

一般化対称性について

山口 哲

2024年4月19日

目次

第 1 章	導入	3
1.1	対称性とは?	3
1.2	対称性の使い方の例	5
1.3	いくつかの注意	7
第 2 章	対称性とトポロジカル欠陥	9
2.1	欠陥	9
2.2	対称性とトポロジカル欠陥その 1	10
2.2.1	ユニタリー演算子とトポロジカル欠陥	10
2.2.2	局所演算子への作用	13
2.3	対称性とトポロジカル欠陥その 2	14
2.3.1	分配関数と対称性欠陥	14
2.3.2	演算子への作用	16
2.3.3	背景ゲージ場	17
2.3.4	Ising 模型の spin flip の例	19
2.4	対称性欠陥のまとめ	21
2.5	一般化対称性	22
第 3 章	2次元 Ising 模型	24
3.1	2次元 Ising 模型と \mathbb{Z}_2 ゲージ化	24
3.1.1	2次元 Ising 模型	24
3.1.2	ゲージ化	24
3.1.3	ゲージ固定	26
3.2	双対対称性	27
3.3	Kramers-Wannier 双対性	31
3.3.1	Kramers-Wannier 双対性と、その証明	31
3.3.2	Ising 模型の相構造	33
3.4	Ising 模型の演算子	35
3.4.1	スピン演算子	36
3.4.2	対称性欠陥	36

3.4.3	無秩序スピン	37
3.5	KW 欠陥	39
3.5.1	領域の取り方	41
3.5.2	半空間ゲージ化	42
3.5.3	境界に局在すること	44
3.5.4	トポロジカル性	46
3.6	対称性の構造	48
3.6.1	足し算	48
3.6.2	フュージョン則	50
3.6.3	F 記号	53
3.6.4	他の Ward-Takahashi 恒等式	60
3.7	応用	62
3.8	ゼロ温度での相構造*	64
第 4 章	高次形式対称性	66
4.1	高次形式対称性の定義	66
4.2	格子ゲージ理論の中心対称性	66
4.3	背景ゲージ場その 1	66
4.4	背景ゲージ場その 2 : 単体コホモロジー	66
4.5	自発的対称性の破れ	66
第 5 章	高次元の非可逆対称性	67
5.1	高次形式対称性のゲージ化	67
5.2	4次元 Z_2 格子ゲージ理論	67
5.3	Maxwell 理論	67

まえがき

このノートは 2023 年 10 月に東京大学駒場で行った集中講義のノートです。集中講義の機会をくださり、有益な議論をしてくださった東京大学駒場素粒子論研究室の皆様、集中講義の参加者の皆様に感謝いたします。

第1章 導入

1.1 対称性とは？

この講義では、対称性の一般化について取り扱います。一般化に行くまえに普通の対称性について質問したいと思います。(場の理論において) 対称性とは何でしょうか？考えてみてください。この質問は哲学的に聞こえるかもしれませんが、もっと具体的なもので、例えばみなさんが授業や教科書でどう習ったか、あるいは授業どう教えているかというものです。

答えはいろいろあると思います。ここでは、その中の3つをとりあえず書いてみます。この中に皆さんの考えた答えはあるでしょうか？

- ①場を ϕ 、作用を $S(\phi)$ とします。対称性とは変換 $\phi \rightarrow \phi'$ であって $S(\phi') = S(\phi)$ となるものです。
- ②Hamiltonian を \hat{H} とします。対称性とは Unitary 演算子 \hat{U} であって、Hamiltonian と交換する、つまり $\hat{H}\hat{U} = \hat{U}\hat{H}$ となるものです。
- ③余次元1のトポロジカル欠陥で群構造を持つもの。

①は、一番人気がある答えで、多くの人がこれを思い浮かべたと思います。②も量子力学では良く出てくる説明で、これを思い浮かべなかった人も言われてみれば納得してもらえらると思います。③は異質ですね。これは普通の教科書には載っていません。意味が分からなかったとしてもひとまず気にしないでください。③はこの後この講義で時間をかけて説明したいことのひとつです。これが①や②と同じレベルで納得してもらえれば、この講義の目的の目的の半分くらいは達成したと言えます。

さて、①や②のような分かりやすい言い方があるのに、なぜ③のような難しい言い方を知らないといけないのでしょうか。実は①や②には次のように「大域的である」という共通の不満があるのです。

- ①変換は時空全体で一斉に変換して見る必要があります。宇宙を考えてい

るなら、宇宙の始まりから未来まで、ほぼ真空のところや星の中から宇宙の果てまで一斉に変換して作用が不変か？という問でしか対称性の存在を記述できていません。

- ②こちらは時間方向は考えなくても良いですが、 \hat{H} も \hat{U} も空間全体に広がる巨大な演算子です。しかも系のサイズによって (Hilbert 空間の次元も含めて) 変わります。両方とも局所的なものの集まりなので、局所的な性質を見れば全体をいっぺんに考えなくても良いはずなのですが、②の言い方では全体でしか考えられていません。

つまり、対称性の記述としては

(大域的対称性であっても) 局所的な記述が望ましい。

ということになります。

この不満は最近になって降って湧いたわけではなく、昔からありました。そしてその解決もされています。それが、最初の質問に対する 4 番目の答えです。

- ④対称性とは、(連続対称性の無限小変換の場合には) カレント $J^\mu(x)$ であって、 $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$ を満たすことである。

最初の間でこれを思い浮かべられた方もおられたかも知れません。また、言われてみれば皆さん納得されると思います。この記述は完全に局所的で理想通りです。場の理論で対称性を用いて様々な性質を導くときに、この記述は大変便利で、欠くことができないものです。

④の答えは非常に良いものでしたが、難点は連続対称性の無限小変換に限られることです。例えば離散的対称性の場合にはカレントは存在しませんから、④の記述はありません。実は離散的な対称性の場合にも適用できる局所的な記述が③です。

③のトポロジカル欠陥は対称性の局所的な記述を与える。

このような理由で③の見方は、普通の対称性に対しても有用です。

1.2 対称性の使い方の例

この後、対称性の一般化について説明していくわけですが、対称性を一般化しても有用であるということを説明するために、対称性の使い方の一つをについて説明します。これは簡単な例ですが、量子力学の教科書にはあまり書いてないと思います。

次のような命題が成り立ちます。

命題

\hat{U}, \hat{V} をユニタリー演算子で、Hamiltonian \hat{H} と可換とします（つまり、②の見方での対称性です）。そして

$$\hat{U}\hat{V} = a\hat{V}\hat{U}, \quad (a \text{ は } \mathbb{C} \text{ 数}, a \neq 1) \quad (1.1)$$

とします。このとき、**すべてのエネルギー準位（特に基底状態）は縮退しています。**

これは、場の理論の文脈では 't Hooft アノマリー整合条件と呼ばれているものの一例です。 a がこの例での 't Hooft アノマリーになります。おそらく、普通に場の理論でアノマリーを勉強された方には、そのアノマリーとこの a がどう関係があるか分からないと思います。大事なことではあるのですが、この講義の主題とは外れるのと、知らなくてもこの命題だけで理解できるので、その説明は省略します。

証明 証明を与えます。背理法で証明します。つまり、縮退していないエネルギー固有状態 $|\psi\rangle$, $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ があると仮定します。このとき $\hat{U}|\psi\rangle$ がエネルギー E の固有状態であることが、次のようにして分かります。

$$\hat{H}\hat{U}|\psi\rangle = \hat{U}\hat{H}|\psi\rangle = E\hat{U}|\psi\rangle. \quad (1.2)$$

さらに縮退が無いことから $\hat{U}|\psi\rangle \propto |\psi\rangle$ なので、次のように表すことができます。

$$\hat{U}|\psi\rangle = u|\psi\rangle, \quad u \in \mathbb{C}, |u| = 1. \quad (1.3)$$

\hat{V} に関しても同様です。

$$\hat{V}|\psi\rangle = v|\psi\rangle, \quad v \in \mathbb{C}, |v| = 1. \quad (1.4)$$

これらを用いると

$$\hat{U}\hat{V}|\psi\rangle = uv|\psi\rangle \quad (1.5)$$

という関係を得ます。ところが、(1.1)の関係を用いると、全く同じベクトルが

$$\hat{U}\hat{V}|\psi\rangle = a\hat{V}\hat{U}|\psi\rangle = auv|\psi\rangle \quad (1.6)$$

とも書けます。ここから

$$auv|\psi\rangle = uv|\psi\rangle \quad (1.7)$$

という関係式を得ます。 $uv|\psi\rangle \neq 0$ ですから、この式は $a \neq 1$ に矛盾します。■

ここで考えてみたいことは、 \hat{U}, \hat{V} がユニタリーでなかったらどうなるか？ということ。この場合、 \hat{U}, \hat{V} ユニタリーではありませんから、従来の意味での対称性ではありません。しかし、証明を見てもらって分かるように、ユニタリー性を用いているところは $uv|\psi\rangle \neq 0$ の部分のみです。ですから、この場合も命題を少し修正することで成り立ちます。このようにして「(従来の意味では) 対称性でないもの」を対称性と同じように用いて理論を調べることができるわけです。このように従来の意味では対称性でないが、対称性と同様な使い方ができるものを「一般化対称性」と呼んでいろいろ調べようというのがここでやりたいことです。

上の証明を見てもらって分かるように、対称性の最も重要な性質は Hamiltonian と交換するということです。これをゆるめてしまうと、対称性と同じように用いることは、なかなか難しくなります。したがって、ここではこの条件はゆるめないことにします。一方、ユニタリーのような条件はゆるめても、そこそこ使えるものになります。これを「一般化対称性」と呼んで、いろいろ調べよう、というのがこの講義の目的です。ユニタリーでないが Hamiltonian と交換する演算子は場の理論の文脈では「非可逆対称性」と呼ばれます。¹⁾

今回取り扱うトピックに関して、文献を少し挙げます。[1] は、非可逆対称性に関する読みやすいレビューです。文献も非常に充実しているので、ここで挙げられなかった文献は、[1] を見ていただくと良いと思います。一般化対称性の元になった論文は [2] です。これは読みやすいとは言いがたいのですが、色々なことが書いてあって、読むと非常に勉強になります。2次元の非可逆対称性は共形場理論の

1) 非可逆対称性という名前の由来については、少々複雑です。ちゃんと説明するためには場の理論でのトポロジカル欠陥について知ってもらう必要があります。ここでは、**非可逆対称性という名前だけ**れど \hat{U} という演算子が非可逆とは限らない、ということだけ注意しておきます。

文脈で昔から多くの研究がありますが、比較的最近の「対称性」という観点からの論文として [3] と [4] を挙げておきます。最近の高次元の非可逆対称性の発展の契機になったのは、[5, 6, 7] です。我々の論文 [5] では、格子ゲージ理論を取り扱ったのですが、このアイデアの元になったのは、2次元の格子理論での非可逆対称性の研究 [8, 9] です。この講義では、格子での半空間ゲージ化 [6] のアイデアを元にして、私なりの解説を試みました。

1.3 いくつかの注意

ここでは、通常のセミナーなどでは説明が省略されることが多いけれど、注意が必要なことについて説明します。

一つは、Euclidean の定式化についてです。この講義も含めて、セミナーや論文などでは場の理論を Euclid 形式で取り扱うことがよくあります。これは、「Euclid 形式の場の理論」という、教科書に出てくる場の理論と異なる理論を考えているのではないことに注意してください。理論は教科書に出てくる場の理論と同じものを取り扱っています。異なるのは定式化の仕方とか計算しやすい量です。例えば正準分配関数は Euclid 形式で取り扱いやすい量の一つです。これは

$$\text{Tr} e^{-\beta \hat{H}} = \int D\phi e^{-S_E(\phi)} \quad (1.8)$$

のように表すことができます。ここで、 $S_E(\phi)$ は虚時間方向を長さ β の円周にしたときの Euclid 化した作用です。他にも、 $\hat{\mathcal{O}}_1(x_1), \dots, \hat{\mathcal{O}}_K(x_K)$ をすべて同時刻の別々の点に置かれた局所演算子としたとき、

$$\langle 0 | \hat{\mathcal{O}}_1(x_1) \dots \hat{\mathcal{O}}_K(x_K) | 0 \rangle = \frac{1}{Z} \int D\phi e^{-S_E(\phi)} \mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_K(x_K), \quad Z := \int D\phi e^{-S_E(\phi)}. \quad (1.9)$$

