フェルミオンの経路積分
と
Atiyah-Patodi-Singer 指数

山口 哲
(大阪大学)

1. 導入：経路積分とは

考えたいこと：確率分布みたいなもの.

$$\mathcal{M} := \mathbb{R}^N \ni \phi = (\phi_1, \cdots, \phi_N)$$

「場」

$$S : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$$

「作用」 $|\phi| \to \infty$ で十分速く $S \to +\infty$

$|\phi|^2$と同じくらいかそれ以上

確率密度 $\propto e^{-S(\phi)}$

規格化の定数

$$Z := \int_{\mathcal{M}} D\phi \, e^{-S(\phi)}$$

「分配関数」

$$D\phi := \prod_{i=1}^{N} d\phi_i$$

期待値（相関関数）

$F(\phi)$ ： ϕの関数（多項式とか）

$$\langle F(\phi) \rangle := \frac{1}{Z} \int_{\mathcal{M}} D\phi \, F(\phi) e^{-S(\phi)}$$

（ちゃんと定義されている!!）

場の理論のヤバイところ

ϕ_i で i を連続的にする

例: リーマン多様体 X 　「時空」

$\mathcal{M} := \mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$

$S : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ 「よい」もの

何が「よい」かは後まわし

$$Z = \int_{\mathcal{M}} D\phi\, e^{-S(\phi)} \qquad D\phi = \prod_{x \in X} d\phi_x$$

こんなものが定義されるのか!?

物理屋的な態度

- とりあえず信じていろいろ計算してみる.
- 困ったら考える.

(すぐ困る)

ここでお話ししたいこと.

- どう困るのか ⇒ 発散

⇓

「処理」 ⟶ $\int D\phi$ が素朴に期待する性質(対称性)を持たない

「アノマリー」

◦ アノマリーの一つの見方：次元の高い時空を考える。
"SPT相"
⤳ Atiyah - Patodi - Singer 指数定理

◦ APS指数の別の見方（Domain-wall フェルミオン）

（深谷英則さん，古田幹雄さん，松尾信一郎さん，大野木哲也さん，山下真由子さん
との共同研究に基づく．）

補足

多成分　　X：リーマン多様体

$$\mathcal{M} := \mathrm{Map}(X, \mathbb{R}^N)$$

場 $\phi_i(x)$: $i=1,\cdots,N$, $x \in X$
$\phi_i(x) = \phi_{i,x}$

$$D\phi = \prod_{\substack{i=1,\cdots,N \\ x \in X}} d\phi_{i,x}$$

ベクトル束　$E \to X$

パッチごとに，各点ごとにファイバー方向の基底をとる
→ 上に帰着

2. フェルミオンの積分

Grassmann代数（外積代数）

$$(\theta_1, \cdots, \theta_N \text{から生成される自由代数}) / (\theta_i\theta_j + \theta_j\theta_i)$$

関係

$\theta_i \theta_j = -\theta_j \theta_i$　特に $\theta_i^2 = 0$　※フェルミ・ディラック統計にしたがう粒子「フェルミオン」を定式化するのに使う.

θ_i「（フェルミオンの）場」

これの元 $f(\theta)$：θの多項式の形に書ける.
関数っぽい.

いちばん左に出す.

微分：$f(\theta) = f_0 + \theta_1 f_1$　θ_1^2なので、ここで止まる

θ_1は入ってない

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} f(\theta) := f_1$$

積分：$\int d\theta_1 := \frac{\partial}{\partial \theta_1}$　（気分を出すため）

☆ ガウス積分

$\psi^1, \psi^2, \cdots, \psi^N, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \cdots, \bar{\psi}_N$ から生成される Grassmann代数を考える.

$A \in \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$，$A^i{}_j$：成分

$$D\bar{\psi} D\psi := \prod_{i=1}^{N} (d\bar{\psi}_i \, d\psi^i)$$

$$\Rightarrow \int D\bar{\psi} D\psi \, e^{-\sum_{i,j} A^i{}_j \bar{\psi}_i \psi^j} = \det A$$

3. 1次元の例

3.1 時空と場

$\boxed{\text{さっきの } \psi^i, \bar{\psi}_i \text{ の } i \text{ を連続にする.}}$

- 時空 $Y = S^1$, 座標 $x \in \mathbb{R}$　$x \sim x + 2\pi$
- $\mathbb{R} \to S$: "スピノール束"　fiber $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{c} S \\ \downarrow \\ Y \end{array}$$

$\mathbb{C} \to E$: Hermitian line bundle

$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ Y \end{array}$$

U(1)接続 A ⇒ 各点ごとにbasisを選ぶ

⇒ ベクトル場 $A(x)$

"ゲージ場"

$\phi \in \Gamma(S \otimes E)$

$\bar{\phi} \in \Gamma((S \otimes E)^*)$

座標, basis

$\phi(x+2\pi) = -\phi(x)$

$\phi(x)$, $\bar{\phi}(x)$, $\bar{\phi}(x+2\pi) = -\bar{\phi}(x)$

⇓ フェルミオンにする.

$\boxed{\psi(x), \ \bar{\psi}(x)}$

- 共変微分

$$D_1 \psi(x) = \partial_x \psi(x) - i A(x) \psi(x)$$

$$\int D\bar{\psi} D\psi \, e^{-\sum_{ij} A^i{}_j \bar{\psi}_i \psi^j} = \det A$$

- 作用

$$S(\psi, \bar{\psi}, A) = \int dx \, \bar{\psi}(x) \, i D_1 \psi(x)$$

- 分配関数 $Z(A) = \int D\bar{\psi} D\psi \, e^{-S(\psi, \bar{\psi}, A)}$

" $= \det i D_1$ "

期待する対称性

① $Z(A)$ は実数 ($\Leftarrow iD_1$ はエルミート) **T対称性**

② E のファイバーの basis のとり方によらない

$$\alpha : Y \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \qquad (g : Y \to U(1))$$

$$A(x) \to A'(x) = A(x) + \partial_x \alpha(x) \qquad (g(x) = e^{i\alpha(x)})$$

U(1)ゲージ対称性

3.2 発散

$$Z(A) \text{"}=\det iD_1\text{"} \quad ?$$

きっと固有値の積だろう.

数学的に定義されている

$$iD_1\phi = \lambda\phi \Rightarrow i\partial_x\phi + A\phi = \lambda\phi$$

$$\Rightarrow \partial_x\phi = i(A-\lambda)\phi$$

$$\phi(x) = e^{i\int_0^x d\xi (A(\xi)-\lambda)}\phi(0)$$

特に $\phi(2\pi) = e^{i\int_0^{2\pi} dx A(x) - 2\pi i\lambda}\phi(0)$

$\int_0^{2\pi} dx A(x) = 2\pi a$

$= -\phi(0)$

$$\Rightarrow e^{2\pi i(a-\lambda)} = -1$$

$$a - \lambda = -r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$$

固有値

$$\boxed{\lambda_r := r + a}$$

$$Z(A) = \prod_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \lambda_r = \prod_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} (r+a)$$

発散する!! 困る!

どうするか?

