共形場理論

の手法による、余次元２のtwist

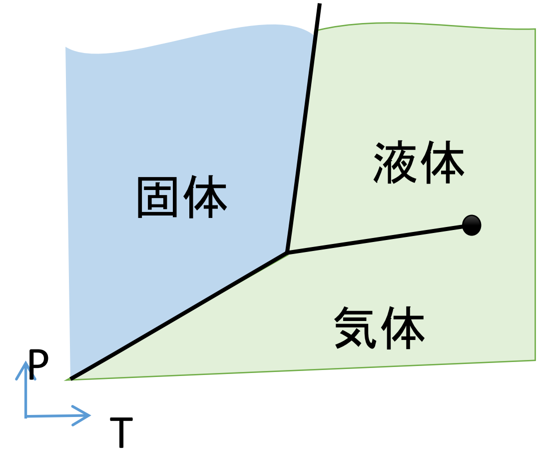
defectの理論のε展開

山口哲（大阪大学）

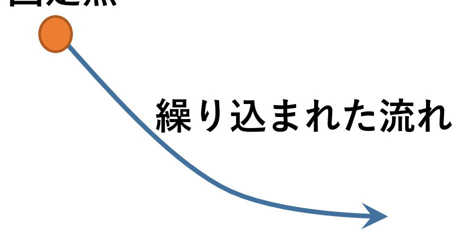
共形場理論（CFT）：

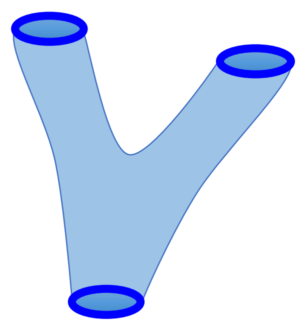
共形対称性（⊃スケール不変性）のある場の理論

共形場理論（CFT）：



- 臨界現象
- UV completeな場の理論
- 弦の世界面の理論
- AdS/CFT対応

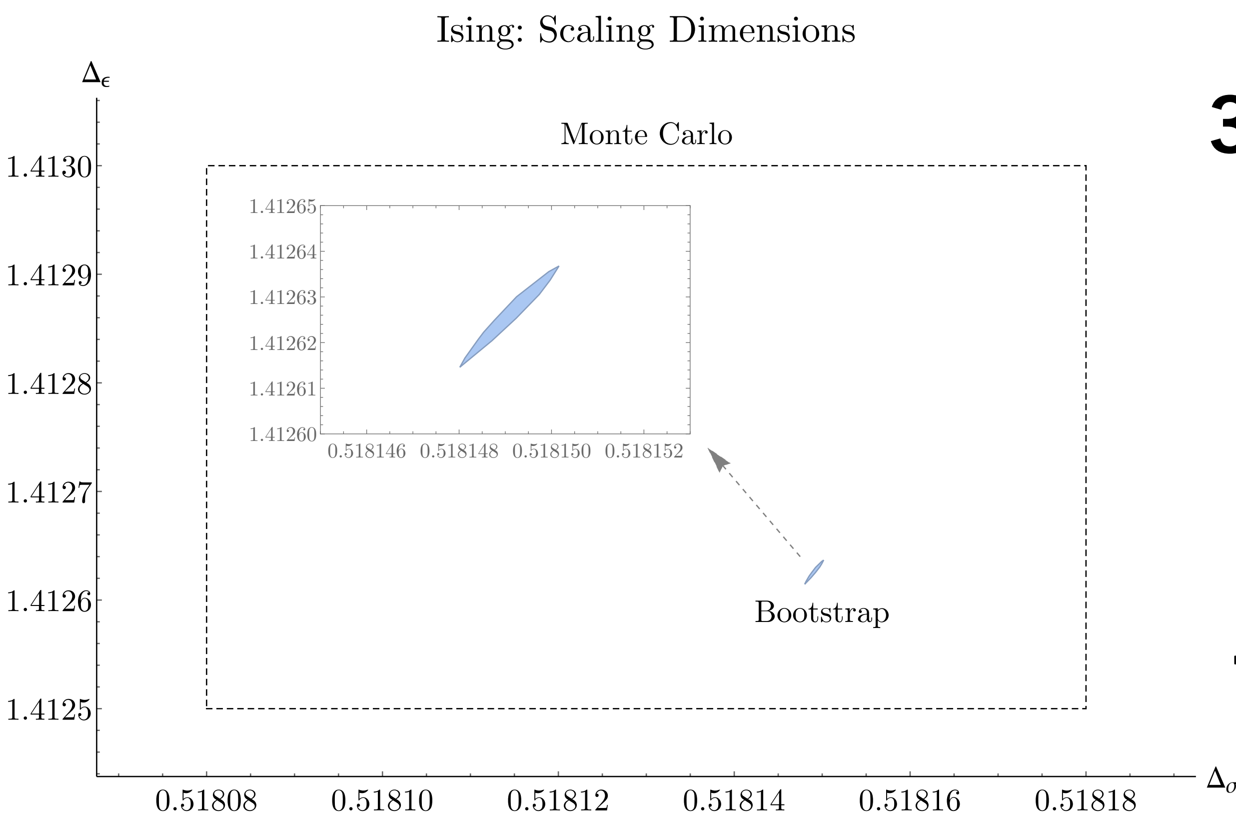




共形場理論（CFT）の最近の結果

数値ブートストラップ

[F. Kos, D. Poland, D. Simmons-Duffin and A. Vichi, arXiv:1603.04436]