と表すことができます。このとき $S_E(\phi)$ は Euclid 化した作用です。他にも様々な量が Euclid 形式を用いて計算することができます。この講義でも Euclid 形式用いて様々な場の理論の性質を考えることになります。

もう一つは演算子関係式についてです。例えば、この講義でも **量子論で**

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0 \quad (1.10)$$

というような式を書くことがあります。これは古典論であれば、運動方程式を満たす場の配位において、このような関係式を満たすということですが、量子論におい

てはどうでしょうか？一つは演算子形式の場の理論で $\hat{J}^\mu(x)$ が上の関係式を満たすということです。この講義で主に用いるのは、もう少し広い応用ができる見方で、相関関数の間の関係式と見ることです。これは、

$$\langle \partial_\mu J^\mu(x) \dots \rangle = 0, \quad (\dots \text{ は任意の局所演算子や非局所演算子の挿入。})$$

ただし x は \dots の挿入されている点とは異なる。)

(1.11)

というのを省略して書いたのが式 (1.10) ということです。問題は「ただし…」のところは文脈によって色々変わるところです。この講義では分かりにくそうな場合はなるべく補足するようにはしますが、もし分からなければ聞いてください。

他によく使う例として

$$\oint_{U(\Sigma)} * \mathcal{O}(x) = * \mathcal{O}'(x)$$
(1.12)

というようなものがあります。これは x は時空の点で $\mathcal{O}(x), \mathcal{O}'(x)$ は局所演算子、 Σ は余次元 1 の面で $U(\Sigma)$ は Σ に局在した演算子（欠陥）です。この「式」の意味は

$$\langle U(\Sigma) \mathcal{O}(x) \dots \rangle = \langle \mathcal{O}'(x) \dots \rangle, \quad (\dots \text{ は両辺で共通の任意の演算子の挿入。})$$

ただし、 \dots は Σ の内側には挿入されていない。)

(1.13)

という意味です。

第 2 章 対称性とトポロジカル欠陥

この章の目標は、前章で紹介した対称性の③の見方「対称性とは余次元 1 のトポロジカル欠陥で群構造を持つもの」ということを納得してもらうことです。まず、欠陥という概念を導入します。そして対称性がトポロジカル欠陥であることを様々な観点から説明します。一旦それを納得してもらえば、対称性の一般化はすんなりと納得してもらえらると思います。

2.1 欠陥

まず、欠陥を定義します。

場の理論において**欠陥 (defect)**とは、**時空中で他の部分と性質が異なる部分**のことを言います。ただし、局所性を満たすものとします。

補足の説明をします。性質が異なるというのは、例えば Lagrangian 密度がそこだけ異なるとか、余分な自由度がそこにあるとか、格子の理論なら、そこだけ格子の構造が異なるとか、そういうものです。

局所性というのは、性質が異なるとしても非局所的な相互作用はないということです。言い換えれば、欠陥の上の離れた 2 点が直接相互作用をすることは無いようなものです。格子理論で考える場合には、連続極限をとったときに局所性を満たすようなものなら、それは局所性を満たす欠陥であるということにします。

別の言い方をすると、欠陥とは（広い意味での）演算子であるということもできます。

次に 2 つの言葉を導入します。まず、欠陥の**次元**とは、性質の異なる部分の次元を言います。例えば時空中で 1 点が他の部分と異なるなら、その次元は 1 です。**余次元 (codimension)**とは、時空の次元を d 、欠陥の次元を p としたときに、 $d - p$ のことを言います。欠陥の性質は余次元によって共通な場合もあるので、この言葉を導入するのが便利です。これは単に言葉遣いの問題なのですが、余次元 0 の欠陥、つまりある領域にわたって性質が違ようなものは欠陥とは呼ばないことにし

ます。

代表的な欠陥の例を2つ挙げます。局所演算子は0次元の欠陥です。別の言い方をするなら、局所演算子とは時空の1点にある欠陥の別名です。¹⁾もう一つの例はゲージ理論のWilson ループ $\text{Tr} P \exp(i \oint A)$ です。Wilson ループは1次元の欠陥の例です。

欠陥について一つ注意することは、欠陥は動的な物体、例えばソリトンなどではないということです。動的な物体は運動方程式などにしたがって運動しますが、欠陥はその部分の物理法則を手で変えるようなものです。欠陥の形などは手で決めます。ややこしいことに文献によってはソリトンのことを欠陥と呼んでいるものもあるので注意が必要です。

2.2 対称性とトポロジカル欠陥その1

ここから対称性とトポロジカル欠陥の関係について見ていきます。

まず、**トポロジカル欠陥 (topological defect)** とは、欠陥のうちでトポロジーを変えない連続変形で値を変えないもののことを言います。²⁾絵を使った式で書くなら


$$(2.1)$$

のようになります。この式も 1.3 節で述べた演算子関係式の書き方を使っています。つまり、左辺と右辺は他に任意の共通の演算子が挿入されている期待値です。ただし、欠陥を変形している部分には演算子は挿入されていません。

ここから考えていきたいことは、みなさんが納得しているはずの対称性の見方② $\hat{H}\hat{U} = \hat{U}\hat{H}$ 、および④ $\partial_\mu J^\mu = 0$ から始めて、③トポロジカル欠陥の見方ができることを示すことです。

2.2.1 ユニタリー演算子とトポロジカル欠陥

d 次元の場の理論の演算子形式の定式化から始めることにします。簡単のために $U(1)$ 対称性の場合を考えます。時刻0で対称性のユニタリー演算子は変換のパラ

1) 局所演算子は Lagrangian に出てくる場の微分やそれらの積で書けているものに限りません。
2) これも不幸な用語の行き違いなのですが、トポロジー的に守られて安定なソリトンのことをトポロジカル欠陥と呼ぶ文献もあります。これはこの講義でのトポロジカル欠陥とは違うものです。

メーターを α として、

$$\hat{U} = e^{i\alpha\hat{Q}}, \quad \hat{Q} := \int_{t=0, \text{空間}} d^{d-1}x \hat{J}^0. \quad (2.2)$$

\hat{J}^0 はカレント \hat{J}^μ , $\mu = 0, \dots, d-1$ の時間方向成分、つまり電荷密度です。 \hat{Q} の定義は空間が有限（周期境界条件など）の場合には良いですが、無限の場合には積分が定義されるかどうか問題となります。実は自発的対称性の破れが起こっている場合には、この積分は収束しません。自発的対称性の破れについては、教科書 [10] が詳しいです。ここではひとまず定義されている場合を考えることにします。

Euclidean の定式化を使うために、

$$\hat{J}^d := i\hat{J}^0 \quad (2.3)$$

を定義します。³⁾ これを用いると

$$\hat{Q} = -i \int_{t=0, \text{空間}} d^{d-1}x \hat{J}^d \quad (2.4)$$

と書けます。

Euclid 時間（虚時間）を τ として、Euclid 時間発展について考えます。 \hat{O} を時刻 0 での演算子として、Heisenberg 演算子のような役割をする演算子 $\hat{O}(\tau)$ を

$$\hat{O}(\tau) := e^{\tau\hat{H}} \hat{O} e^{-\tau\hat{H}} \quad (2.5)$$

と定義します。⁴⁾ こうすると、例えばカレントの保存則 $\partial_\mu \hat{J}^\mu(x^0, \vec{x}) = 0$, $\mu = 0, \dots, d-1$ は、 $x^d := \tau$ として

$$\partial_\mu \hat{J}^\mu(\vec{x}, x^d) = 0, \quad \mu = 1, \dots, d \quad (2.6)$$

と書くことができます。また、 $\hat{U}\hat{H} = \hat{H}\hat{U}$ ですから

$$\hat{U}(\tau) = \hat{U} \quad (2.7)$$

3) これを見て分かるように、Euclidean の定式化では Hermit 共役には注意する必要があります。
4) 本当の Heisenberg 演算子と区別するために記号を変える方が良いのかもしれませんが、煩雑になるのでやめておきます。本物の Heisenberg 演算子とは違うものであることに注意してください。また、ここで定義した Euclidean の Heisenberg 演算子のようなものは取り扱いには注意が必要です。 $e^{i\tau\hat{H}}$ という高エネルギーのところが大きく効いてくる演算子が入っているからです。ただし、これらの演算子の時間順序積の真空期待値などはちゃんと定義されます。Euclidean の経路積分形式と演算子形式をつなぐときに考えると便利な書き方だと思ふと良いと思います。

となります。

式 (2.7) を Euclidean 経路積分形式での期待値の関係式に書くと

$$U \xrightarrow{\uparrow} = U \xrightarrow{\uparrow} \quad (2.8)$$

のようになります。ここで矢印で向きを表しています。

U は時間一定面で他の部分とは異なっているので、余次元 1 の欠陥です。式 (2.8) は、 U を時間方向にずらしても値を変えないことを示しています。これから、 U がトポジカル欠陥であることを示します。

これから書くのは Euclidean 経路積分形式での演算子関係式です。余次元 1 の向きのついた部分多様体を M として

$$U(M) := e^{i\alpha\hat{Q}(M)}, \quad Q(M) := -i \int_M dS_\mu J^\mu \quad (2.9)$$

とします。⁵⁾ $\int_M dS_\mu$ は電磁気の授業などで出てきた面積分です。

この $U(M)$ がトポジカルであることは次のようにして示します。ある領域 D があって、 $\partial D = M \cup (-M')$ とします。ただし、 $-M'$ は M' の向きを反対にしたものです。こうすると Gauss の定理を用いて

$$\int_D d^d x \partial_\mu J^\mu = \int_M dS_\mu J^\mu - \int_{M'} dS_\mu J^\mu \quad (2.10)$$

を得ます。ここから

$$Q(M) = Q(M'), \quad U(M) = U(M') \quad (2.11)$$

という式が成り立ちます。特に M_1 と M_2 がトポロジーを変えない連続変形で繋がっている場合には領域 D で、 $\partial D = M_1 \cup (-M_2)$ となるものがとれますから、 $U(M_1) = U(M_2)$ となり、したがって U はトポジカル欠陥ということが言えました。

ここまでで言えたことをまとめます。

対称性があると対応するトポジカル欠陥がある。それは、対称性の演算子 \hat{U} を時間一定面だけでなく、曲がったところにも定義したものである。

5) $U(M)$ の定義の中に \exp があって、同じ点での演算子の積が入っています。一般には、ここで発散があったり、繰り込みが必要だったりして微妙なことが起こるのですが、ここではひとまず説明のために無視します。正しい取り扱いは、次節でやる背景ゲージ場とそのゲージ変換を用いる方法です。

最初の方で、自発的対称性の破れがあるときには \hat{U} がうまく定義できないと言いました。しかし、これは定義しようとしている空間が無限であるところからくるものです。したがって、 M が有限である場合には $U(M)$ は自発的対称性の破れがあるかどうかにかかわらず定義でき、理論の解析に用いることができます。

2.2.2 局所演算子への作用

次に対称性の局所演算子への作用について考えてみます。場の理論の演算子形式では、局所演算子 $\hat{\mathcal{O}}(x)$ 変換は

$$\hat{U}\hat{\mathcal{O}}(x)\hat{U}^\dagger = \hat{\mathcal{O}}'(x) \quad (2.12)$$