正則化(と繰り込み)

$$Z = \lim_{\Lambda\to\infty} Z_\Lambda$$

"カットオフ"

スキーム

Z_Λ を有限にする「正則化」

Z が有限になるように作用 S を Λ によらせる「くりこみ」

問題: これで定義した Z は、素朴に期待する対称性を持つか?

※ U(1) ゲージ対称性

Z は a の関数に書ける

$$a' = \frac{1}{2\pi}\oint A'(x)\,dx = a + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\oint \partial_x\alpha(x)\,dx}_{=w\in\mathbb{Z}}$$

winding number

$$\boxed{Z(a+1) \overset{?}{=} Z(a)}$$

3.3 運動量カットオフ

正則化

$$\prod_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \lambda_r \longrightarrow \boxed{\prod_{\substack{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}\\ |r|<\Lambda}} \lambda_r}$$

$$Z_\Lambda^{cut} := 2\frac{\prod_{|r|<\Lambda}\lambda_r}{\prod_{|r|<\Lambda} r}$$

aによらない定数

a依存性は変えてない.

$$= 2\prod_{|r|<\Lambda}\frac{(r+a)}{r} = 2\prod_{|r|<\Lambda}\left(1+\frac{a}{r}\right)$$

有限積なので順番入れかえ放題

$$= 2\prod_{0<r<\Lambda}\left(1+\frac{a}{r}\right)\left(1-\frac{a}{r}\right) = 2\prod_{0<r<\Lambda}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)$$

無限積の公式

$$Z^{cut} = \lim_{\Lambda\to\infty} Z_\Lambda^{cut} = 2\cos\pi a$$

対称性？

① Good $Z^{cut}\in\mathbb{R}$

② NG $Z^{cut}(a+1) = \cos(\pi(a+1)) = -\cos\pi a = -Z^{cut}(a)$

そもそも Z_Λ^{cut} が $a\to a+1$ で不変でない.

$\rightsquigarrow$ "アノマリー"

※ $Z^{cut}(a)$ の解釈

ゲージ場の配位全体の空間上の「関数」ではない。

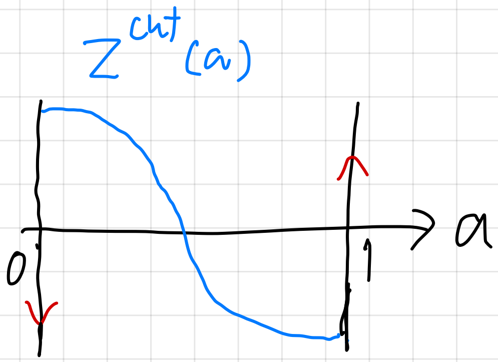
が

非自明な直線束の切断

今の場合　$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$a \in \mathbb{R}$

$a \sim a+1$



3.4 Pauli-Villars 正則化

$\lambda_r=0$ があると $Z=0$　$\lambda_r\neq 0$ for $\forall r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ の場合を考える

$$Z^{PV}_{\Lambda} \propto \prod_r \frac{\lambda_r(\lambda_r+i\Lambda_2)}{(\lambda_r-i\Lambda_1)(\lambda_r+i\Lambda_3)}$$

aによらない定数倍異なる。

$\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3>0$，大きい。

$$\boxed{\Lambda_1+\Lambda_2-\Lambda_3=0 \text{ なら絶対収束}}$$

$$\prod_r\left(1++\frac{@}{\lambda_r^2}+\cdots\right)$$

$\frac{1}{\lambda_r}$ の項なし

$$\frac{\Lambda_1+\Lambda_2-\Lambda_3}{\lambda_r}$$

$|\lambda_r|\ll\Lambda_i$ に対して

$$\frac{\lambda_r\, i\Lambda_2}{\Lambda_1\Lambda_3}$$

aによらない定数

⇒ ほしいものの正則化になっている。

絶対収束なので順番入れかえ放題

$$Z^{PV}_{\Lambda} \propto \frac{\cos\pi a\ \cos\pi(a+i\Lambda_2)}{\cos\pi(a-i\Lambda_1)\cos\pi(a+i\Lambda_3)}$$

$$\xrightarrow{(\Lambda\to\infty)} 2\cos\pi a \frac{e^{-\pi i a+\pi\Lambda_2}}{e^{+\pi i a+\pi\Lambda_1}\ e^{-\pi i a+\pi\Lambda_3}}$$

$$= 2\cos\pi a\ e^{-\pi i a}\ \underline{e^{\pi(-\Lambda_1+\Lambda_2-\Lambda_3)}}$$

aによらない定数をかけて落とす

$$\boxed{Z^{PV} = 2\cos\pi a \ e^{-\pi i a}}$$

対称性?

① NG　Z^{PV}は位相 $e^{-\pi i a}$がある

　$Z^{PV}_{\wedge}$が実ではなかった

② Good　$Z^{PV}(a+1) = Z^{PV}(a)$

(運動量カットオフ: ① Good　② NG)

両方いっぺんに保つのは無理そう…

アノマリー

絶対無理か?

うまい正則化をもってくれば両方保てるかも…

見通しのよい方法が必要

"アノマリー流入" (anomaly inflow)

両方の対称性を保つかわりに次元を上げる

昨日やったこと.

$\psi^i, \bar\psi_i$, $i=1,\cdots,N$ で生成されるGrassmann代数

($\psi^i, \bar\psi_i$ たちは反交換する)

$$\int D\bar\psi D\psi := \int \prod_{i=1}^{N} (d\bar\psi_i d\psi^i)$$

$$\int D\bar\psi D\psi\, e^{-\sum_{i,j} A^i{}_j \bar\psi_i \psi^j} = \det A$$

i を連続的な添字にする　$Y = S^1$, $\psi(x)$, $\bar\psi(x)$, $x \in Y$

$$D\bar\psi D\psi = \prod_{x\in Y} d\bar\psi_x d\psi_x$$

$$D_1\psi(x) := \partial_x \psi(x) - iA(x)\psi(x)$$

$$Z = \int D\bar\psi D\psi\, e^{-\int dx\, \bar\psi i D_1 \psi} \text{ "}= \det iD_1\text{" "}= \prod_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \lambda_r\text{"}$$

$$\lambda_r = a + r, \quad a = \frac{1}{2\pi}\int_Y A\, dx$$

① T対称性 : Zは実数　② U(1)ゲージ対称性 : basisのとり方によらない.