3 次元 Ising CFT

共形対称性＋ α

⇩

一点に決まる！？

問題　共形対称性＋αだけで

- どこまでいけるか？
- なぜこんなに強力か？

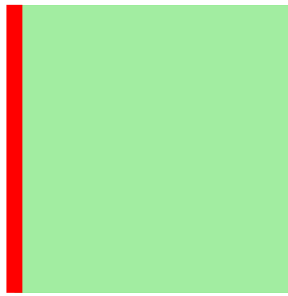
⇩

解析的な手法が必要

一つのアプローチ：[Rychkov,Tan '15] ε展開

後で詳しくレビュー

Defect: Boundary の一般化



２次元Boundary CFT
(open string)

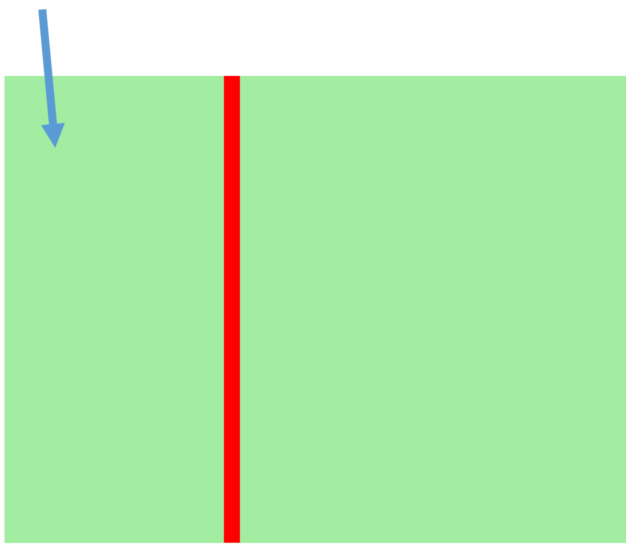
↓

D-brane

↓

一般化

こちらにも理論がある



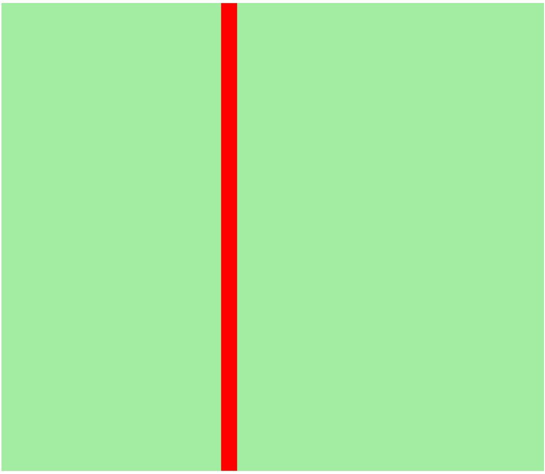
２次元の中で１次元 defect

↓ 一般化

d次元の中でD次元defect

Defect: Wilson lineの一般化

Wilson line: ゲージ場と電気的に結合した試験粒子を手で入れる。



一般化

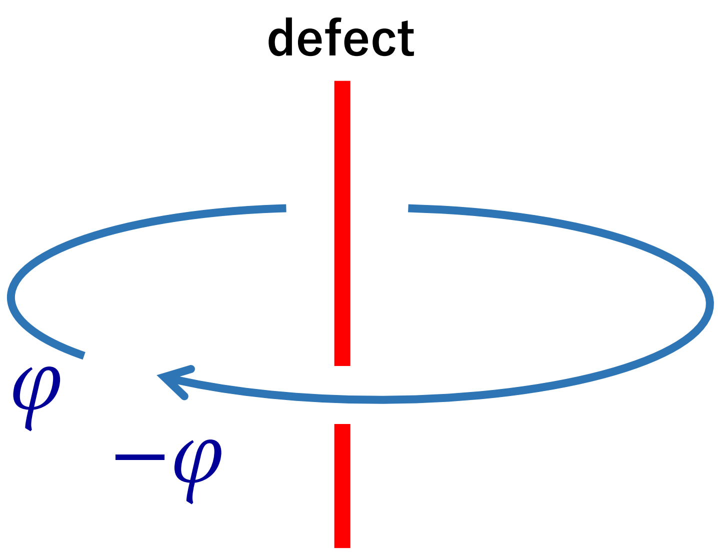
試験オブジェクトを手で入れる。

今日あつかうDefect: “Twist defect”

[Billo, Caselle, Gaiotto, Gliozzi, Meineri], [Gaiotto, Mazac, Paulos]

codimension 2、モノドロミー

例：３次元 Ising
スピン演算子 φ



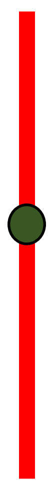
cf ２次元 orbifold CFT のtwisted sectorの vertex operator

今回やったこと

「Open string のスペクトル」みたいなもの

$4-\varepsilon$ 次元 O(N)モデル Wilson-Fisher(WF)固定点 (CFT)

Twist defect



defect上局所演算子

ψ_s

スケーリング次元をRychkov-Tanの方法で求めた。

Plan

- 共形場理論(CFT)
- Rychkov-Tanのレビュー
- Twist defect
- 議論

共形場理論
(CFT)