と書けます。⁶⁾ \hat{U}, \hat{U}^\dagger は \hat{H} と可換ですから、 \hat{U} を少しだけ虚時間で未来に移動し、 \hat{U}^\dagger を少しだけ過去に移動することで

$$\begin{array}{ccc} U(M_1) & \xrightarrow{\quad \uparrow \quad} & \\ & \times \mathcal{O}(x) & = \quad \times \mathcal{O}'(x) \\ U(M_2) & \xleftarrow{\quad \downarrow \quad} & \end{array} \quad (2.13)$$

という絵で表すことができます。別の言い方をすると式 (2.12) の左辺は、

$$T(\hat{U}(M_1)\hat{\mathcal{O}}(x)\hat{U}(M_2)) = T(\hat{U}(M)\hat{\mathcal{O}}(x)), \quad M := M_1 \cup (-M_2) \quad (2.14)$$

と表すことができます。 $T()$ は虚時間順序積を表します。さらに \dots を x と同時刻にはない任意の演算子の挿入として (2.12) より

$$\langle 0|T(\hat{U}(M)\hat{\mathcal{O}}(x)\dots)|0\rangle = \langle 0|T(\hat{\mathcal{O}}'(x)\dots)|0\rangle \quad (2.15)$$

という式が成り立ちます。この両辺に現れる量を Euclidean 経路積分で表すことを想定して

$$\langle U(M)\mathcal{O}(x)\dots\rangle = \langle \mathcal{O}'(x)\dots\rangle \quad (2.16)$$

と書くのでした。さらにこれを略記して

$$U(M)\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}'(x) \quad (2.17)$$

6) 量子力学の教科書とは異なる convention を用いています。場の理論の論文では、ここで用いる convention の方が一般的です。

と書きます。\$U(M)\$ はトポロジカルですから、連続変形して（変形後の面も同じ記号 \$M\$ で表すことにして）

$$U(M) \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \circlearrowleft \times \mathcal{O}(x) \\ \downarrow \end{array} \right) = \times \mathcal{O}'(x) \quad (2.18)$$

という絵で書きます。これが、局所演算子の変換性をトポロジカル欠陥を用いて表したのになります。後で示すように、これは Ward-Takahashi 恒等式を有限変換の場合にも適用できる形にしたものと言うこともできます。

2.3 対称性とトポロジカル欠陥その2

ここでは、対称性とトポロジカル欠陥の関係を先程とは少し別の角度から見てみます。ここでは、通常の Ward-Takahashi 恒等式を①の描像から導くのと同様の方法を離散対称性の場合にも適用できるように有限変換で行います。つまり、大域的対称性であっても場所に依存する変換し、それによる作用の変化を見ます。

2.3.1 分配関数と対称性欠陥

\$d\$ 次元の場の理論を考えます。場を \$\phi(x)\$ とし、作用を \$S(\phi)\$ とします。この系に①の意味での大域的対称性があるとします。つまり、群 \$G\$ があり、\$g \in G\$ に対して変換 \$\phi(x) \to \phi^g(x)\$ があって、\$S(\phi^g) = S(\phi)\$ となるとします。\$G\$ は連続的でも離散的でも良いです。

アイデアは、大域的対称性であっても場所に依存する変換、つまりゲージ変換を試みることです。離散対称性でも適用できるように次のような変換を考えます。Euclidean 時空の中の領域 \$D\$ をとり、変換

$$\phi'(x) = \begin{cases} \phi^g(x), & x \in D \\ \phi(x), & x \notin D \end{cases} \quad (2.19)$$

を考えます。つまり、領域 \$D\$ 内では、\$g\$ での変換を行い、\$D\$ の外では変換しませ

ん。この変換を用いて分配関数を変形していきます。

$$\begin{aligned}
Z &= \int D\phi e^{-S(\phi)} \\
&= \int D\phi' e^{-S(\phi')} \\
&= \int D\phi e^{-S_{D,g}(\phi)}. \tag{2.20}
\end{aligned}$$

この変形では、1行目から2行目は単に積分変数の文字を変えただけです。2行目から3行目へは変換(2.19)を代入しました。簡単のため、この変換で積分測度 $\int D\phi$ は不変であることを仮定しました。また、 $S_{D,g}(\phi) := S(\phi')$ と定義しました。

さて、一般には変換で $S_{D,g}(\phi) \neq S(\phi)$ です。どれくらい異なるかを考えてみましょう。まず、 D の外部では $\phi(x) = \phi'(x)$ ですから、同じです。一方、 D の内部では $\phi \rightarrow \phi^g$ が大域的対称性であることから、同じになることが分かります。つまり、 **$S_{D,g}(\phi)$ と $S(\phi)$ は $M := \partial D$ の部分でのみ異なることとなります。** ですので、 M に局在している演算子（欠陥）を

$$U_{g^{-1}}(M) := \exp(S(\phi) - S_{D,g}(\phi)) \tag{2.21}$$

の挿入で定義することにします。すると(2.20)から

$$Z = \int D\phi e^{-S(\phi)} U_{g^{-1}}(M) \tag{2.22}$$

を得ます。この両辺を Z で割ると

$$\langle U_{g^{-1}}(M) \rangle = 1 \tag{2.23}$$

という恒等式を得ます。これが Ward-Takahashi 恒等式の一つです。

D の外側に他の演算子（欠陥）がささっている場合も全く同様の変形ができて、次の恒等式を得ます。

$$\langle U_{g^{-1}}(M) \cdots \rangle = \langle \cdots \rangle \tag{2.24}$$

このような式を単に

$$U_{g^{-1}}(M) = 1 \quad (\text{ただし } M \text{ の内側には他の演算子がささっていない}) \tag{2.25}$$

と式で表したり、

$$\oint_{U_{g^{-1}}(M)} = 1 \quad (2.26)$$

と絵で表したりするのでした。

2.3.2 演算子への作用

この見方で演算子への作用を考えてみます。 $\mathcal{O}(x)$ を局所演算子とし、それが $g \in G$ で $\mathcal{O}^g(x)$ と変換するとします。

D の内部に $\mathcal{O}(x)$ を置き、その他の任意の演算子 (欠陥) を D の外部に置きます。そして先程と同じように (2.19) を考えます。すると

$$Z \langle \mathcal{O}(x) \dots \rangle = \int D\phi \mathcal{O}(x) \dots e^{-S(\phi)} = \int D\phi U_{g^{-1}}(M) \mathcal{O}^g(x) \dots e^{-S(\phi)} \quad (2.27)$$

という恒等式を得ます。これは

$$U_{g^{-1}}(M) \mathcal{O}^g(x) = \mathcal{O}(x) \quad (2.28)$$

と書くのでした。ここで、 $\mathcal{O}^g(x)$ のことを $\mathcal{O}(x)$ と書き g のことを g^{-1} と書くことで

$$U_g(M) \mathcal{O}(x) = \mathcal{O}^g(x) \quad (2.29)$$

という恒等式を得ます。これは絵で

$$\oint_{U_g(M)} \times \mathcal{O}(x) = \times \mathcal{O}^g(x) \quad (2.30)$$

というふうに表示することもできます。

G は群ですから、演算子への作用も表現になっています。ですから、表現行列を用いて Ward-Takahashi 恒等式を表しておくことも便利です。すべての局所演算子の基底を $\mathcal{O}_a(x)$ とすると、 $\mathcal{O}_a^g(x)$ はこれらの線形結合で表すことができます。つまり $R(g)^b_a$ を表現行列として

$$\mathcal{O}_a^g(x) = \sum_b \mathcal{O}_b(x) R(g)^b_a \quad (2.31)$$

と書くことができます。これらすべてまとめて次のように言うことができます。

離散的な群の場合も含めて、トポロジカル欠陥が対称性の局所的な記述を与える。この対称性を記述するトポロジカル欠陥を**対称性欠陥**と呼ぶ。

Ward-Takahashi 恒等式は

$$\oint_{U_g(M)} \star \mathcal{O}_a(x) = \sum_b R(g)_a^b \star \mathcal{O}_b(x) \quad (2.32)$$

と表せる。

2.3.3 背景ゲージ場

対称性を表すトポロジカル欠陥の便利な見方の一つは、背景ゲージ場を考えることです。結論から言うと、flat な背景ゲージ場の背景が対称性のトポロジカル欠陥の配位と同一視できます。それをこれから説明していきます。

簡単のため、連続対称性でアノマリーが無い場合を考えます。前節と同じ設定で、大域的対称性の背景ゲージ場 A を入れた作用を $S(\phi, A)$ とします。 $A = 0$ のときに元の作用に戻るとします。つまり $S(\phi, A = 0) = S(\phi)$ とします。この背景ゲージ場の元での分配関数は

$$Z(A) = \int D\phi e^{-S(\phi, A)} \quad (2.33)$$

と表すことができます。

ここでゲージ変換について考えてみます。 $A = 0$ のところから、前項で考えたゲージ変換 (2.19) をしてみます。このとき、 $A \rightarrow A'$ と変化します。ゲージ不変性は仮定しているので

$$Z(A = 0) = Z(A') \quad (2.34)$$

となります。前項で議論したように、左辺は $M = \partial D$ に対称性欠陥が入った分配関数です。これがゲージ場 A' が入っているのと同じということです。

A' は $A = 0$ から (2.19) から得られたものですから、 A' は M 上だけでデルタ関数的に非0の値を持っています (図 2.1 参照)。その値は D の中の点から外の点への経路で M と1回交わる経路を C として

$$P e^{i \int_C A'} = g \quad (2.35)$$

となるようになっていきます。また、もともと場の強さは0でしたから、ゲージ変換した後も0となります。このように場の強さが0となるゲージ場の配位を **flat** なゲージ場といいます。

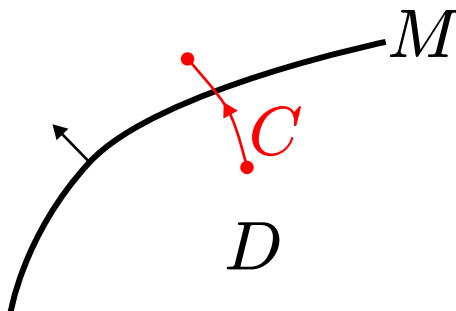


図 2.1 対称性欠陥と背景ゲージ場の配位。 M 上にある対称性欠陥は M 上にデルタ関数的に局在した背景ゲージ場の配位として表すことができる。 $Pe^{i\int_C A'} = g$ となるようになっている。

この結果をまとめると

対称性欠陥は、デルタ関数的に局在した背景ゲージ場の配位である。

と言えます。

この逆を考えてみましょう。flat な背景ゲージ場の配位が与えられたとします。するとある点のまわりの球体のトポロジーを持つ領域でゲージ変換して、 $A = 0$ とすることができます。これを図 2.1 のように空間のいろんな部分からやっていって、ほとんどの部分で $A = 0$ とすることができます。しかし、二人の人が別の点からゲージ変換していって、ぶつかったときに、その間ですべて $A = 0$ とすることは限りません。一般に2つの領域の境目で $A \neq 0$ となります。言い換えると、2つの領域の境目が対称性欠陥となります。

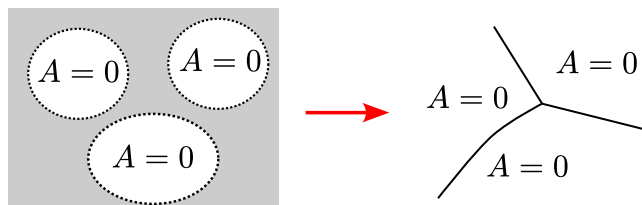
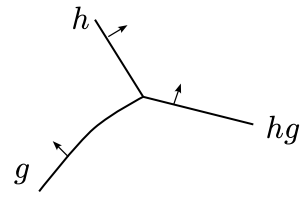


図 2.2 flat な背景ゲージ場の配位と対称性欠陥の関係。右のようにいろんな点のまわりの球体の領域でゲージ変換を行って $A = 0$ となるようにする。領域の境目のみで $A \neq 0$ になるが、これが対称性欠陥になる。