- 運動量カットオフ　②×
- PV　①×

$\boxed{\text{①,②を両方保つスキームはなさそう.}}$　アノマリー

$$S = \int_Y (D_1\phi)^2 + \frac{\theta D_1\phi}{4\pi}$$

$$Z_\phi = \frac{1}{\det D_1^2}$$

$$\tilde{Z}_X = Z^{cut} \times e^{-\frac{i}{2}\int_Y A + \frac{i}{2}\int_X F}$$

3.5 η 不変量 $\leftrightarrow Z^{cut} = e^{-i\pi a} Z^{PV}$

$$Z^{PV} = 2\cos\pi a \, e^{-i\pi a}$$ の位相

$$= |Z^{PV}| \, e^{i\pi([a+\frac{1}{2}]-a)}$$

ガウス記号

$$e^{-i\frac{1}{2}\int_Y A + \cdots}$$

もうちょっと いいかげんな求め方

$$Z^{PV}_\Lambda \propto \prod_r \frac{\lambda_r(\lambda_r + i\Lambda_2)}{(\lambda_r - i\Lambda_1)(\lambda_r + i\Lambda_3)}$$

正の定数

$S \to S' = S - \frac{i}{2}\int_Y A$

局所的な相殺項

ゲージ不変性やぶる

$$\xrightarrow{\Lambda\to\infty} \prod_r \frac{i\lambda_r \Lambda_2}{\Lambda_1\Lambda_3}$$

$$Z^{PV} \text{``}=\text{''} |Z^{PV}| \underbrace{\prod_r (i \operatorname{sign}\lambda_r)}_{\prod_r e^{\frac{\pi}{2} i \operatorname{sign}\lambda_r}}$$

$$= e^{\frac{\pi}{2} i \sum_r \operatorname{sign}\lambda_r}$$

- 一般にエルミート演算子 H があったとき、$s \in \mathbb{C}$

$$\eta(H,s) := \sum_{\lambda : H\text{の固有値}} \frac{\lambda}{|\lambda|^{1+s}} \quad (\operatorname{Re} s \text{は十分大きい})$$

s について解析接続 気持ち

$$\eta(H) := \eta(H,0) \leftarrow \left(\text{``}=\text{''} \sum_\lambda \operatorname{sign}\lambda\right)$$

ζ関数正則化

$\boxed{\eta\text{ 不変量}}$

$\varepsilon = \frac{1}{\Lambda}$

$$\sum_\lambda (\operatorname{sign}\lambda) e^{-\varepsilon|\lambda|}$$

$$\zeta(-1) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n \to \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\varepsilon n}$$

これだけ落とす

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad = \boxed{\frac{1}{\varepsilon^2}} + \text{reg}$$

$$-\frac{1}{12} + O$$

$$Z^{PV} \overset{?}{=} |Z^{PV}| e^{\pi i \frac{1}{2}\eta(iD_1)}$$

$= \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{12} + O(\varepsilon)$

※

- ここまで来るのに iD_1 の具体形は使っていない.
  $\Rightarrow$ もっと一般的に成り立ちそう.

- $\eta(iD_1) = 2[a+\frac{1}{2}] - 2a$ （まじめに計算）
  正しい計算と合っている

- たぶん一般的な場合も正統化されるはず.

- phase はスキームによっている

$$Z^{PV'}_\Lambda \propto \prod_r \frac{\lambda_r(\lambda_r + i\Lambda_2)}{(\lambda_r + i\Lambda_1)(\lambda_r + i\Lambda_3)}$$

$$\Rightarrow Z^{PV'} = |Z^{PV'}| e^{-\pi i \frac{1}{2}\eta(iD_1)}$$

- $$Z^{PV}_\Lambda \propto \prod_r \frac{\lambda_r(\lambda_r + i\Lambda_2)}{(\lambda_r - i\Lambda_1)(\lambda_r + i\Lambda_3)}$$

ここは phase には寄与しない.
今後省略

- もっと雑に $Z^{PV} = \frac{\det iD_1}{\det(iD_1 - i\Lambda)}$ と書くこともある.

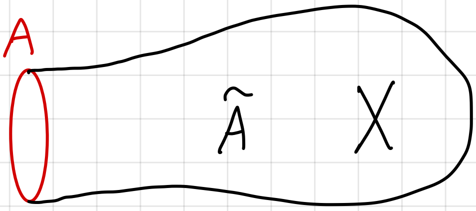
3.6 アノマリー流入

2つの選択肢

- T対称性を諦める
- U(1)ゲージ対称性を諦める

実はもう1つの選択肢がある。

- 1次元の系であることを諦める。



Y: 今考えていたS^1

2次元 Riemann 多様体
U(1)接続 $\tilde{A}$ ⇒ 曲率 $F = d\tilde{A}$

$\tilde{A}|_Y = A$

$(X, g, \tilde{A})$ まとめて X と書く。

$$\tilde{Z}_X := \overbrace{Z^{PV}}^{\text{U(1)ゲージ不変}} \overbrace{e^{\pi i \left(\frac{1}{2\pi}\int_X F\right)}}^{\text{U(1)ゲージ不変}}$$

$$= |Z^{PV}|\, e^{\pi i \left(\underbrace{\frac{1}{2}\eta(iD_1) + \frac{1}{2\pi}\int_X F}_{=: I_X}\right)}$$

- U(1)ゲージ対称性 Good!
- T対称性？

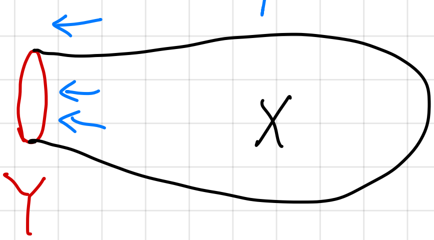
$$I_X := \underbrace{\frac{1}{2}\eta(iD_1)}_{\text{非整数}} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_X F}_{\text{非整数}} = (\text{APS指数}) \; = \; (\text{整数})$$

↑ APS 指数定理

非整数 T破る　　非整数 T破る

Good!

アノマリーが境界に流れ込んでいって相殺



アノマリー流入

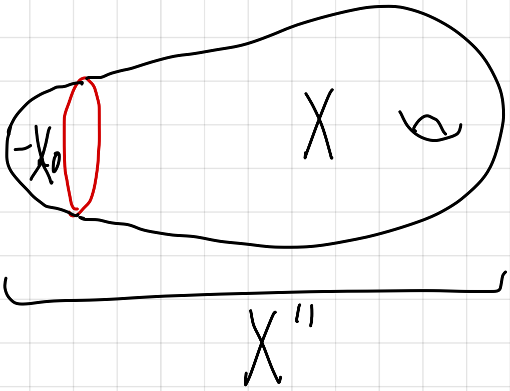
※ I_Xが整数であることの別証明

$X_0 = D^2$, 1つのパッチ ⇒ $\hat{A}$は 1-form

$$\frac{1}{2\pi}\int_X F \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ストークスの定理}}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_Y A \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aの定義}}}{=} a$$

$$\frac{1}{2}\eta(iD_1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{計算}}}{=} [a+\tfrac{1}{2}] - a \quad \Rightarrow \quad I_{X_0} = [a+\tfrac{1}{2}] - a + a$$

$$= [a+\tfrac{1}{2}] \in \mathbb{Z}$$



$$I_X - I_{X_0}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{X''} F = \underbrace{\int_{X''} c_1(\hat{E})}_{\in \mathbb{Z}}$$

$$\Rightarrow \quad I_X = I_{X_0} + \int_{X''} c_1(\hat{E}) \in \mathbb{Z}$$

アノマリーとは?