共形対称性

次元

+1	P_μ （並進）		
0	$M_{\mu\nu}$（回転）	H （dilatation）	
-1	K_μ （特殊共形変換）		

局所演算子 $\mathcal{O}_a(x)$

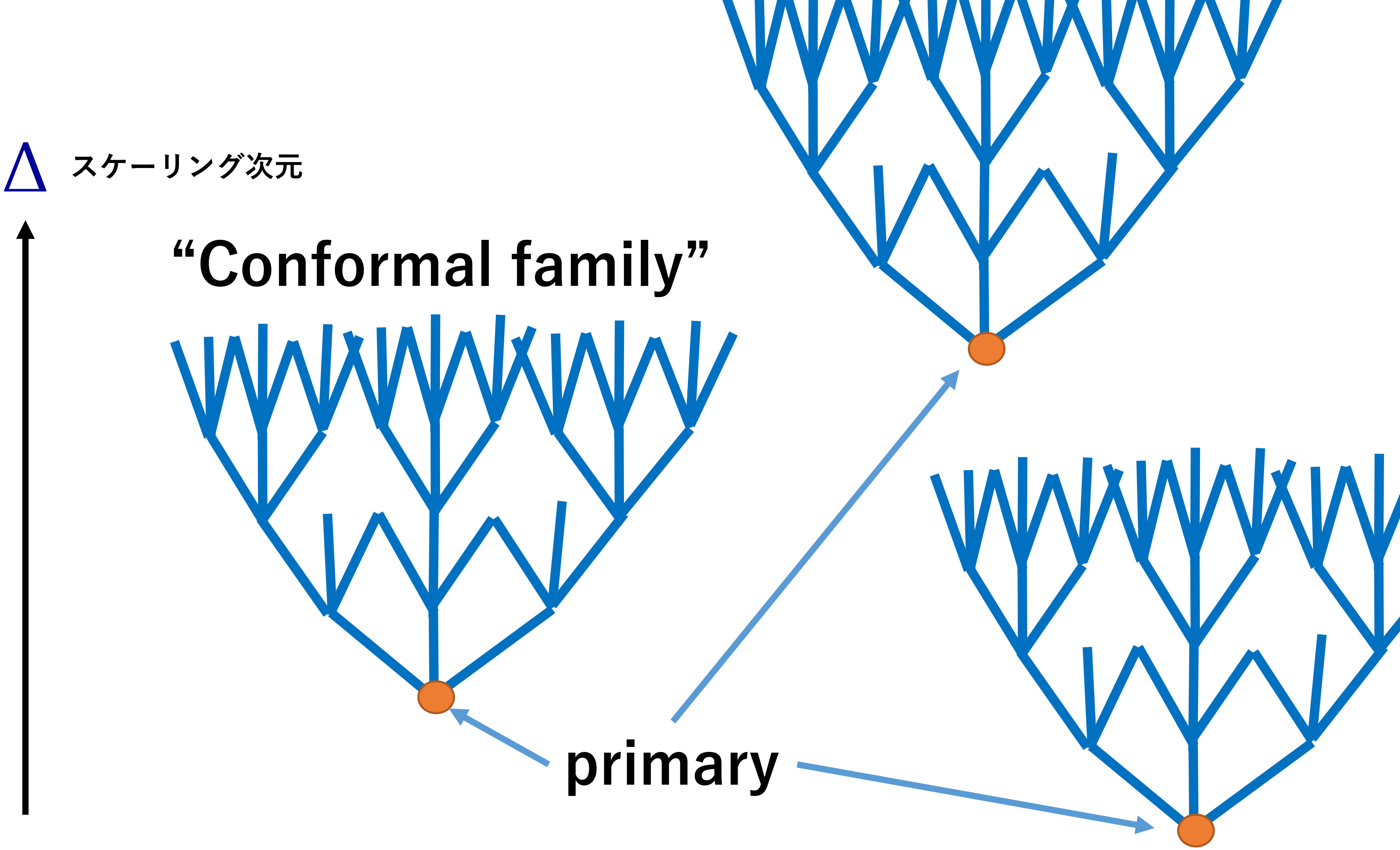
スケーリング次元

H を対角化 $[H, \mathcal{O}_a(0)] = \Delta_a \mathcal{O}_a(0)$

どちらか

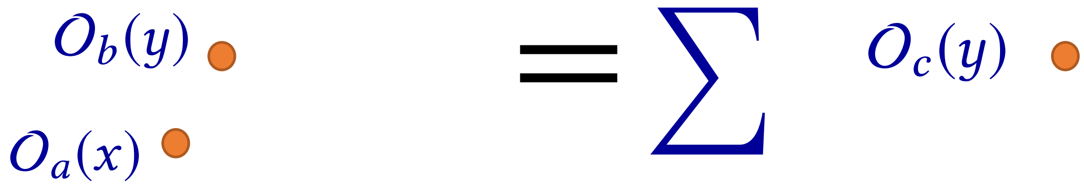
"primary" $[K_\mu, \mathcal{O}_a(0)] = 0$

"descendant" $\mathcal{O}_a(0) = \partial_\mu \mathcal{O}'_a(0)$



primaryの相関関数が全て分かれば、
全ての相関関数が分かる。

演算子積展開(OPE)



$$\mathcal{O}_a(x)\mathcal{O}_b(y) = \sum_c C_{ab}^{c}(x-y)\mathcal{O}_c(y)$$

相関関数の中でこれをこれに置き換えてよい

共形場理論

- 演算子のスペクトル
- OPE

すべての
相関関数

primaryとOPE

Primary

$$\mathcal{O}_A(x)\mathcal{O}_B(y) = \sum_{C:\text{primary}} C_{AB}^{C}(x-y)\left(\mathcal{O}_C(y) + \partial^n \mathcal{O}_C(y) + \cdots\right)$$