図 2.2 を見てもらっても分かるように、この操作を行うと一般的に対称性欠陥が枝分かれしている **ジャンクション** ができます。ゲージ変換によってジャンクションも連続的に動かすことができるので、このジャンクションもトポロジカルです。このジャンクションで繋がれるトポロジカル欠陥は何でもよいわけではなく、flat であることからジャンクションまわりの Wilson ループが 1 になるので、それぞれの欠陥に割り振られる群の元は



(2.36)

という関係になります。

図 2.2 では 2 次元的に書いているので余次元 2 のジャンクションだけですが、高次元ではこのようなジャンクションがさらに集まったジャンクションもできます。3 次元空間の中で泡が集まっているようなものを思い浮かべてください。

まとめると

flat なゲージ場の配位は、様々な次元のトポロジカルなジャンクションを含む対称性欠陥の配位で表される。

一般のこのような対称性欠陥の配位の元での分配関数は理論の詳細によります。しかし、対称性のみから導かれる Ward-Takahashi 恒等式から分かる部分もあります。

2.3.4 Ising 模型の spin flip の例

前項までは、連続的な場の理論の描像で対称性がトポロジカル欠陥で表されることを見てきました。連続的な場合には正則化など場の理論特有の微妙な問題もあって、数学的に厳密な取り扱いが難しいです。この項では、格子上での Ising 模型の spin flip の対称性を例にとって、対称性とトポロジカル欠陥を考えてみます。この場合には、経路積分が有限和になりますから、数学的に厳密な取り扱いが可能となります。

まず、Ising 模型を定義します。d 次元の立方格子を考えます。周期境界条件を課して有限個のサイトがあるような場合を考えます。サイトのラベルを i, j, \dots とします。各サイト i に自由度 $a_i = 0, 1$ を置きます。そして K を正の実数として、分配

関数をすべての $a_i = 0, 1$ の足し上げ

$$Z := \sum_{\{a\}} e^{-S(a)}, \quad S(a) := K \sum_{\langle ij \rangle: \text{すべてのリンク}} (-1)^{a_i + a_j} \quad (2.37)$$

で定義します。ここでサイト i, j をつなぐリンクを $\langle ij \rangle$ で表しました。これは有限和ですから、数学的に厳密な取り扱いができます。⁷⁾

この Ising 模型には spin flip の対称性

$$a_i \rightarrow a_i + 1 \pmod{2} \quad (2.38)$$

があります。この対称性を表すトポロジカル欠陥がどのようなものかを考えてみましょう。そのために領域（サイトの集合） D をとり、変換

$$a'_i = \begin{cases} a_i + 1, & i \in D \\ a_i, & i \notin D \end{cases} \quad (2.39)$$

を考えます。ここで、(2.37) の分配関数は

$$Z = \sum_{\{a\}} e^{-S(a)} = \sum_{\{a'\}} e^{-S(a')} = \sum_{\{a\}} e^{-S_D(a)} \quad (2.40)$$

と変形できます。最初は和を取っている変数の文字を変えただけです。次は (2.39) を代入し、明らかに成り立つ性質 $\sum_{\{a'\}} = \sum_{\{a\}}$ を用いました。また、 $S_D(a) := S(a')$ を定義しました。

$S_D(a)$ と $S(a)$ の違いを見てみましょう。リンク $\langle ij \rangle$ に関して、 $i, j \notin D$ の場合には変換しないので変化なし、 $i, j \in D$ の場合にも両方のスピンが反転するので、相互作用は変化しません。変化するのは片方が D に入っていて、もう片方は D に入っていない場合、つまりリンクが D の境界にある場合です。このようなリンクは、分配関数への寄与が

$$\exp(-K(-1)^{a_i + a_j}) \quad (2.41)$$

と反強磁性の相互作用になります。したがって $M = \partial D$ の部分でのみ相互作用が反強磁性になっていて、他の部分と異なっています。したがって、これは余次元 1 の欠陥になります。また、いろんな領域をとって (2.39) の変換をすることによって、

7) ここで数学的に厳密に取り扱いを説明するという意味ではありません。

分配関数の値を変えずに連続的に⁸⁾欠陥を動かすことができるので、この欠陥はトポロジカルです。つまり、この欠陥が対称性を表すトポロジカル欠陥である「対称性欠陥」です。

この spin flip のトポロジカル欠陥とゲージ場の配位の関係についても見ておきましょう。先程出てきた S_D は次のように書くことができます。

$$S_D(a) := -K \sum_{\langle ij \rangle} (-1)^{a_i + a_j + b_{ij}}, \quad b_{ij} = \begin{cases} 0, & \langle ij \rangle \notin M \\ 1, & \langle ij \rangle \in M \end{cases}. \quad (2.42)$$

この b_{ij} は、リンクに群 \mathbb{Z}_2 の元 $0, 1$ が配置されているので、格子理論における \mathbb{Z}_2 背景ゲージ場とすることができます。格子ゲージ理論については、後ほど詳しく説明します。このゲージ場の配位 b_{ij} は次のように flat という性質を満たします。格子においてサイトを頂点とする最小の正方形をプラケット (plaquette) と呼ぶことにします。任意のプラケットをとってきて、それを囲む4つのリンクを $\langle ij \rangle, \langle jk \rangle, \langle kl \rangle, \langle li \rangle$ とします。このとき上の b は

$$b_{ij} + b_{jk} + b_{kl} + b_{li} = 0 \pmod{2} \quad (2.43)$$

を満たします。このようなゲージの配位は flat な配位といいます。

逆に flat なゲージ場の配位が与えられたとします。すると $b_{ij} = 1$ となるようなリンクを横切るように欠陥を繋いでいくことで、対称性欠陥の配位とすることができます。対称性欠陥が端がなく、ちゃんとつながっていることは次のように保証されます。flat なので、すべてのプラケットに関して $b_{ij} = 1$ のリンクは偶数個あります。ですから、あるプラケットに入ってきた欠陥は、必ず出ていくことができます。

2.4 対称性欠陥のまとめ

これまでいろんな面から対称性の見方③余次元1のトポロジカル欠陥で群構造を持つもの、というのを見てきました。その性質をまとめておきます。

普通の対称性は次のようなものです。群 G を考えます。 $\forall g \in G$ と時空中の余次元1の向きのついた面 M に対して、トポロジカル欠陥 $U_g(M)$ があって次のような性質を満たします。

8) 格子理論で「連続的」は奇妙な感じがしますが、ここでは、境界付近にあるサイト一つだけまたぐ変形を繰り返してできる変形を「連続的な変形」と呼んでいます。

• 群構造

1. フュージョン (fusion) は群の積。

$$\left\langle \begin{array}{c} | \\ \leftarrow \\ U_g \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{c} | \\ \leftarrow \\ U_h \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} | \\ \leftarrow \\ U_{gh} \end{array} \right\rangle \quad (2.44)$$

2. 群の単位元には、自明な欠陥が対応。

$$\left\langle \begin{array}{c} | \\ \leftarrow \\ U_1 \end{array} \right\rangle = 1 \quad (2.45)$$

3. 逆元に対応するのは、向きを裏返したものである。

$$\left\langle \begin{array}{c} | \\ \leftarrow \\ U_g \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} | \\ \rightarrow \\ U_{g^{-1}} \end{array} \right\rangle \quad (2.46)$$

• 局所演算子への作用

$$\left\langle \begin{array}{c} | \\ \leftarrow \\ U_g(M) \end{array} \right\rangle \times \mathcal{O}_a(x) = \sum_b R(g)_a^b \times \mathcal{O}_b(x) \quad (2.47)$$

2.5 一般化対称性

これまで、普通の対称性がある種のとポロジカル欠陥という見方ができることが分かりました。逆に一般のとポロジカル欠陥は必ずしも対称性を表すものではありません。ここでのアイデアは、これを逆手にとって対称性の一般化を行うことです。

一般のとポロジカル欠陥を「**一般化対称性**」と呼ぶ。

まず、対称性はとポロジカル欠陥のうちで特殊なものでしたから、とポロジカル欠陥のことを一般化対称性と呼ぶのは妥当なことだと思います。大事なことはこの一般化対称性が普通の対称性と同じように場の理論の解析に使えるかということです。まず、とポロジカルという性質だけから Ward-Takahashi 恒等式に当たる恒等

式を考えることができます。また導入の章で説明した例ですと、Hamiltonian と交換するというのはトポロジカルということですが、この性質があると、普通の対称性でなかったとしても、ある場面では対称性と同様の使い方ができるということは、導入の章で説明したとおりです。ただし、一般化対称性をどのように使うかということに関しては、まだまだ研究の余地があり、現在も発展中です。

普通の対称性とは異なる一般化対称性には、ざっくり2つの方向性があります（もちろん両方の意味で一般化することも考えます）。

- 普通の対称性は余次元1でしたが、これを余次元 $p + 1$, $p > 0$ にしたものは p 形式対称性とか高次形式対称性と呼ばれます。
- 群構造が無いトポロジカル欠陥は「非可逆対称性」と呼ばれます。

非可逆対称性の名前の由来について、もう少しだけ説明します。まず、2つのトポロジカル欠陥を並べて置いたものはまたトポロジカル欠陥とみなすことができます。このような操作で新しいトポロジカル欠陥を作ることを「フュージョン」(fusion) といいます。これは対称性欠陥のまとめのところで出てきました。普通の対称性の場合にはフュージョンは群の掛け算になります。また、自明なトポロジカル欠陥（何も置かない）ものは必ず存在します。自明なトポロジカル欠陥は任意のトポロジカル欠陥とフュージョンしても変化させないので、単位元の役割を果たします。つまり、群構造のうちで満たさない可能性があるのは逆元の存在です。考えているトポロジカル欠陥 A に対して、フュージョンによって A を消すようなトポロジカル欠陥が存在しない場合に A や A を含むようなトポロジカル欠陥の集合を非可逆対称性と呼びます。

空間方向にのみ伸びているトポロジカル欠陥は Hilbert 空間に作用する演算子で、Hamiltonian と交換するものと思えることができます。このトポロジカル欠陥が非可逆対称性であることは、必ずしも **この Hamiltonian と交換する演算子が逆演算子を持たないということではない** ということに注意してください。トポロジカル欠陥が非可逆というのは逆のトポロジカル欠陥が無いということです。演算子に逆があったとしても、それが非局所的で欠陥ですらないようなもの場合には、トポロジカル欠陥は非可逆といいます。

第3章 2次元 Ising 模型

この章では、2次元 Ising 模型を題材にして次の2つのことを説明したいと思います。

- 2次元 Ising 模型の spin flip の \mathbb{Z}_2 対称性をゲージ化することについて説明します。離散対称性のゲージ化とは何か、そして有限アーベル群をゲージ化したときに必ず現れる大域的対称性「双対対称性」とその性質について説明します。
- 非可逆対称性の例として Kramers-Wannier 双対性を説明します。

3.1 2次元 Ising 模型と \mathbb{Z}_2 ゲージ化

3.1.1 2次元 Ising 模型

まず、Ising 模型の作用を書きます。これは前章で導入したものと同一なものです。2次元正方格子を周期境界条件で考えます。各サイトに自由度 $a_i = 0, 1$ を置きます。 K を正の定数として分配関数は

$$Z_{\text{Ising}}(K) = \sum_{\{a\}} \exp \left(K \sum_{\langle ij \rangle} (-1)^{a_i + a_j} \right) \quad (3.1)$$

とします。

この系には spin flip の大域的対称性があります。

$$a_i \rightarrow a_i + 1 \pmod{2}. \quad (3.2)$$

3.1.2 ゲージ化

Spin flip の \mathbb{Z}_2 の対称性をゲージ化するすることを考えます。

ゲージ場は各リンク $\langle ij \rangle$ に \mathbb{Z}_2 に値を持つ自由度 $b_{ij} = 0, 1$ として導入します。前節では背景ゲージ場として同じものが現れましたが、ここでは動的な自由度として導入します。