対称性の非存在 …… (教科書、この講義のこれまでの話)

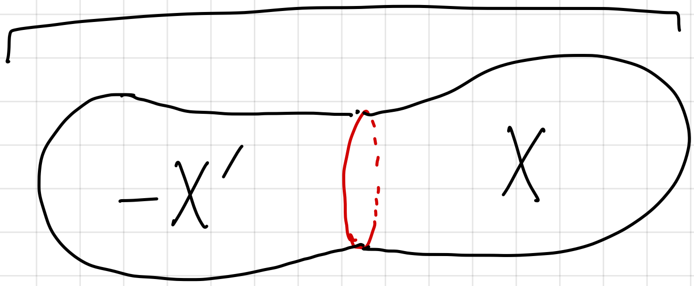
⇓ 新しい見方

$\boxed{\tilde{Z}_X \text{ の } X \text{依存性}}$

$\tilde{Z}_X$: 次元を1つ上げて、対称性をすべて保つようにした理論

(※古い見方では分からなくて、新しい見方で初めて発見されたアノマリーがある.)

X'' : closed



今の例で X 依存性

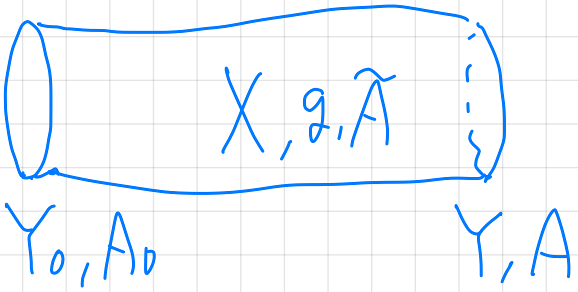
$$\frac{\tilde{Z}_X}{\tilde{Z}_{X'}} = e^{\pi i (I_X - I_{X'})}$$

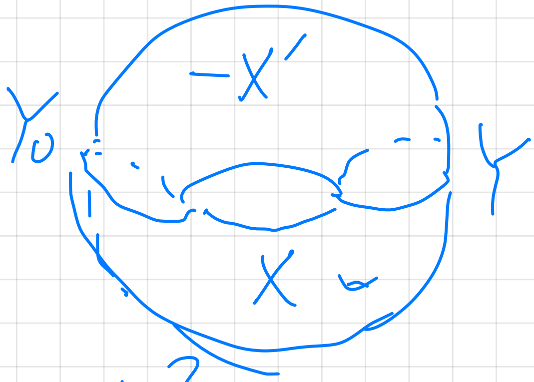
$$I_X - I_{X'} = \frac{1}{2\pi}\int_X F - \frac{1}{2\pi}\int_{X'} F = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{X''} F}_{\text{任意の整数を取りうる}}$$

⇒ $\tilde{Z}_X \neq \tilde{Z}_{X'}$ の場合がある

⇒ アノマリーがある!!

(例えば $\psi_{1,2}(x)$, $\bar{\psi}_{1,2}(x)$ がある理論ではアノマリーはない)





$\frac{Z_Y}{Z_{Y_0}}$ がつなぎ方によらないか？
X

$$Z_{Y_0} = -1$$
$$+1$$

$$\frac{Z_{P,Y_0}}{Z_{A,Y}} =$$

問題

$\tilde{Z}_X$: 次元を1つ上げて、対称性をすべて保つようにした理論

は何か?

- Symmetry Protected Topological (SPT) 相

今の例で

APS 指数

(～ 質量のある理論)

4. スピノール

4.1 Clifford代数

$n>0$ 整数　γ^a　$(a=1,\cdots,n)$

関係式 $(\gamma^a)^2=1,\quad \gamma^a\gamma^b=-\gamma^b\gamma^a$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Clifford代数}}$

既約表現　：　$2^{[\frac{n}{2}]}$ 次元

非自明な部分表現なし．　行列で表す方法　　エルミート行列にできる．

これが重要な理由：$so(n)$ Lie代数と関係ある．

$$\gamma^{ab}:=\frac{1}{2}[\gamma^a,\gamma^b]$$

$$spin(n)=\bigoplus_{a<b}\mathbb{R}\gamma^{ab}$$

（γ^{ab}の線型結合でできるベクトル空間）

交換関係で閉じていてLie代数

$spin(n)\cong so(n)$
Lie代数の同型

Lie 群 $\mathrm{Spin}(n) := \left\{ \exp\left(\sum_{a<b} \omega_{ab}\gamma^{ab}\right) \;\middle|\; \omega_{ab} \in \mathbb{R} \right\}$

$\rho : \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow SO(n)$ 二重被覆

$2 : 1$

☆ Chirality

n: 偶数のとき $\bar{\gamma} := (-i)^{\frac{n}{2}} \gamma^1 \cdots \gamma^n$

$\bar{\gamma}^2 = 1, \quad \bar{\gamma}\gamma^a = -\gamma^a \bar{\gamma}, \quad \mathrm{tr}\,\bar{\gamma} = 0$

$\Rightarrow$ $\bar{\gamma}$ の固有値 $= \pm 1$, それぞれ $2^{\frac{n}{2}-1}$ 重縮退

"Chirality"

4.2 スピン構造

X: 向きのついた、Riemann 多様体 $\curvearrowright$ 主 $SO(n)$ 束 $\xleftarrow{\rho}$ 主 $\mathrm{Spin}(n)$ 束

spin 構造

具体的に、

パッチにおける 座標 $x^\mu : \mu = 1, \cdots, n$, T_x^*X ~~の各点ごと~~の正規直交基底をとる

$\underline{\underline{e^a}} := e^a_\mu dx^\mu \quad a = 1, \cdots, n$

↑ $\mu = 1, \cdots, n$ を入れて和をとる

Einstein の規約

計量 $ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$

$ds^2 = \delta_{ab} e^a e^b$ となるように

T_xX の正規直交基底

$\hat{e}_a = \sum_\mu e_a^\mu \partial_\mu \qquad \sum_\mu e^\mu_a e^b_\mu = \delta^b_a$ 多脚場

TX の Levi-Civita 接続 $\omega_\mu{}^a{}_b$ スピン接続

ベクトル場 V^a の共変微分が $(D_\mu V)^a := \partial_\mu V^a + \omega_\mu{}^a{}_b V^b$

$V = V^a \hat{e}_a$

☆ スピノール束

$S \quad : \quad S|_{U_\alpha} = U_\alpha \times \mathbb{C}^m \quad : \quad m = 2^{[\frac{n}{2}]}$

パッチ

切断 $\psi(x)$, 共変微分 $\boxed{D_\mu\psi := \partial_\mu\psi + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab}\psi}$

パッチの貼り合わせ方 ～ スピン構造

(basisの取り方 ...)