ここの係数は、$\mathcal{O}_A,\ \mathcal{O}_B,\ \mathcal{O}_C$ のスピン、スケーリング次元、 ∂^nの形だけで決まる。

理論の詳細によらない

Plan

- 共形場理論(CFT)
- Rychkov-Tanのレビュー
- Twist defect
- 議論

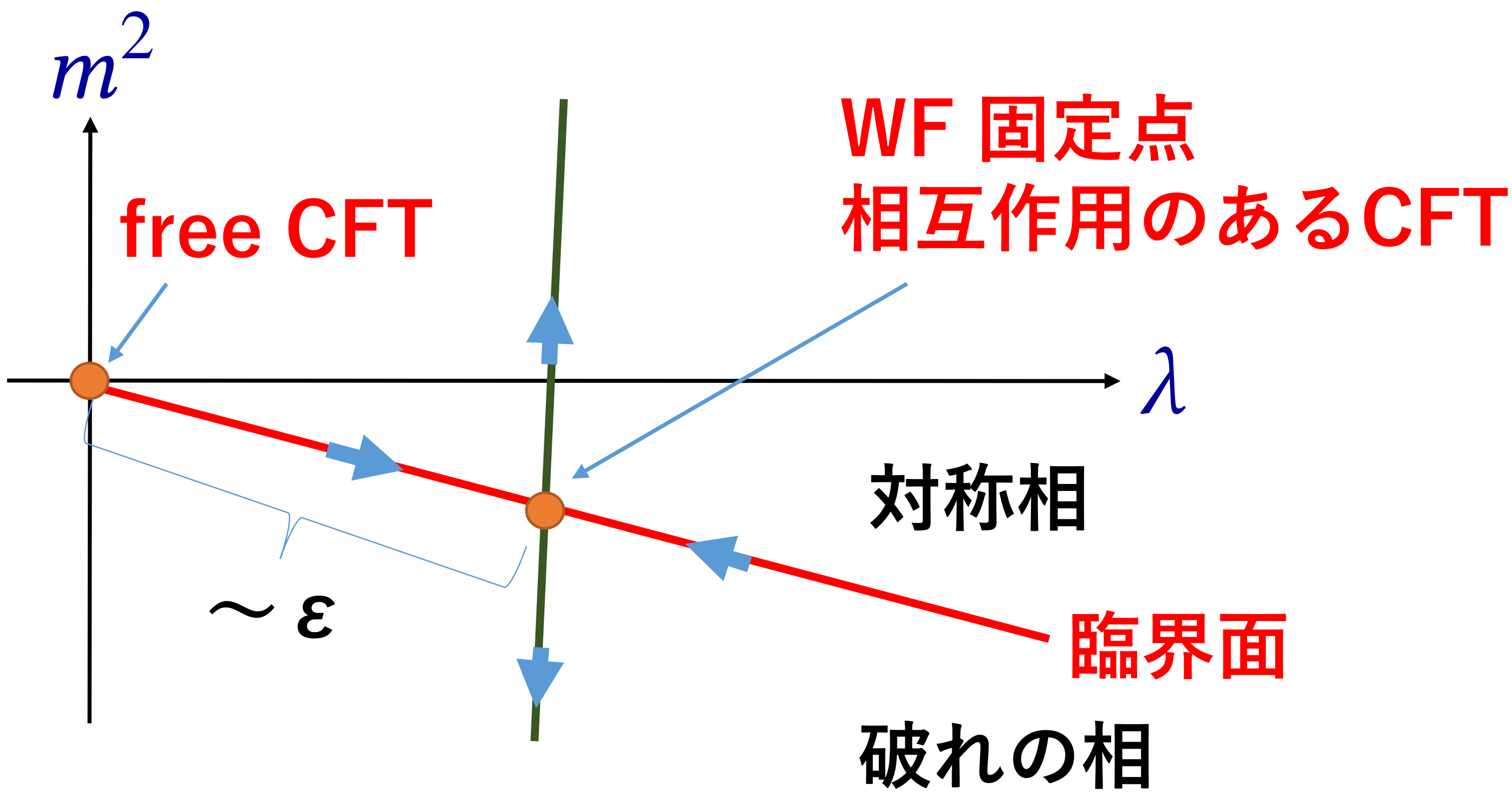
Rychkov-Tan の ε 展開