ゲージ変換はパラメータを各サイトに割り振られた \mathbb{Z}_2 の元 $\lambda_i = 0, 1$ として、

$$\begin{aligned} b'_{ij} &= b_{ij} + \lambda_i + \lambda_j, \\ a'_i &= a_i + \lambda_i \end{aligned} \quad (3.3)$$

とします。

(3.1) を変形して、トポロジカルにゲージ化された理論の分配関数を V をサイトの数として

$$Z_{\text{Ising}/\mathbb{Z}_2}(K) = \frac{1}{2^V} \sum_{\{a\}, \{b\}} \exp\left(K \sum_{\langle ij \rangle} (-1)^{a_i + a_j + b_{ij}}\right) \prod_{\text{すべてのプラケット } \langle ijkl \rangle} \delta_{b_{ij} + b_{jk} + b_{kl} + b_{li}, 0}^{\text{mod } 2} \quad (3.4)$$

と定義します。この分配関数について少し説明します。

まず、先頭についている $\frac{1}{2^V}$ の分母 2^V は、「ゲージ体積」です。ゲージ対称性でつながるような配位は物理的に同じ配位とみなすので、分配関数はその冗長性で割っておく必要があります。

最後についている $\delta^{\text{mod } 2}$ のところについて説明します。まず、この記号は b を整数として

$$\delta_{b,0}^{\text{mod } 2} = \begin{cases} 1, & b = 0 \pmod{2} \\ 0, & b = 1 \pmod{2} \end{cases} \quad (3.5)$$

と定義します。つまり全てのプラケットについて4辺の b の和が偶数の配位、つまり flat な配位のみ足し合わせるということにしています。このような拘束条件をつけたゲージ化を「トポロジカルなゲージ化」と呼ぶことにします。格子の場合には、離散対称性をゲージ化する場合に必ずこのようにしなければならないということではありません。ゲージ場の作用として別のものを選んで、flat に限らないゲージ場の配位をすべて足し合わせるようなゲージ化も可能です。ここでは後のためにトポロジカルなゲージ化を考えようということです。この講義に出てくる離散対称性のゲージ化は8割くらいがこのトポロジカルなゲージ化です。この講義でも後でトポロジカルではないゲージ理論を考えます。論文に出てくる離散対称性のゲージ理論は9割以上がトポロジカルなゲージ化です。

トポロジカルなゲージ化は非常に特殊なことをやっているように見えますが、実は Wilson のプラケット作用で弱結合極限を考えたものとみなすことができます。

$$\delta_{b,0}^{\text{mod } 2} = \lim_{g \rightarrow 0} \exp\left(\frac{1}{g^2}((-1)^b - 1)\right) \quad (3.6)$$

という恒等式が成り立ちます。この式の右辺の \exp の中で b としてプラケットのリンク変数を全部足したものを代入したものが Wilson のプラケット作用のプラケットの重みでしたから、式 (3.4) の左辺の $\delta^{\text{mod } 2}$ の積の項は Wilson のプラケット作用で弱結合極限をとったものとみなすことができます。

3.1.3 ゲージ固定

前章で flat な背景ゲージ場の配位は対称性欠陥の配位と同等であることを見ました。今、トポロジカルなゲージ化では、それぞれのゲージ場の配位は flat なので、対称性欠陥の配位とすることができます。つまり、ゲージ化とは、すべての対称性欠陥の配位について足し合わせることです。これを (3.4) の分配関数で実際に見てみたいと思います。

(3.4) では、ゲージ変換でつながっている、物理的には同等な配位を何回も足しています。これを次のようにしてゲージ変換でつながっている対称性は 1 回だけ足すように変形します。こうすると、ゲージ場に関する和の項の数は非常に少なくなります。代わりに欠陥がある特別なリンクが出てきて、格子の並進対称性が明白では無くなります。¹⁾

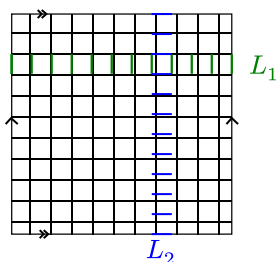


図 3.1 ゲージ固定に用いるリンクの列。

まず、図 3.1 のように縦方向のリンクの横方向の列 L_1 と横方向のリンクの縦方向の列 L_2 を選びます。任意の flat な b の配位において、ゲージ変換で L_1, L_2 以外のリンクの b をすべて 0 にできます。

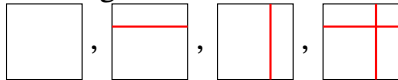
$$b_\ell = 0, \ell \neq L_1, L_2. \quad (3.7)$$

こういうふうなゲージ固定した上で、 L_1 の中にあるリンクについて考えましょう。flat であることと、接している横方向のリンクの b が、 L_2 と交わる場所以外で 0

1) もちろん理論として格子の並進対称性は存在します。並進変換するとゲージ固定条件がこわれますが、ゲージ変換をすることでゲージ固定条件を再び満たすようにできます。これらの変換を組み合わせたものがゲージ固定した後の並進対称性です。

であることから、となり同士の b の値は等しくなります。ですから L_1 に属するすべてのリンクの b の値は等しくなります。同様の考察を L_2 に関しても行うことができます。まとめると、ゲージ固定した後のゲージ場の配位は次の4種類になります。

$$\ell_1 \in L_1, \ell_2 \in L_2, (b_{\ell_1}, b_{\ell_2}) = (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1) \quad (3.8)$$

この4つの配位はゲージ不変である Wilson ループの値が異なりますから、ゲージ変換では繋がらない配位です。また、 $b_{\ell_1} = 1$ の場合には L_1 のところに 2.3.4 項で考えた spin flip の欠陥が入っている配位です。 $b_{\ell_1} = 0$ の場合には L_1 には欠陥は入っていないということもできますし、自明な欠陥が入っていると言っても良いです。 L_2 の方も同様で、自明な欠陥が入っている場合と、spin flip の欠陥が入っている場合があります。 $(b_{\ell_1}, b_{\ell_2}) = (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$ 場合の欠陥が入った Ising 模型の分配関数を、それぞれ spin flip 欠陥を赤線で描いた絵を用いて  で表すことにします。

次に全体にかかる定数の規格化を求めるために、このゲージ固定をした後で残っているゲージ対称性について考えましょう。残っているゲージ対称性、つまりゲージ固定条件を変えないゲージ変換のパラメーターは次の2種類だけです。

$$\lambda_i = 0 (\text{すべての } i), \quad \lambda_i = 1 (\text{すべての } i). \quad (3.9)$$

言い換えると、ゲージ体積のうち2以外は、このゲージ固定から出てくる冗長性と相殺しています。

これらを合わせると、(3.4)の分配関数は

$$Z_{\text{Ising}/\mathbb{Z}_2} = \frac{1}{2} \left(\square + \square_{\text{horizontal}} + \square_{\text{vertical}} + \square_{\text{cross}} \right) \quad (3.10)$$

となります。

3.2 双対対称性

この節では、Ising 模型を離れて、一般的な2次元の場の理論での有限アーベル群の大域的対称性とそのゲージ化について考えます。

G を有限アーベル群、 \mathcal{T} を2次元の場の理論で大域的 G 対称性があり、 G はゲージ化可能であるものとします。言い換えると \mathcal{T} の G 対称性には't Hooft アノマリー

は無いものとしします。 \mathcal{T} の G 対称性をゲージ化した理論を \mathcal{T}/G と表すことにします。

このとき、次のような命題が成り立ちます。

命題

- (1) \mathcal{T}/G には \hat{G} (Pontryagin 双対) の大域的対称性があります。この \hat{G} 対称性にはアノマリーはありません。
- (2) $\mathcal{T}/G/\hat{G} \cong \mathcal{T}$.

Pontryagin 双対 \hat{G} について説明します。 \hat{G} は集合として

$$\hat{G} = \{G \text{ の既約表現 }\} / (\text{同値}) \quad (3.11)$$

です。アーベル群の既約表現ですから、すべて 1 次元表現です。群の掛け算は表現のテンソル積 \otimes で定義します。テンソル積はまた 1 次元表現になるので、既約表現です。単位元は自明な表現、逆元は双対表現になって \hat{G} は群をなします。別の言い方をすると、 \hat{G} は G 対称性のあり得る電荷の集合です。電荷には足し算の概念があって、それで群になります。

この命題について説明していきます。まず、(1) について説明します。前章で説明したとおり、対称性とは余次元 1 のトポロジカル欠陥で群構造を持つ「対称性欠陥」で表されるのでした。今の場合、**Wilson ループが対称性欠陥になります**。ゲージ理論において Wilson ループはゲージ群 G の表現でラベルされる次元 1 の欠陥です。今は全体の次元が 2 ですから Wilson ループの余次元は 1 になります。また、今はトポロジカルなゲージ化を考えているので、場の強さは 0 であり、Wilson ループは連続的に変形しても値を変えない、つまりトポロジカルになります。さらに、Wilson ループのフュージョンは表現のテンソル積になります。上で見たように、有限アーベル群の既約表現全体 \hat{G} はまたテンソル積でアーベル群になります。こうして、Wilson ループが対称性を表す対称性欠陥であり、対称性の群は \hat{G} ことが分かります。

次に (2) について説明します。簡単のためにトーラスの分配関数を考えます。まず、理論 \mathcal{T} の分配関数を

$$Z_{\mathcal{T}} = \square \quad (3.12)$$

$N := |G|$ として、 \mathcal{T}/G の分配関数は、すべての対称性欠陥の配位を足し上げるこ

とで得られるので

$$Z_{\mathcal{T}/G} = \frac{1}{N} \sum_{a,b \in G} \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline b & \\ \hline \end{array} =: \text{yellow square} \quad (3.13)$$

となります。これを右辺のように黄色い四角で表すことにします。ここから $\mathcal{T}/G/\hat{G}$ の分配関数を考えます。これも Wilson ループの配位について足し合わせて

$$Z_{\mathcal{T}/G/\hat{G}} = \frac{1}{N} \sum_{\hat{a}, \hat{b} \in \hat{G}} \begin{array}{|c|c|} \hline \text{yellow square} & \hat{a} \\ \hline \hat{b} & \\ \hline \end{array} \quad (3.14)$$

ここで、 \hat{G} 対称性の対称性欠陥である Wilson ループを青い線で表しました。これに (3.13) を代入して

$$Z_{\mathcal{T}/G/\hat{G}} = \frac{1}{N^2} \sum_{a,b \in G} \sum_{\hat{a}, \hat{b} \in \hat{G}} \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline \hat{a} & \\ \hline \hat{b} & b \\ \hline \end{array} \quad (3.15)$$

右辺の和の中について考えてみます。これは理論 \mathcal{T} の中で赤線で表される対称性欠陥、言い換えると背景ゲージ場の下での分配関数に、青線で表される Wilson ループをかけたものです。 \hat{a} 表現での G の要素 a の指標（表現行列のトレース。1次元表現なので 1×1 の行列そのもの）を $\chi_{\hat{a}}(a)$ とすると

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline \hat{a} & \\ \hline \hat{b} & b \\ \hline \end{array} = \chi_{\hat{b}}(a) \chi_{\hat{a}}(b) \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline & \\ \hline & b \\ \hline \end{array} \quad (3.16)$$

となります。ところで指標は

$$\sum_{\hat{a} \in \hat{G}} \chi_{\hat{a}}(a) = N \delta_{a,0} \quad (3.17)$$

という関係式を満たします。これらを用いると (3.15) は

$$Z_{\mathcal{T}/G/\hat{G}} = \frac{1}{N^2} \sum_{a,b \in G} \sum_{\hat{a}, \hat{b} \in \hat{G}} \chi_{\hat{b}}(a) \chi_{\hat{a}}(b) \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline & \\ \hline & b \\ \hline \end{array} = \sum_{a,b \in G} \delta_{a,0} \delta_{b,0} \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline & \\ \hline & b \\ \hline \end{array} = \text{empty square} = Z_{\mathcal{T}} \quad (3.18)$$