4.3 Dirac演算子

X : スピン構造付きRiemann多様体. $S \to X$:スピノール束

$E \to X$: エルミート ベクトル束, 構造群 G (コンパクトLie群)

Eの接続 A

$\psi \in \Gamma(S \otimes E)$ の共変微分

$$\boxed{D_\mu\psi = \partial_\mu\psi + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab}\psi - iA_\mu\psi}$$

Dirac演算子 $D : \Gamma(S\otimes E) \to \Gamma(S \otimes E)$

$\boxed{D\psi := \Gamma^\mu D_\mu\psi}$, $\quad \Gamma^\mu := e^\mu_a\gamma^a$

n :偶数のとき.

$$\boxed{\bar{\gamma}D = -D\bar{\gamma}}$$

これまでの話の流れ

(1次元の例で)

- 経路積分(無限多重積分)を考えたい。

↓

発散

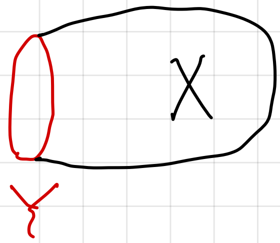
↓ 正則化(くりこみ)

有限の値　Z^{PV}, Z^{cut}

しかし、対称性を保たない！"アノマリー"

↓

なんとなく、2次元を用意すると
対称性を保つものができた



$$\tilde{Z}_X := Z^{PV} e^{\frac{i}{2}\int_X F} = |Z^{PV}|\, e^{\pi i \underbrace{\left(\frac{1}{2}\eta(iD_1) + \frac{1}{2\pi}\int F\right)}_{\text{APS指数}}}$$

↑ これは一体何か？

domain-wall フェルミオンの分配関数

なぜAPS指数が出て来るのか

FFMOYY

$$\mathrm{Ind}_{APS}(D_{X_+}) = \frac{1}{2}\eta(\bar{\gamma}(D+MK)) - \frac{1}{2}\eta(\bar{\gamma}(D-M))$$

5 2次元のフェルミオン

5.1 場と作用

X : 2次元 Riemann mfd スピン構造付き

$S \to X$: スピノール束

$E \to X$: エルミート直線束

A : E の $U(1)$ 接続

$\psi \in \Gamma(S \otimes E)$ のフェルミオン

$\bar{\psi} \in \Gamma((S \otimes E)^*)$ 〃

作用 $S = \int_X d^2x \sqrt{g}\, \bar{\psi} i D \psi$

① X : closed, massless
$\Rightarrow$ AS index

② X : $\partial X \neq \phi$, massless
$\Rightarrow$ APS index

③ X : closed, massive
$\Rightarrow$ AS index

④ X : $\partial X \neq \phi$, massive
$\Rightarrow$ APS index
オ千

期待値

$$\langle F(\psi, \bar{\psi}) \rangle := \int D\bar{\psi} D\psi\, F(\psi, \bar{\psi})\, e^{-S}$$

(分配関数は0かもしれないので、規格化は考えない)

5.2 Atiyah-Singer 指数定理

"質量がない"

X : closed, さっきの設定 $S = \int_X d^2x \sqrt{g}\, \bar{\psi} i D \psi$

$U(1)_A$ (軸性$U(1)$) 変換

$$\psi \to \psi' = e^{i\alpha\gamma}\psi, \quad \bar{\psi} \to \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{i\alpha\gamma}$$

α : 定数

で作用は不変 ($\gamma D = -D\gamma$ を使う)

積分 $\int D\bar{\psi} D\psi$ は ?

Fact : U(1)ゲージ対称性を保ち、$U(1)_A$を保つようなスキームはない.

$U(1)_A$ アノマリー

どう変わるか?

$$\int D\bar{\psi}' D\psi' = \int D\bar{\psi} D\psi \ J$$

Jを求めたい　($\langle F(\psi,\bar{\psi})\rangle = J\langle F(\psi',\bar{\psi}')\rangle$ の式から< >の情報が得られる)

答え $\boxed{J = e^{-2i\alpha \, \mathrm{Ind}(D)}}$　(※偶数次元ならいつでも成り立つ)

$$\mathrm{Ind}(D) := n_+ - n_- = \mathrm{Tr}\left(\bar{\gamma}\big|_{\mathrm{Ker}\,D}\right)$$

Dの指数

$n_\pm$: $\dim\left(\mathrm{Ker}\frac{1\pm\bar{\gamma}}{2}\right)\cap(\mathrm{Ker}\,D)$

$D\phi = 0$, $\bar{\gamma}\phi = \pm\phi$ の独立な解の数

これの説明

D^2の固有値、固有ベクトルを考える

$[\bar{\gamma}, D^2] = 0 \Rightarrow \bar{\gamma}$と$D^2$は同時対角化可能

Dが反エルミート $\Rightarrow D^2 \leq 0$

① 固有値 $-\lambda_n^2 \neq 0$ の場合

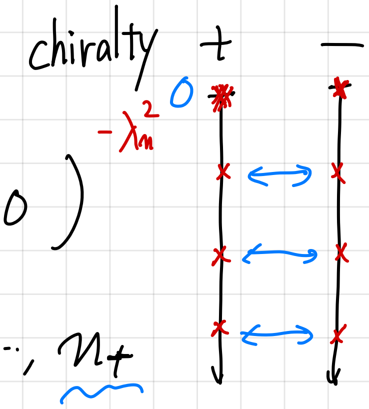
$$D^2 u_{+n} = -\lambda_n^2 u_{+n}, \quad \bar{\gamma} u_{+n} = + u_{+n}$$

だったとして,

$$u_{-n} := \frac{1}{\lambda_n} D u_{+n} \Rightarrow D^2 u_{-n} = -\lambda_n^2 u_{-n}, \quad \bar{\gamma} u_{-n} = -u_{-n}$$

同じ　反対

$\boxed{\text{$D^2$の $\neq 0$ 固有値の固有ベクトルは必ず chirality $+$ のものと $-$ のものがペアで現れる.}}$



② 固有値が 0 のもの

$$D: 反エルミート \Rightarrow \left(D^2 w = 0 \Leftrightarrow D w = 0 \right)$$

$$D w_{+i} = 0 \ , \quad \bar{\gamma} w_{+i} = + w_{+i} \ , \quad i = 1, \cdots, n_+$$

$$D w_{-i} = 0 \ , \quad \bar{\gamma} w_{-i} = - w_{-i} \ , \quad i = 1, \cdots, n_-$$

$\psi, \bar{\psi}$ を固有ベクトルで展開, 正則化 $\boxed{\lambda_n^2 < \Lambda^2}$

$$\psi = \sum_n \left(C_{+n} u_{+n} + C_{-n} u_{-n} \right) + \sum_{i=1}^{n_+} b_{+i} w_{+i} + \sum_{i=1}^{n_-} b_{-i} w_{-i}$$

$$\bar{\psi} = \sum_n \left(\bar{C}_{+n} u_{+n}^\dagger + \bar{C}_{-n} u_{-n}^\dagger \right) + \sum_{i=1}^{n_+} \bar{b}_{+i} w_{+i}^\dagger + \sum_{i=1}^{n_-} \bar{b}_{-i} w_{-i}^\dagger$$

積分変数 $C_{\pm n}, \bar{C}_{\pm n}, b_{+i}, b_{-i}, \bar{b}_{+i}, \bar{b}_{-i}$ (なので有限個)

$$D\bar{\psi} D\psi = \Omega \prod_n \underbrace{\left(d\bar{C}_{+n} \, dC_{+n} \, d\bar{C}_{-n} \, dC_{-n} \right)}_{\to \text{不変}}$$

$$\times \prod_{i=1}^{n_+} \underbrace{\left(d\bar{b}_{+i} \, db_{+i} \right)}_{\to e^{-2i\alpha}} \prod_{i=1}^{n_-} \underbrace{\left(d\bar{b}_{-i} \, db_{-i} \right)}_{\to e^{2i\alpha}}$$

$$U(1)_A : \ X_- \to X_-' = e^{-i\alpha} X_-$$

$$X_+ \to X_+' = e^{+i\alpha} X_+$$

$$\left(X : C_n, \bar{C}_n, \ b_i, \bar{b}_i \right)$$

$$D\bar{\psi}' D\psi' = D\bar{\psi} D\psi \ e^{-2i\alpha \overbrace{(n_+ - n_-)}^{}}$$

$$\underbrace{n_+ - n_-}_{} := \mathrm{Ind}(D)$$

カットオフ Λ によらない.