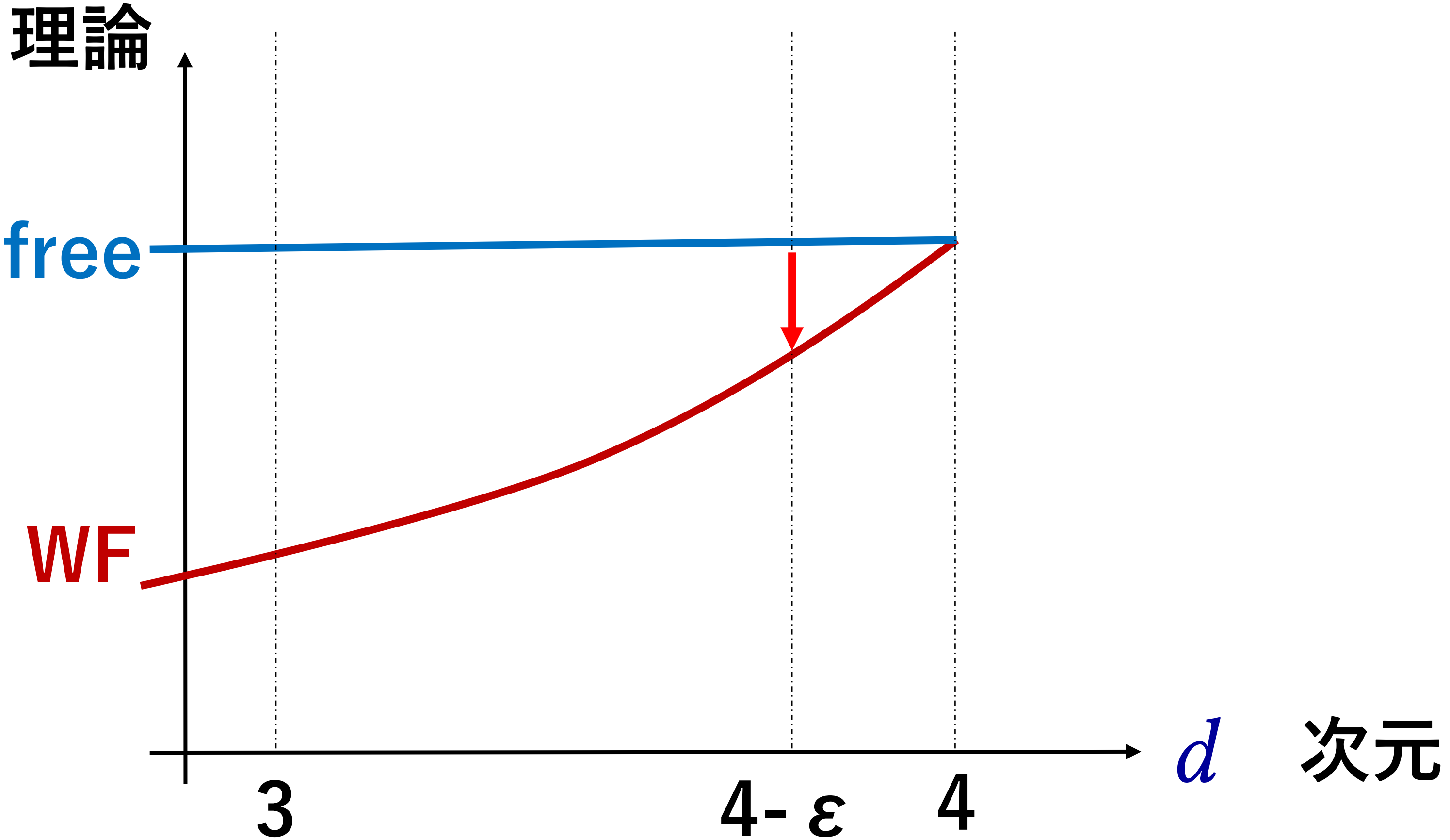
あつかう理論

4ー ε 次元で φ^4 理論 [Wilson, Fisher]

$$S = \int d^d x \left(\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 \right)$$

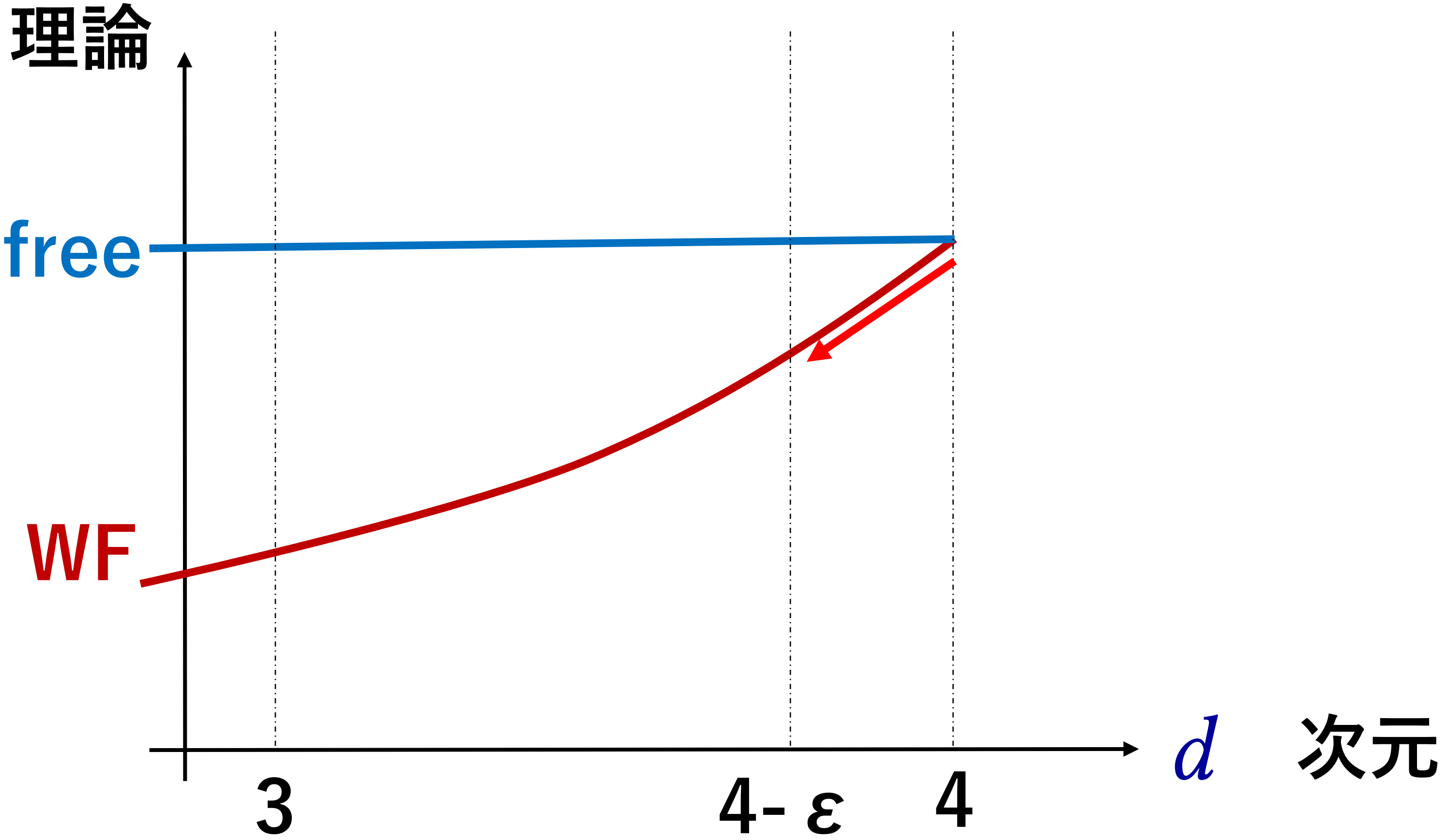
(Euclidean)