となります。

先ほどはトーラスの分配関数を考えましたが、一般の閉じた Riemann 面を考えるとときには計量に関する相殺項に関して少し注意が必要です。まず、特に計量に関する相殺項を入れなかったとすると、その分配関数は

$$Z_{\mathcal{J}/G/\hat{G}} = \frac{1}{N^\chi} Z_{\mathcal{J}} \quad (3.19)$$

となります。ここで χ は Riemann 面 Euler 数で、種数 g や面、辺、頂点の数（それぞれ F, E, V ）と

$$\chi = 2 - 2g = F - E + V \quad (3.20)$$

の関係にあります。トーラスの場合には、たまたま $\chi = 0$ なので、先ほどは考える必要がありませんでした。2回やって元にもどるといふ関係にしたいときには、次のような局所相殺項を入れてゲージ化を定義する必要があります。

$$Z_{\mathcal{J}/G,\text{new}} = \sqrt{N}^\chi Z_{\mathcal{J}/G, \text{いままでの}} \quad (3.21)$$

こうすると、一般の閉じた Riemann 面で

$$Z_{\mathcal{J}/G/\hat{G},\text{new}} = Z_{\mathcal{J},\text{new}} \quad (3.22)$$

となります。この Euler 相殺項については、Kramers-Wannier 双対性を表す非可逆なトポロジカル欠陥を考えると必要になります。この講義では、今後ゲージ化の際には、この相殺項を入れたものを考えることにします。

この節では、アーベル群によるゲージ化のみを考えました。では、(有限の) 非アーベル群によるゲージ化を考えるとどうなるでしょうか。トポロジカルなゲージ化を考えると、場の強さが 0 なのは変わりません。したがって Wilson ループが余次元 1 のトポロジカル欠陥になるのも同じです。フュージョンは表現のテンソル積になるのも同じです。違いは非アーベル群の場合には、次元が 2 以上の既約表現があり、テンソル積の意味で逆が無い場合があるということです。つまり、有限非アーベル群をゲージ化した際の双対対称性（よく $\text{Rep}(G)$ と書かれます）は、トポロジカル欠陥で群構造がない「非可逆対称性」になっています。おそらくこれが非可逆対称性の一番簡単な例です。この例も含め 2 次元の非可逆対称性については [3] に詳しく説明されています。この講義では $\text{Rep}(G)$ はこれ以上説明しません。もう一つの代表的な非可逆対称性の例で高次元にも類似物がある Kramers-Wannier 双対性について詳しく説明します。

3.3 Kramers-Wannier 双対性

この節では、2次元 Ising 模型の Kramers-Wannier 双対性を紹介します。Kramers-Wannier 双対性はよく統計力学の教科書でも紹介されていますが、ここでは後のためにより精密な双対性について述べます。後に、この Kramers-Wannier 双対性に対応する非可逆対称性について述べます。

また、Kramers-Wannier 双対性と Ising 模型の相構造について述べます。

3.3.1 Kramers-Wannier 双対性と、その証明

Kramers-Wannier 双対性

次の恒等式が厳密に成り立ちます。

$$\frac{1}{(\sinh 2K)^{V/2}} Z_{\text{Ising}/\mathbb{Z}_2}(K) = \frac{1}{(\sinh 2\tilde{K})^{V/2}} Z_{\text{Ising}}(\tilde{K}). \quad (3.23)$$

ここで K と \tilde{K} は

$$\sinh 2K \sinh 2\tilde{K} = 1 \quad (3.24)$$

の関係で結びついています。

分配関数の前についている \sinh が入った因子は計量のみによく局所的な項として作用に組み込むことができますから、パラメーターが K のゲージ化した Ising 模型とパラメーターが \tilde{K} の Ising 模型は同じ理論であるというのが、この命題です。

この命題を証明します。

まず、(3.4) を補助的な変数を用いて書き換えます。(3.5) は

$$\delta_{b,0}^{\text{mod } 2} = \frac{1}{2} \sum_{c=0,1} e^{\pi i c b} \quad (3.25)$$

という恒等式を満たすことに注目します。すると各プラケット p に $c_p = 0, 1$ の補助的な自由度を置いて (3.4) は

$$Z_{\text{Ising}/\mathbb{Z}_2}(K) = \frac{1}{2^{2V}} \sum_{\{a\}, \{b\}, \{c\}} \exp \left(K \sum_{\langle ij \rangle} (-1)^{a_i + a_j + b_{ij}} + \pi i \sum_{\text{プラケット } p=\langle ijkl \rangle} c_p (b_{ij} + b_{jk} + b_{kl} + b_{li}) \right) \quad (3.26)$$

と書くことができます。ここで、プラケットの数は頂点の数と同じであることを用いました。

(3.26)で、ゲージ対称性を用いて、すべてのサイト i で $a_i = 0$ となるようにゲージ固定します。この固定によって 2^V 個のすべてのゲージ体積を相殺します。その後、 $\{b\}$ の和を評価します。各リンク ℓ に対して2つのプラケットが接していることに注目して

$$Z_{\text{Ising}/\mathbb{Z}_2}(K) = \frac{1}{2^V} \sum_{\{c\}} \prod_{\text{リンク } \ell} Z_\ell, \quad (3.27)$$

$$Z_\ell = \sum_{b=0,1} \exp(K(-1)^b + \pi i b(c_p + c_q)) \quad (3.28)$$

(p, q は ℓ に接している2つのプラケット)

と書くことができます。 Z_ℓ の表式では、和をとっているダミーの変数は b_ℓ だったものですが、ダミーの変数ですから単に b と書いています。

$c := c_p + c_q \pmod{2}$ と略記して、 Z_ℓ を変形していきます。

$$\begin{aligned} Z_\ell &= e^K + (-1)^c e^{-K} \\ &= \begin{cases} 2 \cosh K & (c = 0) \\ 2 \sinh K & (c = 1) \end{cases} \\ &= 2 \cosh K (\tanh K)^c \end{aligned} \quad (3.29)$$

という形に書けます。ここで

$$\tanh K =: e^{-2\tilde{K}} \quad (3.30)$$

の式で \tilde{K} を定義します。すると

$$\sinh 2K \sinh 2\tilde{K} = 1, \quad (3.31)$$

$$Z_\ell = \sqrt{2 \sinh 2K} e^{\tilde{K}(-1)^c} \quad (3.32)$$

という式が成り立ちます。これらを順に導出していきます。

まず、(3.31)を導出します。(3.30)の両辺の逆数をとったものから、(3.30)を引き算します。すると

$$(\text{右辺}) = e^{2\tilde{K}} - e^{-2\tilde{K}} = 2 \sinh 2\tilde{K}, \quad (3.33)$$

$$(\text{左辺}) = \coth K - \tanh K = \frac{\cosh^2 K - \sinh^2 K}{\cosh K \sinh K} = \frac{2}{\sinh 2K} \quad (3.34)$$

と計算できるので、(3.31) が成り立つことが分かります。

次に、(3.32) を導出します。(3.29) に (3.30) を代入し、 $(-1)^c = 1 - 2c$ に注目して変形します。

$$\begin{aligned} Z_\ell &= 2 \cosh K e^{\tilde{K}(-2c)} = 2 \cosh K e^{-\tilde{K}} e^{\tilde{K}(-1)^c} \\ &= 2 \cosh K \sqrt{\tanh K} e^{\tilde{K}(-1)^c} = \sqrt{2 \sinh 2K} e^{\tilde{K}(-1)^c} \end{aligned} \quad (3.35)$$

と変形できるので (3.32) が成り立つことが分かります。

(3.32) を (3.28) に代入して変形します。元の格子に双対な格子を導入すると ℓ に双対なリンクは双対格子のサイト p, q をつなぐ双対格子のリンク $\langle pq \rangle$ になります。これを踏まえて式変形すると

$$\begin{aligned} Z_{\text{Ising}/\mathbb{Z}_2}(K) &= \frac{1}{2^V} \sum_{\{c\}} \prod_{\langle pq \rangle} \sqrt{2 \sinh 2K} e^{\tilde{K}(-1)^{c_p+c_q}} = (\sinh 2K)^V \sum_{\{c\}} \exp \left(\sum_{\langle pq \rangle} \tilde{K}(-1)^{c_p+c_q} \right) \\ &= (\sinh 2K)^V Z_{\text{Ising}}(\tilde{K}) \end{aligned} \quad (3.36)$$

という式を得ます。ここで (3.31) を用いると (3.23) を得ます。また (3.24) は、(3.31) です。■

この Kramers-Wannier 双対性の証明を見てみると、次の重要な事実が分かります。**Kramers-Wannier 双対性の左辺のゲージ化した Ising 模型の格子と右辺の Ising 模型の格子は互いに双対関係にあります。**この事実は、後に Kramers-Wannier 双対性を表すトポロジカル欠陥を考える際に非常に重要な役割を果たします。また、今回見たように、トーラス上で正方格子で考えた場合には、双対の格子は同型になってしまうので分かりにくいですが、一般の格子での Kramers-Wannier 双対性の両辺は格子は互いに双対の（一般に異なる）格子になります。

3.3.2 Ising 模型の相構造

この Kramers-Wannier 双対性を踏まえて、Ising 模型の相構造について考えてみます。

統計力学の授業などで、Ising 模型には相転移があることを聞いたことがあると思います。 K が大きいところ（低温）では、spin flip の対称性が自発的に破れた相になっています。場の量子論の見方而言えば、ここでは真空が縮退しています。一方で K が小さいところ（高温）では対称性が回復していて、場の理論の見方では真空は唯一です。この間には相転移が少なくとも一回はあります。

Kramers-Wannier 双対性を用いると、この相転移点を求めることができます。まず大事なことは Ising と Ising/ \mathbb{Z}_2 は、熱力学的な量、例えば自由エネルギー密度は同じです。これを $f(K)$ と書くことにします。Kramers-Wannier 双対性から $f(K) = f(\tilde{K})$ が導かれます。また、相転移点では $f(K)$ が非解析的になっています。 $K = K_c$ で相転移があるとすると、 $f(K) = f(\tilde{K})$ ですから、 $K = \tilde{K}_c$ でも非解析的、つまり相転移があることになります。ここから、相転移が一回だけであることを仮定すると、自己双対の値 $K_c = \tilde{K}_c$ となること、つまり (3.24) から $\sinh 2K_c = 1$ 、したがって $K_c = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2})$ となることが分かります。

自己双対の点 $K = K_c$ では、(3.23) の式は

$$Z_{\text{Ising}/\mathbb{Z}_2}(K_c) = Z_{\text{Ising}}(K) \quad (3.37)$$

となります。つまり、この点では Ising と Ising/ \mathbb{Z}_2 は同じ理論ということになります。後に見るように、この性質から、この点では非可逆対称性があります。