指数定理

$$\mathrm{Ind}(D) = \frac{1}{2\pi}\int_X F$$

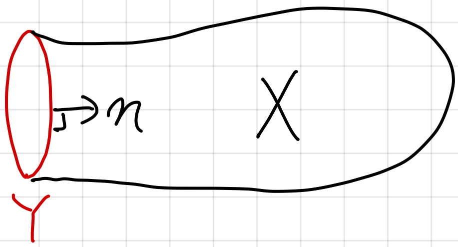
物理の計算でも知られていた.

5.3 Atiyah-Patodi-Singer 指数定理

境界のある多様体上のフェルミオンを考えたい.

X : 境界つきコンパクト Riemann 多様体, 2次元

$\partial X = Y$, あとは前と同じ設定.



境界条件はどうするか?

☆ 物理的には次のようなものを取りたい気がする
(cf. open superstring)

n: Yの法線ベクトル

Y上で $n_a \gamma^a \psi = \psi$

(あるいは $n_a \gamma^a \psi = -\psi$)

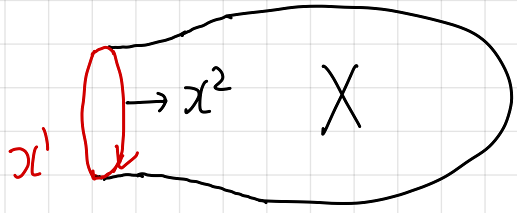
$$\bar{\gamma}\gamma^a = -\gamma^a \bar{\gamma}$$

⇒ 局所性, ユニタリー性

しかし, $U(1)_A$は存在しない. $D\psi = 0$は決まった chirality を持たない.

—— 指数は関係ない

☆ APS境界条件 ⇒ 指数が考えられる.



↔円筒状にちょっとだけのばす.

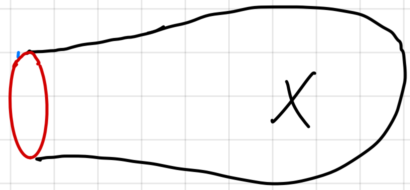
$A_2=0$ ゲージ
$\omega=0$

$$D\psi=0 \quad\Rightarrow\quad \partial_2\psi=B\psi\ ,\quad B=-\gamma^2\gamma^1 D_1$$

$$\gamma^2\partial_2\psi+\gamma^1 D_1\psi$$

$\mathrm{Ker}\,B=\phi$ を仮定

$\uparrow\psi$, exp で増える方



APS境界条件

$$\boxed{\frac{B}{|B|}\psi=+\psi}$$

$[\bar{\gamma}, B]=0$ ⇒ 作用に $U(1)_A$ 対称性あり.
$D\phi=0$ の解は決まった chirality を持つ.

(しかし. 物理的にはよくない. $|B|$ が非局所的)

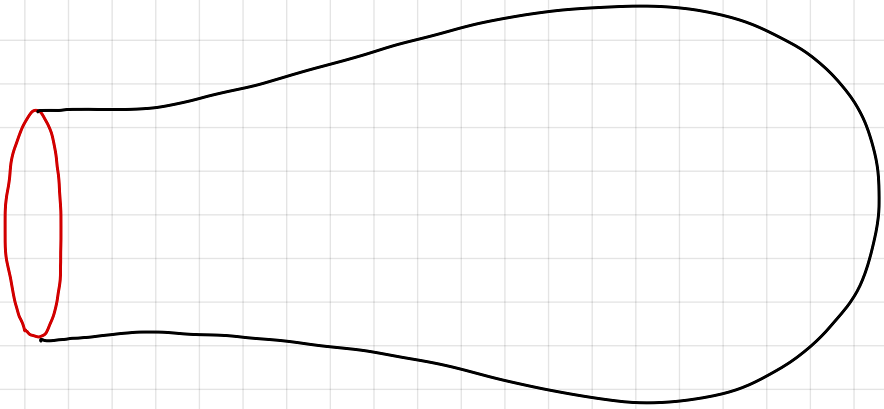
このときの Dirac演算子を D_{APS} と書いておく.

APS指数 $\mathrm{Ind}(D_{APS}):=n_+-n_-$

APS指数定理

$$\boxed{\mathrm{Ind}(D_{APS})=\frac{1}{2}\eta(iD_1)+\frac{1}{2\pi}\int_X F}$$

なぜ前に出てきた1次元の系とAPS指数定理が関係あるのか?



- 境界が1次元
- 境界に局在するモードなし
- 2次元のbulkで簡単に励起できる(質量なし)

1次元の系に近づけるために、
2次元のフェルミオンを「殺す」必要がある

質量を入れる!

6 2次元の domain-wall フェルミオンとAPS指数

6.1 質量

$$S=\int_X d^2x\,\sqrt{g}\,\bar{\psi}(iD-i\underline{M})\psi \qquad M:\text{質量} \in \mathbb{R}$$

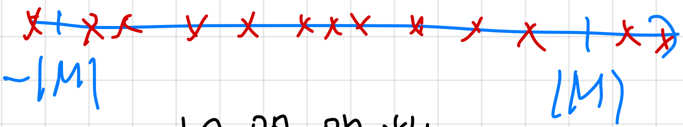
$|M|$を大きく $\longrightarrow$ 何もない空っぽの理論

○ 分配関数

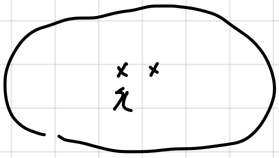
$$Z=\prod_{\lambda:iD\text{の固有値}}\frac{\lambda-iM}{\lambda-i\Lambda}$$

$|\lambda|\ll|M|$ のとき $\longrightarrow \dfrac{M}{\Lambda}$

XやAの情報消える！



○ 相関関数



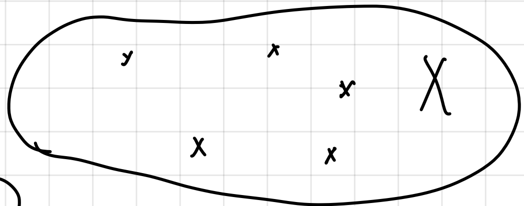
$$\langle\psi(x)\bar{\psi}(x')\rangle \sim e^{-|M||x-x'|}$$

$$\sim 0 \qquad \frac{1}{|M|}\ll|x-x'| \left(\ll X\text{のスケール}\right)$$

$$\langle\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\cdots\rangle$$

$=$ (2点関数の積の和) (Wickの定理)

~ 0



任意の相関関数 $=0$

空っぽの理論

しかし、

$M>0$ と $M<0$ では"何が"が異なる

「異なる**SPT相**にある」

6.2 質量のあるフェルミオンとAS指数

質量ある $\longrightarrow$ $U(1)_A$ なし. $\Rightarrow$ **AS指数は関係ない?**

実は質量のあるフェルミオンとAS指数には、簡単な関係がある （教科書にはあまりのっていない）

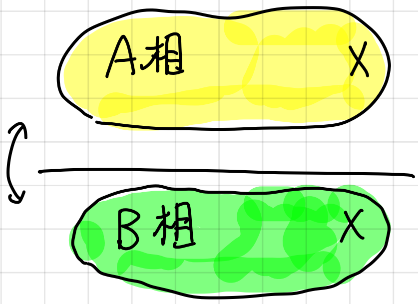
分配関数

$$Z(X,M) = \int D\bar{\psi}D\psi\, e^{-S} = \frac{\det(iD-iM)}{\det(iD-i\Lambda)}$$

(B相)　　　(A相)

$M>0$, と $M<0$ の違い!?