4- ε 次元ではWFはfreeに近い ➡ 摂動論がよい

ふつうのε展開



RT: なるべくLagrangianは使いたくない。

共形対称性＋α

どうするか

方針：いくつか公理をおいてそれの帰結を考える

共形対称性を使うので、

公理Ⅰ　　WF固定点の理論はCFT

WF固定点を特徴づける＋αの部分

公理 II　　　$\varepsilon \to 0$ で
　　$4-\varepsilon$ 次元WF理論　→　free

free CFTもこれを満たしてしまう。
さらなる特徴付けが必要。

relevant 演算子 $\Delta < d$

4 − ε 次元ではfreeとWFは「近い」はず

free	φ	φ^2	φ^3	φ^4	
	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$		
WF	V_1 (spin)	V_2 (energy)	$\boxed{}$	V_4	irrelevant

$\varphi^3 \longleftrightarrow V_3$ はWFでは V_1 のdescentant!

運動方程式 $\varphi^3 = \frac{3!}{\lambda}(-m^2 + \Box)\varphi$

記号　$V_n(x)$ 局所演算子

$\varepsilon \to 0$ で　$V_n(x) \longrightarrow \varphi^n(x)$

（公理IIより存在）

公理III　ある定数 α

$$\Box V_1 = \alpha V_3$$

アイデア

$\Delta_{n+1}, \Delta_n, \Delta_1$ で決まる

$= \frac{1}{\alpha}\Box V_1(0)$

$$V_{n+1}(x)V_n(0) = \cdots + \bullet\left(V_1(0) + \bullet\, V_3(0) + \cdots\right) + \cdots$$

比較

$\Delta_{n+1}, \Delta_n, \Delta_1$
の間の関係式

$\varepsilon \to 0$ でfree

$$\varphi^{n+1}(x)\varphi^{n}(0) = \cdots + \bullet\left(\varphi(0) + \bullet\, \varphi^3(0) + \cdots\right) + \cdots$$

Wick縮約で計算

結果

$$\Delta_1 = 1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{108} + O(\epsilon^3)$$

$$\Delta_n = n - n\frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{6}n(n-1)\epsilon + O(\epsilon^2), \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

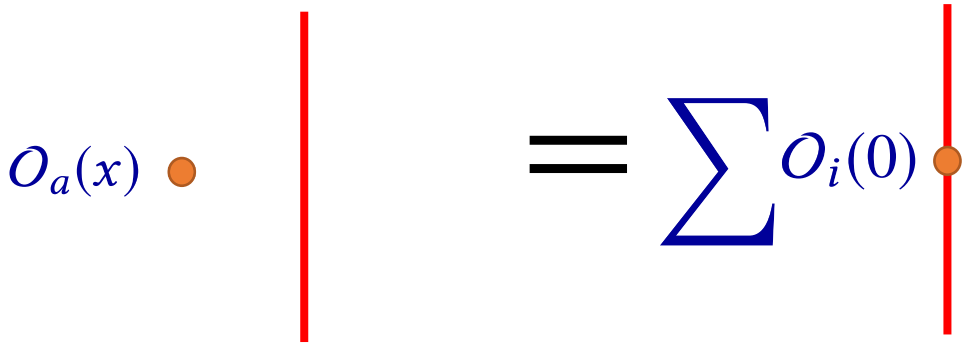
Plan

- 共形場理論(CFT)
- Rychkov-Tanのレビュー
- Twist defect
- 議論

Twist defect

bulk-defect OPE

[Cardy], [McAvity, Osborn]