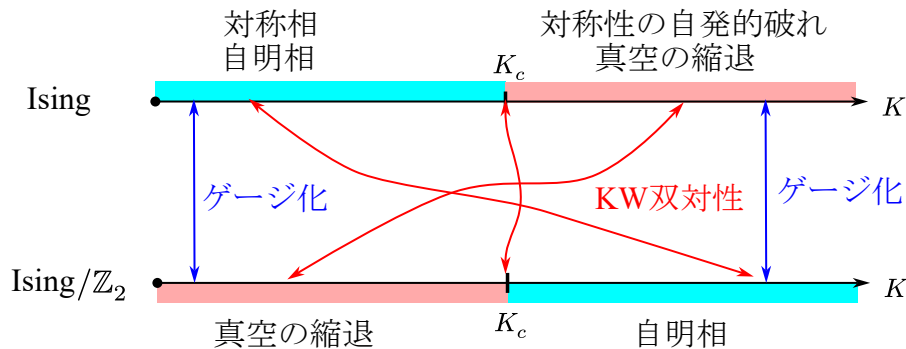


図 3.2

もう少し相構造について見てみましょう。図 3.2 に Ising と Ising/ \mathbb{Z}_2 の相構造とその関係を示しました。Ising では K が大きいところでは対称性の自発的破れがあり、真空の縮退がありました。Kramers-Wannier 双対性から、Ising/ \mathbb{Z}_2 では K が小さいところで自発的対称性の破れがあり、真空の縮退があります。Ising/ \mathbb{Z}_2 では、双対 \mathbb{Z}_2 対称性がありますから、 K が小さいところでこの対称性が自発的に破れています。一方、Ising で K が小さいところでは対称性が保たれている自明な相になっています。Kramers-Wannier 双対性を用いると Ising/ \mathbb{Z}_2 で K が大きいところで自明相になっています。

図 3.2 では、ゲージ化の操作を縦の青い矢印で表しています。例えば K が小さいところでは、Ising は自明相にあり、真空は唯一ですが、これをゲージ化するとゲージ場の自由度を加えることになって、このために真空が縮退します。2つの状態は

空間的な円の Wilson ループの期待値で区別されます。一方、Ising で K が大きいところでは、真空は二重に縮退しています。これをゲージ化すると、2つの真空のうち、ゲージ不変な方だけが生き残るので、唯一の真空をもつ自明な相になります。

3.4 Ising 模型の演算子

ここでは、前節の Kramers-Wannier 双対性の議論を踏まえたうえで、Ising 模型の様々な演算子（欠陥）についてまとめておきます。

まず、その動機について説明します。一つは後に Kramers-Wannier 双対性で演算子がどのように移り合うかを説明するためです。

もう一つの動機は、Lagrangian に出てくる場の複合演算子として書けない演算子の例を与えることです。²⁾一般に場の理論の（局所）演算子には次のようなものがあります。

1. Lagrangian に現れる場。
2. Lagrangian に現れる場の微分やそれらの関数。複合演算子とも呼ばれる。
3. その他。

1. は場の理論の教科書などで最初に出てきますし、みなさん馴染みがあると思います。2. もカレントやエネルギー運動量テンソルなどをはじめとして、場の理論では重要な演算子です。3. は要するに Lagrangian に現れる場の微分や複合演算子として書けない演算子です。まず、1. 2. 3. の違いは記述の違いであって、物理の違いで無いことに注意してください。物理では 3. の演算子も重要になる場面は多数あります。ただ、3. の演算子は分かりにくく、教科書等にあまり出てこないため、馴染みが無い方が多いかもしれません。**Ising 模型の演算子は、Lagrangian に現れる場の微分や複合演算子として書けない例を与えます。**

さて、演算子について説明していきます。ここでは、式 (3.26) に含まれる自由度で書ける様々な演算子について考えます。特に、次の3種類について考えます。

- c_p から作るスピン演算子 (spin operator) $\sigma_p = (-1)^{c_p}$
- b_ℓ から作る Wilson ループ (Wilson loop) 演算子 $\eta(C) = (-1)^{\sum_k b_{\ell_k}}$ 。ただし、 C はリンク ℓ_1, ℓ_2, \dots から作られる閉じたループである。

2) この講義では、「演算子」と「欠陥」はほぼ同じ意味で用いていますが、主に欠陥の方を用いています。これは、欠陥の方が Lagrangian に出てくる場の複合演算子として書けないかもしれないことが強調されると感じたからです。

- a_i から作るスピン演算子。 $\mu_i \sim (-1)^{a_i}$

これらの演算子を作用 (3.26) の中だけで考えるなら、特に問題になることはありません。その演算子の相関関数は通常どおり計算できます。これから考えたいのは上の演算子を、 a, b の和をとってしまったり、 c の和をとってしまったりした後で考えることです。注意してほしいのは、このように、ある和を先にとってしまったとしても、これらの演算子が無くなるわけではありません。作用に出てくる場の関数として書けなくなるだけです。

これらの演算子について順に見ていきます。

3.4.1 スピン演算子

まず、スピン演算子 $\sigma_p = (-1)^{c_p}$ について説明します。これは、これだけでゲージ不変なので純粋な局所演算子 (genuine local operator) です。これは、 a, b を積分してしまったり通常 Ising 模型の記述にした後も、そのスピン演算子として、相転移の秩序変数となる重要な演算子です。

一方で、 c を先に和をとってしまったり、Ising/ \mathbb{Z}_2 (3.4) の記述にした場合はどうでしょうか。 c はもはや Lagrangian の中に現れる場ではないので、 σ_p は **Lagrangian に出てくる場で書けない演算子** になります。では、どう書けるかを考えてみましょう。 $\sigma_p = (-1)^{c_p}$ を挿入してから c について和をとると、(3.4) の拘束を表す $\delta^{\text{mod } 2}$ の因子の中で σ_p を挿入したプラケット p のところだけが、

$$\delta^{\text{mod } 2}_{\sum_{(ij) \in p} b_{ij} + 1, 0} \tag{3.38}$$

となります。つまり、演算子を挿入したところでは、拘束条件がプラケットでの b の和を (0 ではなく) 1 にする、というものになります。

3.4.2 対称性欠陥

次に b から作る Wilson ループ η について詳しく見てみます。3.2 節で見たように、この η はトポロジカルで、対称性欠陥になっています。

η が、スピン演算子 σ を反転する spin flip の演算子になっていることを、詳しく見てみましょう。プラケット p に演算子 $\sigma_p = (-1)^{c_p}$ を挿入し、それを囲む経路 C をとって $\eta(C)$ を挿入します。 $\eta(C)$ はトポロジカルなので、値を変えずに p のプラケットまで縮めることができます。作用 (3.26) を見ると、この η の挿入は、和を取っている変数の変換 $c'_p = c_p + 1$ で吸収することができます。このとき

$\sigma_p = (-1)^{c_p} = -(-1)^{c'_p}$ となります。したがって、次のような Ward-Takahashi 恒等式が成り立ちます。

$$\langle \sigma_p \eta \rangle = \langle -\sigma_p \rangle. \quad (3.39)$$

これは、 η がスピン演算子 σ を反転する spin flip の対称性欠陥であることを示しています。

a, b の和をとってしてしまった後で η がどのように表現されるか考えましょう。 $\eta(C)$ を挿入した後で 3.3.1 項と同様に a, b の和をとります。すると、 C に含まれるリンクの相互作用には (-1) が余分にかかることとなります。つまり

$$\langle \eta(C) \dots \rangle = \frac{1}{Z_{\text{Ising}}} \sum_{\{c\}} \exp \left(\sum_{\text{すべてのリンク } \langle pq \rangle} \tilde{K} (-1)^{c_p + c_q + \delta_{\langle pq \rangle}(C)} \right) \dots \quad (3.40)$$

となります。ここで $\delta_\ell(C)$ はリンク ℓ が C と交わっていれば 1、そうでなければ 0 という記号です。つまり、 C と交わっているリンクは、相互作用が反強磁性に置き換わっています。これは 2.3.4 項で見た spin flip の対称性欠陥そのものです。

3.4.3 無秩序スピン

次に無秩序スピンについて詳しく考えてみます。これは、式 (3.4) の表式でサイト i に置かれた演算子 $(-1)^{a_i}$ です。まず重要なことは $(-1)^{a_i}$ そのものはゲージ不変でないので、統計力学での良い演算子ではありません。これが入った相関関数を考えると、いつでも 0 になってしまいます。

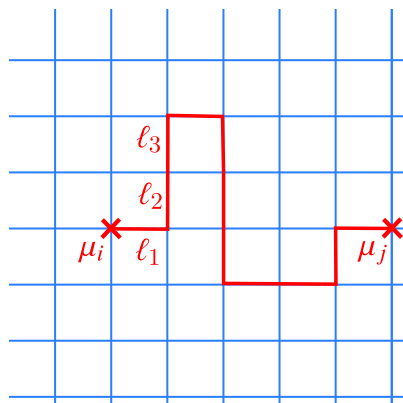


図 3.3 赤い線が η 線演算子で両端の μ_i, μ_j が無秩序スピン演算子である。この形でゲージ不変になっている。

これをゲージ不変にするために η 線演算子 (b Wilson ライン) をくっつけて $\mu_i = (-1)^{a_i + b_{\ell_1} + b_{\ell_2} + \dots}$ を考えます (図 3.3 参照)。ただし、 ℓ_1, ℓ_2, \dots は i に端をもつ経路です。この演算子を $(-1)^{c_p}$ を秩序演算子としてのスピン演算子と言うのに対応して) 無秩序演算子 (disorder operator) とか無秩序スピン (disorder spin) と呼びます。³⁾ 次のようなことに注意する必要があります。

- μ_i は位置 i だけでなく、くっつく Wilson ライン η の経路によっています。ただし、 η はトポロジカルなので、経路の連続変形にはよっていません。一般に、このような演算子を非純正局所演算子 (non-genuine local operator) と呼ぶことがあります。反対の言葉は純正局所演算子 (genuine local operator) で、スピン演算子 σ_p はその例です⁴⁾。
- 端のある Wilson ラインは必ず反対側の端があります。したがって μ_i は必ずペアで現れなければなりません。

a, b の和を取ってしまった後で無秩序スピンのようになるか見てみましょう。スピン演算子がサイトにあるような格子で考えると、 μ はプラケットの中心に配置され、対称性欠陥の端として表されます。別の言い方をすると、プラケット一周してきたときに (周期境界条件ではなく) 半周期境界条件を課するという言い方もできます。

無秩序スピンの名前の由来は次のようなものです。 σ スピン演算子 (秩序スピン演算子) の言葉で秩序相 (spin flip 対称性が自発的に破れている) にあるときは、 μ_i の期待値が 0 になります。正確に言うなら、 μ を挿す 2 点を遠くに離す極限で 2 点関数が 0 になります。これは次のようにして理解することができます。秩序相で K が大きい極限を考えてみます。このとき、すべてのスピンはそろおうとします。しかし、 μ が入っている点のまわりではどこかで反強磁性になっているので、すべてのスピンがそろうことができません。なるべくエネルギーを低くするためには、となりあうスピンが反対の部分 (対称性欠陥直上では同じ部分) が最小になるの

3) 多くの教科書や論文では、秩序演算子、無秩序演算子の区別は記述によるものです。つまり、Lagrangian に出てくる場で書かれているものが秩序演算子、Lagrangian に出てくる場では書かれていないものが無秩序演算子です。これらは互いに非局所的ですが、どちらが純正な局所演算子かは、気にしていないことが多いです。この講義では、記述にかかわらず、純正局所演算子の方を (秩序) スピン演算子、純正ではなく、トポロジカル欠陥がくっついているものを無秩序スピン演算子と呼ぶことにします。

4) この “genuine local operator” という用語は文献 [11] から使われ始めました。

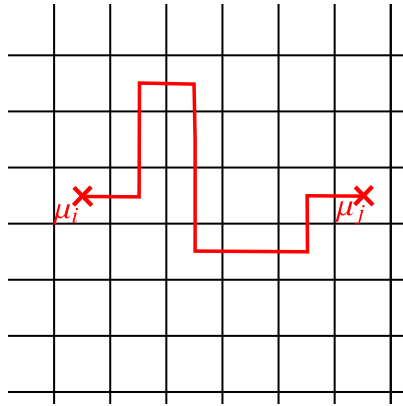


図 3.4 a, b の和をとってしまった後での無秩序演算子の様子。赤で表した経路は対称性欠陥 η を表しています。つまり、赤の線と交わっているリンクは反強磁性になっています。 μ 演算子は η の端のブラケットに配置されています。