（異なるSPT相にある）



$(M>0)$

$$\frac{Z(X,-M)}{Z(X,M)} = \frac{\det(iD+iM)}{\det(iD-iM)}$$

2つのやり方で考える.

① $U(1)_A$ 変換

$$\psi' = e^{i\alpha\bar{\gamma}}\psi, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi}\, e^{i\alpha\bar{\gamma}}$$

$$\Rightarrow \bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi}\, e^{2i\alpha\bar{\gamma}}\psi$$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ とする $\Rightarrow \bar{\psi}'\psi' = -\bar{\psi}\psi$

$$M\bar{\psi}'\psi' = -M\bar{\psi}\psi$$

$$S(\psi', \bar{\psi}', M) = S(\psi, \bar{\psi}, -M)$$

$U(1)_A$ アノマリー

$$D\bar{\psi}' D\psi' = D\bar{\psi} D\psi \, e^{-\pi i \, \mathrm{Ind}(D)}$$

$\psi, \bar{\psi}$ を $\psi', \bar{\psi}'$ と書いただけ

$$\Rightarrow \quad Z(X, M) = \int D\bar{\psi} D\psi \, e^{-S(\psi, \bar{\psi}, M)} = \int D\bar{\psi}' D\psi' \, e^{-S(\psi', \bar{\psi}', M)}$$

$$= e^{-\pi i \, \mathrm{Ind}(D)} \int D\bar{\psi} D\psi \, e^{-S(\psi, \bar{\psi}, -M)}$$

$$= e^{-\pi i \, \mathrm{Ind}(D)} \, Z(X, -M)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Z(X, -M)}{Z(X, M)} = e^{\pi i \, \mathrm{Ind}(D)}$$

比較

② $$\frac{Z(X, -M)}{Z(X, M)} = \frac{\det(iD + iM)}{\det(iD - iM)} = \frac{\det(i\bar{\gamma}(D+M))}{\det(i\bar{\gamma}(D-M))}$$

$$H_- := \bar{\gamma}(D+M)$$ エルミート演算子

$$H_+ := \bar{\gamma}(D-M)$$

$$\det(iH_-) = \prod_{\lambda : H_- \text{の固有値}} i\lambda = \prod_{\lambda} |\lambda| e^{i\frac{\pi}{2}\mathrm{sign}\lambda}$$

$$= |\det(iH_-)| \, e^{\frac{\pi}{2} i \eta(H_-)}$$

$$\frac{Z(X, -M)}{Z(X, M)} = \left| \frac{Z(X, -M)}{Z(X, M)} \right| e^{\pi i \frac{1}{2}(\eta(H_-) - \eta(H_+))}$$

予想 $\frac{1}{2}\eta(H_-) - \frac{1}{2}\eta(H_+) \equiv \mathrm{Ind}(D) \mod 2$

実は、もっと強い関係が成り立つ

$$\boxed{\frac{1}{2}\eta(H_-) - \frac{1}{2}\eta(H_+) = \mathrm{Ind}(D)}$$

質量のあるフェルミオンとAS指数の関係

証明

$$H_- = \bar{\gamma}(D+M), \quad \bar{\gamma}D = -D\bar{\gamma}$$

$$\Rightarrow \quad DH_- = -H_-D$$

$$H_-^2 = -D^2 + M^2 \geq M^2$$

↳ Ker Dにある時のみ等号

$$H_-\phi = \lambda\phi, \quad |\lambda| > |M|$$

$$\Rightarrow \quad D\phi \neq 0, \quad H_-D\phi = -\lambda D\phi.$$

$D\phi$は固有値$-\lambda$の固有ベクトル

1対1対応

$$\eta(H_-, s) = \sum_{\lambda} \frac{\lambda}{|\lambda|^{1+s}} = \sum_{\substack{\lambda \\ \text{Ker}\,D\text{の中で}}} \frac{\lambda}{|\lambda|^{1+s}}$$

有限和

$$\eta(H_-) := \eta(H_-, 0) = \sum_{\substack{\lambda \\ \text{Ker}\,D\text{の中}}} \mathrm{sign}\,\lambda = \mathrm{Ind}(D)$$

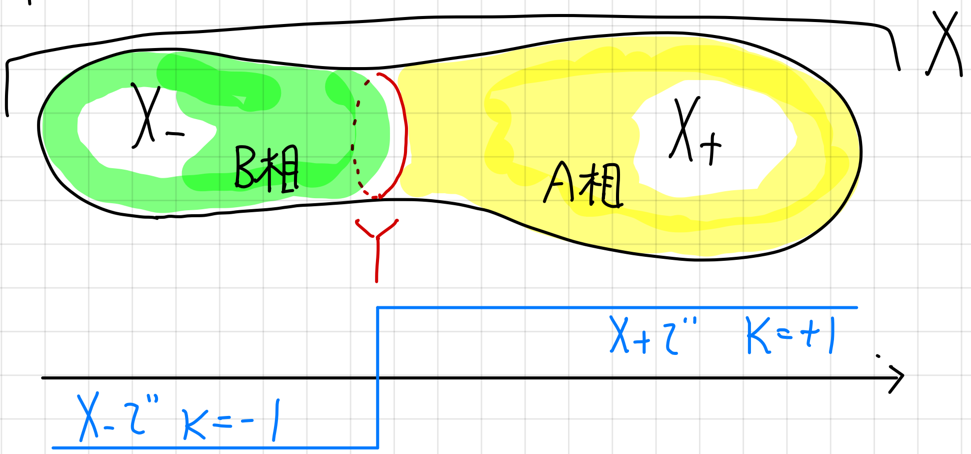
chirality

$$H_-\big|_{\mathrm{Ker}\,D} = M\bar{\gamma}$$

同じ議論 $\Rightarrow \eta(H_+) = -\mathrm{Ind}(D)$ ∎

6.3 domain-wall フェルミオン

前に考えた1次元のフェルミオンを実現する系



$$S_{DW}=\int_X d^2x\,\sqrt{g}\,\bar{\psi}\left(iD+iM\kappa(x)\right)\psi \qquad (M>0)$$

$$Z_{DW}:=\int D\bar{\psi}D\psi\, e^{-S_{DW}}=\frac{\det\left(i\left(D+M\kappa\right)\right)}{\det\left(i\left(D-\Lambda\right)\right)}=\frac{\det\left(H_{DW}\right)}{\det\left(H_{PV}\right)}$$