$$\mathcal{O}_a(x) = \sum_i C_{ai}(x)\mathcal{O}_i(0)$$

defect上局所演算子

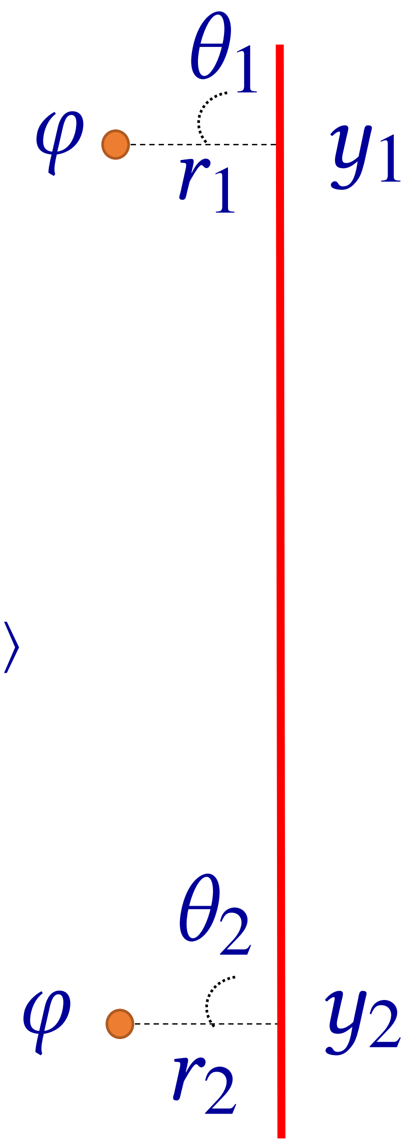
Bulk 2点関数にdefect上の演算子の情報が見える。

codim 2 defect

$$\varphi(x_1) = \sum_i \frac{e^{is_i\theta_1}}{r_1^{\Delta_\varphi - \Delta_i}} O_i(y_1)$$

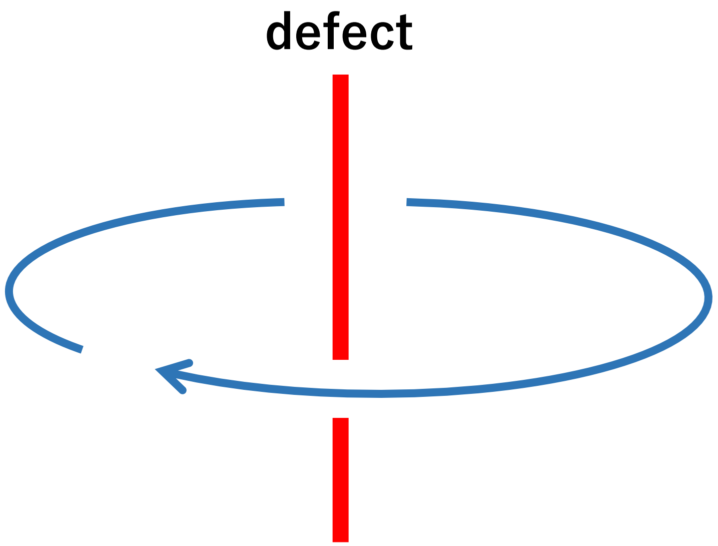
$$\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\rangle = \sum_{i,j} C_{\varphi i}\frac{e^{is_i\theta_1}}{r_1^{\Delta_\varphi - \Delta_i}} C_{\varphi j}\frac{e^{is_j\theta_2}}{r_2^{\Delta_\varphi - \Delta_j}} \langle O_i(y_1) O_j(y_2)\rangle$$

$$= \sum_i |C_{\varphi i}|^2 \frac{e^{is_i(\theta_1-\theta_2)}}{r_1^{\Delta_\varphi - \Delta_i} r_2^{\Delta_\varphi - \Delta_j}} \left(\frac{1}{|y_1 - y_2|^{2\Delta_i}} + (\text{descendants})\right)$$



Twist defect

[Billo, Caselle, Gaiotto, Gliozzi, Meineri], [Gaiotto, Mazac, Paulos]



$$V_n \longrightarrow -V_n, \quad n : \text{odd}$$

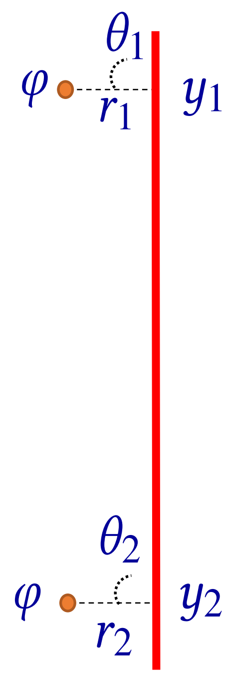
$$V_n \longrightarrow V_n, \quad n : \text{even}$$

4次元free理論 [Gaiotto, Mazac, Paulos]

$$\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\rangle_{\text{defect}}$$ を計算

cf AdSのbulk-to-bulk propagator

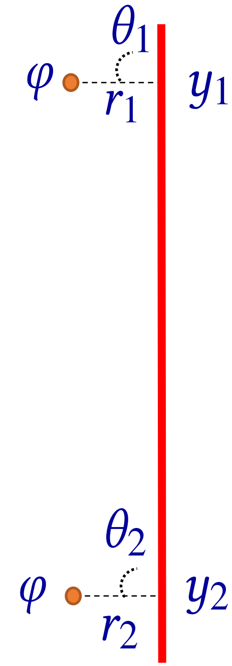
$$\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\rangle_{\text{defect}} = \sum_{s\in\mathbb{Z}+1/2} G_0(x_1,x_2,s)$$



$$G_0(x_1,x_2,s) = \frac{e^{is(\theta_1-\theta_2)}}{4r_1r_2}\frac{\xi^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+\xi}\left(\sqrt{\xi}+\sqrt{1+\xi}\right)^{2|s|}}$$

$$\xi = \frac{(y_1-y_2)^2+(r_1-r_2)^2}{4r_1r_2}$$

defect上の演算子を読み取る



$$|y_1 - y_2| \to \infty \qquad (\xi \to \infty)$$

$$G_0(x_1, x_2, s) \to \frac{e^{is(\theta_1 - \theta_2)}}{(r_1 r_2)^{-|s|}} \frac{1}{|y_1 - y_2|^{2(|s|+1)}}$$

