–54, [hep-th/0103155].

- [82] B. S. Acharya and C. Vafa, “On domain walls of  $N = 1$  supersymmetric Yang-Mills in four dimensions”, [hep-th/0103011](#).
- [83] A. Brandhuber, J. Gomis, S. S. Gubser and S. Gukov, “Gauge theory at large  $N$  and new  $G_2$  holonomy metrics”, *Nucl. Phys.* **B611** (2001) 179–204, [[hep-th/0106034](#)].
- [84] M. Atiyah and E. Witten, “M-theory dynamics on a manifold of  $G_2$  holonomy”, [hep-th/0107177](#).
- [85] S. L. Shatashvili and C. Vafa, “Superstrings and manifold of exceptional holonomy”, *Selecta Math.* **A1** (1995) 347–381, [[hep-th/9407025](#)].
- [86] T. Eguchi and Y. Sugawara, “CFT description of string theory compactified on non-compact manifolds with  $G_2$  holonomy”, *Phys. Lett.* **B519** (2001) 149–158, [[hep-th/0108091](#)].
- [87] K. Sugiyama and S. Yamaguchi, “Cascade of special holonomy manifolds and heterotic string theory”, *Nucl. Phys.* **B622** (2002) 3–45, [[hep-th/0108219](#)].
- [88] R. Blumenhagen and V. Braun, “Superconformal field theories for compact  $G_2$  manifolds”, *JHEP* **12** (2001) 006, [[hep-th/0110232](#)].
- [89] R. Roiban and J. Walcher, “Rational conformal field theories with  $G_2$  holonomy”, *JHEP* **12** (2001) 008, [[hep-th/0110302](#)].
- [90] T. Eguchi and Y. Sugawara, “String theory on  $G_2$  manifolds based on Gepner construction”, [hep-th/0111012](#).
- [91] R. Blumenhagen and V. Braun, “Superconformal field theories for compact manifolds with  $spin(7)$  holonomy”, *JHEP* **12** (2001) 013, [[hep-th/0111048](#)].
- [92] S. Stanciu, “D-branes in an  $AdS_3$  background”, *JHEP* **09** (1999) 028, [[hep-th/9901122](#)].
- [93] J. M. Figueroa-O’Farrill and S. Stanciu, “D-branes in  $AdS_3 \times S^3 \times S^3 \times S^1$ ”, *JHEP* **04** (2000) 005, [[hep-th/0001199](#)].

- [94] C. Bachas and M. Petropoulos, “*Anti-de-Sitter D-branes*”, *JHEP* **02** (2001) 025, [[hep-th/0012234](#)].
- [95] P. M. Petropoulos and S. Ribault, “*Some remarks on anti-de Sitter D-branes*”, *JHEP* **07** (2001) 036, [[hep-th/0105252](#)].
- [96] A. Giveon, D. Kutasov and A. Schwimmer, “*Comments on D-branes in  $AdS_3$* ”, *Nucl. Phys.* **B615** (2001) 133–168, [[hep-th/0106005](#)].
- [97] P. Lee, H. Ooguri, J. w. Park and J. Tannenhauser, “*Open strings on  $AdS_2$  branes*”, *Nucl. Phys.* **B610** (2001) 3–48, [[hep-th/0106129](#)].
- [98] M. A. Lomholt and A. L. Larsen, “*Open strings in the  $SL(2,R)$  WZWN model with solution for a rigidly rotating string*”, [hep-th/0107035](#).
- [99] Y. Hikida and Y. Sugawara, “*Boundary states of d-branes in  $AdS_3$  based on discrete series*”, [hep-th/0107189](#).
- [100] A. Rajaraman and M. Rozali, “*Boundary states for D-branes in  $AdS_3$* ”, [hep-th/0108001](#).
- [101] A. Parnachev and D. A. Sahakyan, “*Some remarks on D-branes in  $AdS_3$* ”, *JHEP* **10** (2001) 022, [[hep-th/0109150](#)].
- [102] S.-j. Ryang, “*Nonstatic  $AdS_2$  branes and the isometry group of  $AdS_3$  spacetime*”, [hep-th/0110008](#).
- [103] O. Aharony, M. Berkooz and E. Silverstein, “*Non-local string theories on  $AdS_3 \times S^3$  and stable non-supersymmetric backgrounds*”, [hep-th/0112178](#).
- [104] P. Lee, H. Ooguri and J.-w. Park, “*Boundary states for  $AdS_2$  branes in  $AdS_3$* ”, [hep-th/0112188](#).
- [105] B. Ponsot, V. Schomerus and J. Teschner, “*Branes in the Euclidean  $AdS_3$* ”, [hep-th/0112198](#).