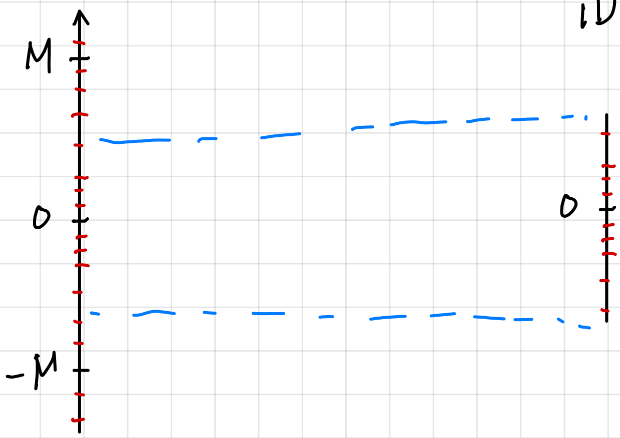
$$\underbrace{H_{DW}:=\bar{\gamma}(D+M\kappa)}_{\text{エルミート}},\qquad \underbrace{H_{PV}:=\bar{\gamma}(D-\Lambda)}_{\text{エルミート}}$$

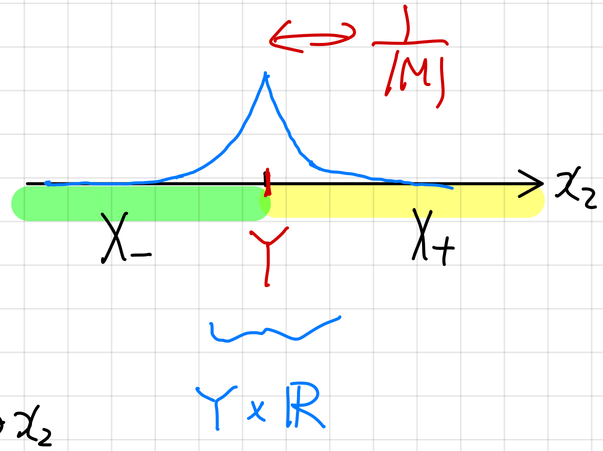
- Z_{DW}は実数 → T対称性
- U(1)ゲージ対称性保つ
- Yに局在した質量のないフェルミオン ← H_{DW}のスペクトル $\ll |M|$ $\simeq iD_1$のスペクトル

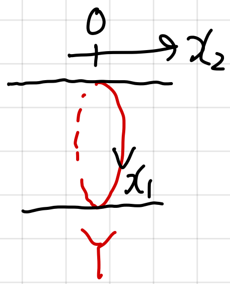
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{DWフェルミオンは、前に考えた1次元のフェルミオンの}\\ \text{T対称性、U(1)ゲージ対称性を保つ正則化 (}M,\Lambda\text{がカットオフ)}\end{array}}$$

これの説明

H_{DW} の固有値　　　　iD_1 の固有値　　　　固有関数







Y×R で $\omega_\mu = 0$

$A_2 = 0$ ゲージ

固有関数 ϕ,　固有値 μ

$$H_{DW}\phi = \mu\phi \quad \Rightarrow \quad (\bar{\gamma}\gamma^2\partial_2 + \bar{\gamma}\gamma^1 D_1 + M K(x)\bar{\gamma} - \mu)\phi = 0$$

変数分離可能

$$iD_1 u(x_1) = \lambda u(x_1) \quad , \quad \phi = f(x_2)\, u(x_1)$$

$$\Rightarrow \quad f' = (\lambda\bar{\gamma} - MK(x)\gamma^2 - \mu i\gamma^1) f \quad \cdots (*)$$

ステップ　$\lambda = \mu$ を示す.

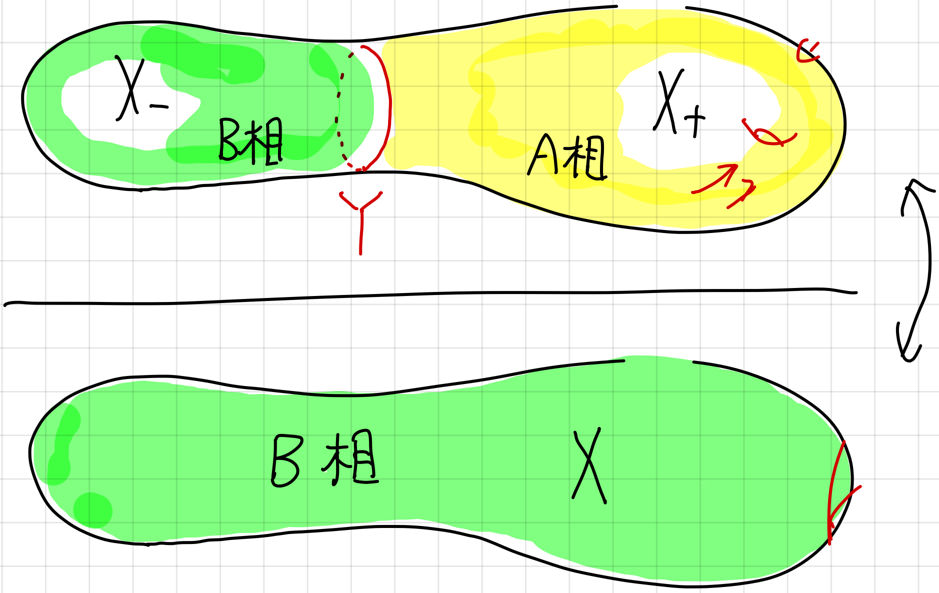
① Yでの不連続性 $\Rightarrow \gamma^2 f(0) = +f(0)$

② $x_2 > 0$ で　$f(x_2) = \exp\left(-\sqrt{\lambda^2 + M^2 - \mu^2}\; x_2\right) f(0)$

①, ② $\Rightarrow \gamma^2 f(x_2) = +f(x_2)$

③ $(*) \Rightarrow \lambda = \mu$

6.4 DW フェルミオンと APS 指数



$$\frac{Z_{DW}}{Z(X,M)} = \frac{\det H_{DW}}{\det H_+} \qquad H_+ = \bar{\gamma}(D-M)$$

実数

$$= \left|\frac{Z_{DW}}{Z(X,M)}\right| e^{\pi i I_{DW}}$$

前と同じ議論

$$I_{DW} = \frac{1}{2}\left(\eta(H_{DW}) - \eta(H_+)\right)$$

$\Rightarrow$ $\boxed{I_{DW} \text{ は整数}}$ (非自明)

さらに

は前々と(少くとも位相は)等しいだろう.

$$I_{DW} \equiv \mathrm{Ind}(D_{APS}) \mod 2$$

X_+ 上 Dirac 演算子
APS 境界条件を課したもの

実はもっと強い関係

$$\boxed{I_{DW} = \mathrm{Ind}(D_{APS})}$$

※ 証明は論文を見て下さい.

※ ASの場合のような簡単な証明はない

AS　　$DH_- = -H_- D$ が効いていた.

APS　　$DH_{DW} \neq -H_{DW} D$