defect 上局所演算子 $\psi_s(y)$ $\quad s \in \mathbb{Z} + 1/2$ の存在

スケーリング次元 $\quad |s| + 1$

bulk-defect OPE $\quad \varphi(x) = \cdots + \dfrac{e^{is\theta}}{r^{-|s|}} \psi_s(0) + \cdots$

defect 上局所演算子 $\psi_s(y)$ $s \in \mathbb{Z} + 1/2$ の存在

スケーリング次元 $|s| + 1$

WF CFTでのどうなるか？

Rychkov-Tanの枠組みを適用

4 次元自由場 bulk-defect OPE

$$\varphi^3(x) = \cdots - \frac{3}{8}\frac{e^{is\theta}}{r^{2-|s|}}\psi_s(0) + \cdots$$

4- ε 次元WF理論でbulk-defect OPE

$$V_1(x) = \cdots + C_{1s} \frac{e^{is\theta}}{r^{\Delta_1 - \Delta_s}} \psi_s(0) + \cdots$$

$$\begin{aligned} V_3(x) =& \frac{1}{\alpha} \Box V_1(x) \\ &= \cdots + \frac{1}{\alpha} C_{1s} \Box \frac{e^{is\theta}}{r^{\Delta_1 - \Delta_s}} \psi_s(0) + \cdots \ , \\ &= \cdots + \frac{-s^2 + (\Delta_1 - \Delta_s)^2}{\alpha} C_{1s} \frac{e^{is\theta}}{r^{\Delta_1 + 2 - \Delta_s}} \psi_s(0) + \cdots \ . \end{aligned}$$

ε →0でfree CFTと比較 ⇒ Δ_s

結果

$$\Delta_s = |s| + 1 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{24|s|} \right) \epsilon + O(\epsilon^2)$$

※Feynman diagramの計算と一致

[Gaiotto, Mazac, Paulos]

O(N)モデルでも出来る

$$\Delta_s = |s| + 1 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{N+2}{8(N+8)|s|} \right) \epsilon + O(\epsilon^2)$$

※Feynman diagramの計算と一致

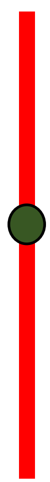
Plan

- 共形場理論(CFT)
- Rychkov-Tanのレビュー
- Twist defect
- 議論

今回やったこと

4ーε次元 O(N)モデル Wilson-Fisher(WF)固定点
(CFT)

Twist defect



defect上局所演算子

ψ_s

スケーリング次元をRychkov-Tanの方法で求めた。

展望：さまざまな手法の妥当性

- large N
- 数値ブートストラップ
- モンテカルロ
- large s？
- 実験？

疑問：Lagrangianを使ってない？

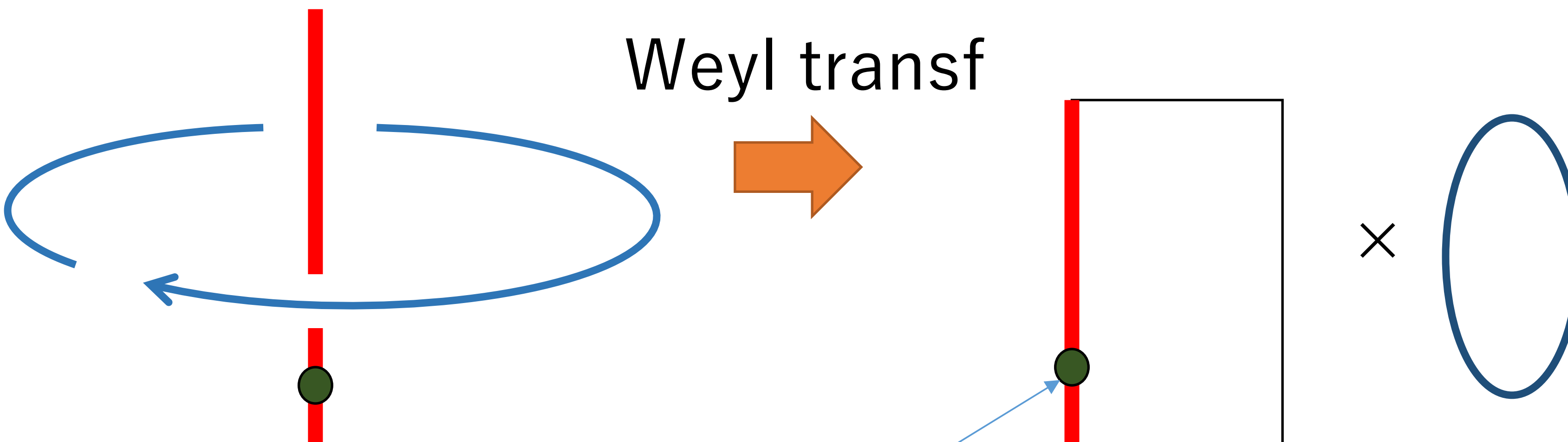
少なくともショートカットではある。

運動方程式 → Feynman rule

defect CFT がAdS/CFTのミニチュア?

flat space + defect

$$AdS_{d-1} \times S^1$$



Local operator
on the defect ψ_s

φ_s Each KK mode

$$\Delta_s = \frac{d-2}{2} + \sqrt{\frac{d-2}{2} + m_s^2}$$

Large N 極限
AdS/CFT 対応と同じ