が、エネルギーが最も低い配位になります。したがって、ある定数 $m > 0$ があって

$$\langle \mu_i \mu_j \rangle \sim e^{-mL}, \quad (L \text{ は } i, j \text{ の間の距離。}) \quad (3.41)$$

となります。なので $L \rightarrow \infty$ で 2 点関数は 0 になります。

一方、無秩序相にあるときは、 μ が期待値を持つ、正確には μ を刺す 2 点を遠くに離す極限で 2 点関数が 0 でない定数になります。これは次のように理解できます。無秩序相ではスピンは相関が消えます。ですから、 μ 演算子が刺さっている点から離れたところではエネルギーに影響はありません。ただし、 μ が刺さっていることで、その点の近くでエネルギーが変わりますから、その分 0 でない値が出ます。したがって、 μ を挿す 2 点を遠くに離す極限で 2 点関数が 0 でない定数になります。

3.5 KW 欠陥

これまで準備してきたことを踏まえて、ここでは非可逆対称性の一つの例である Kramers-Wannier (KW) 欠陥について紹介します。いろいろな見方があるのですが、ここでは連続理論や高次元への拡張が容易な半空間ゲージ化 (half-space gauging) による構成について説明します。

まず、大まかなアイデアについて説明します。一般化対称性とは、何かの方法で作ったトポロジカル欠陥です。最初の方で紹介した対称性の一つの見方①場の変換で作用を不変にするもの、というものがあるとトポロジカル欠陥が作れることを 2

で説明しました。これを絵で表すと

(3.42)

となります。これを一般化し、ある領域 D 内で変換だけでなく離散対称性のトポロジカルなゲージ化を含む様々な操作を行うことを考えます。この操作でバルクでは元の理論に戻る場合を考えます。 $K = K_c$ の場合に $Z_{\text{Ising}} = Z_{\text{Ising}/\mathbb{Z}_2}$ でしたから、Ising 模型の場合はゲージ化を含む操作で元に戻る、というのが例です。バルクでは元に戻りますから、一般に境界で欠陥ができます。“うまい境界条件”

でゲージ化を行うと、この欠陥がトポロジカルになる場合があります。絵で書くと

ゲージ化、変換、補助場の導入、積分、…

(3.43)

となります。

ここでいくつかの注意をします。

- (3.42) と違って、(3.43) は “=” の関係でないことに注意してください。これは、あくまで（一般に非可逆な）トポロジカル欠陥を見つける方法であって、Ward-Takahashi 恒等式を見つけるには、さらに解析が必要です。
- 離散対称性のトポロジカルなゲージ化であったからといって、すぐに境界に現れる欠陥がトポロジカルになるとは言えません。ゲージ化の際のゲージ場の境界条件の取り方は非常に重要です。

ここでは、 $K = K_c$ での Ising 模型を例にとって、この半空間ゲージ化の方法でトポロジカル欠陥を導出します。まず、格子上で領域 D をどう設定するかについて説明します。これはゲージ場の境界条件と絡んで、重要な部分です。次に半空間ゲージ化の手続きを説明し、バルクがちゃんと元に戻ることを、言い換えると現れる

トポロジカル欠陥がちゃんと余次元1の欠陥になっていることを説明します。その後、この欠陥がトポロジカルであることを説明します。

3.5.1 領域の取り方

領域の取り方について詳しく説明します。 Λ を周期境界条件を課した格子とします。この上で $K = K_c$ の Ising 模型を考えます。分配関数は

$$Z_{\text{Ising}} = \sum_{\{a\}} \exp \left(K \sum_{\text{リンク}(ij)} (-1)^{a_i + a_j} \right) \quad (3.44)$$

です。ここで、 i, j は Λ のサイトで a_i は Λ のサイトに乗っている自由度です。このように Ising 模型でスピンの自由度がサイトにのっている格子をアクティブ格子 (active lattice) と呼ぶことにします。

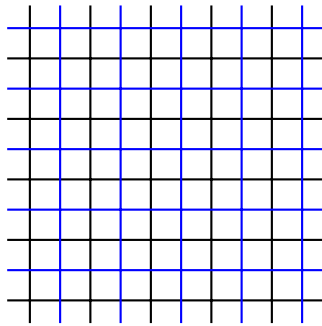


図 3.5 格子 Λ (黒) とその双対格子 $\hat{\Lambda}$ (青)。

さて、 Λ の双対格子である $\hat{\Lambda}$ (図 3.5 参照) を考えましょう。これは Λ のプラケットの中心が $\hat{\Lambda}$ のサイトになるようにとった格子です。今の場合の $\hat{\Lambda}$ のようにプラケットにスピンの自由度がのっているような格子を非アクティブ格子 (inactive lattice) と呼ぶことにします。3.3.1 項で見たとおり、(3.44) を全体でゲージ化すると、 $\hat{\Lambda}$ のサイトにスピンの自由度がのった Ising 模型と等価になります。今 $K = K_c$ を考えているので K は変わらないことに注意してください。標語的に言うなら、Kramers-Wannier 双対性はアクティブ格子と非アクティブ格子を入れ替えます。

半空間ゲージ化をするときの領域を考えるのに $\hat{\Lambda}$ の言葉で言うと便利です。 D は $\hat{\Lambda}$ のサイト、リンク、プラケットの集合で、次のような条件を満たすものとします。

- プラケット $p \in D$ なら、 p を作る 4 つのリンクの集合 ∂p は、 $\partial p \subset D$
- リンク $\ell \in D$ なら、 ℓ の両端のサイト i, j は $i, j \in D$ となります。

端的に言うなら、 D は $\hat{\Lambda}$ の見方で境界が全部含まれるような領域ということになります。

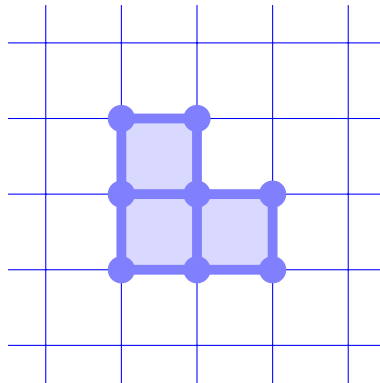


図 3.6 領域 D の取り方の例。 $\hat{\Lambda}$ の格子を青線で表しています。青丸で表したサイト、太い青線で表したリンク、青く塗っているプラケットが D の元です。

逆に Λ の見方では、境界が全部含まれない領域ということになります。後で D の中だけでゲージ化するわけですが、このときに境界にある Λ のリンクにはゲージ場を置かず、また境界にある Λ のサイトにはゲージ変換を置きません。このような境界条件を [6] では Dirichlet 境界条件と呼んでいます。後に見るように、この境界条件で半空間ゲージ化をした場合には、境界に残る欠陥がトポロジカルになります。別の境界条件でゲージ化した場合には、トポロジカルになることは保証されません。


3.5.2 半空間ゲージ化

ここでは、先に述べた条件を満たす D に対して、 D の中だけで spin flip の対称性をゲージ化する手続きを説明します。しばらくは、言葉の使い方としてサイト、リンク、プラケットなどはすべて $\hat{\Lambda}$ のものとしします。

まず、ゲージ化する前からすべてのプラケット i に自由度 $a_i = 0, 1$ がのっていて相互作用がある Ising 模型を考えていたことを思い出してください。

D の要素に関して、次のような変形をします。


1. D の中の各リンク ℓ に対して、ゲージ場 $b_\ell = 0, 1$ を置きます。そしてこのリンクの相互作用を $\exp(K(-1)^{a_i+a_j+b_\ell})$ とします。ただし、 i, j はリンクを挟んでいる 2 つのプラケットです。分配関数の計算では、和 $\sum_{b_\ell=0,1}$ をとります。

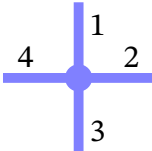
2. D 中の各プラケット  i に対してゲージ変換を置きます。ゲージ変換のパラメータを $\lambda_i = 0, 1$ とし、このプラケットに置かれている a_i とこのプラケットに接しているリンク ℓ に置かれているゲージ場は

$$a_i \rightarrow a_i + \lambda_i, \quad b_\ell \rightarrow b_\ell + \lambda_i \quad (3.45)$$

と変換します。 D の取り方から、 i のまわりの4つのリンクはすべて D の要素であるので、 b の自由度が置かれていることに注意してください。

分配関数を考えるときには、ゲージ体積で割る必要があるので、 D の要素であるプラケット i に対して因子 $\frac{1}{2}$ を割り当てます。


3. D 中の各サイト  p には、ゲージ場 b が flat でありなさいという拘束条件を置きます。このサイトにつながる4つのリンクのラベルを 1, 2, 3, 4 として



$$\Rightarrow \delta_{b_1+b_2+b_3+b_4, 0}^{\text{mod } 2} = \sum_{c_p=0,1} \frac{1}{2} (-1)^{c_p(b_1+b_2+b_3+b_4)} \quad (3.46)$$

という因子を割り当てます。 D 中のサイト p につながっている4つのリンクは、必ずしもすべてが D の元であるとな限らないので、 b が割り当てられていない場合もあります。このような場合は、 b が割り当てられていないリンクの b は 0 として拘束条件をかします。

4. (3.21) のあたりで述べた Euler 相殺項を考えます。これは多面体に関する Euler の公式を適用すると D の要素に対して上で述べた因子の他に



$$\begin{aligned} \bullet &\Rightarrow \sqrt{2} \\ | &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \square &\Rightarrow \sqrt{2} \end{aligned} \quad (3.47)$$

という因子を割り当てれば良いことが分かります。

これらをまとめて、 D で半空間ゲージ化を行った分配関数 Z_D を書いてみます。

$$\begin{aligned}
 Z_D = & \underbrace{\sum_{\{a\}}}_{\text{全体にある自由度の和}} \underbrace{\sum_{\{b\}} \sum_{\{c\}}}_{\text{D 内のみ自由度の和}} \underbrace{\prod_{\text{ブラケット} \in D} \sqrt{2} \prod_{\text{リンク} \in D} \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_{\text{サイト} \in D} \sqrt{2}}_{\text{Euler 相殺項}} \\
 & \times \underbrace{\prod_{\text{ブラケット} \in D} \frac{1}{2}}_{\text{ゲージ体積}} \underbrace{\prod_{\text{サイト} \in D} \frac{1}{2}}_{\text{拘束を補助場で表したときの } 1/2} \\
 & \times \prod_{\text{リンク} \notin D} \exp(K(-1)^{a_i+a_j}) \prod_{\text{リンク} \in D} \exp(K(-1)^{a_i+a_j+b_{ij}}) \\
 & \times \prod_{\text{サイト } p \in D} (-1)^{c_p \sum_{\ell \in p} b_\ell}. \tag{3.48}
 \end{aligned}$$

これから、この分配関数に関して

- これが、 D の境界に局在する余次元 1 の欠陥であること。
- この欠陥がトポロジカルであること。

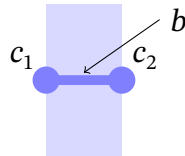
の 2 項目について詳しく見ていきます。

3.5.3 境界に局在すること

まず、境界に局在する欠陥であることを説明します。これには、3.3.1 項でやったのと同様に、 b について先に和を取ることで理解できます。

まず、ゲージ固定として D 内のブラケット i に関して $a_i = 0$ というゲージをとります。このゲージ固定により、(3.48) 中のゲージ体積での割り算はすべて相殺します。

次に b の和をとることを考えます。 D 内のリンクには 2 種類あって、リンクの両側のブラケットが両方 D 内にある場合と、片方だけが D 内にある場合です。前者の場合には、3.3.1 でやったのと全く同じ計算になります。次のように、考えているリンクの変数を b 、リンクの両端のサイトの自由度を c_1, c_2 とします。ブラケットにある a の自由度はすでにゲージ固定で 0 にしていることに注意してください。



$$(3.49)$$

この b を含む部分の和は 3.3.1 項と同様に計算して

$$\sum_{b=0,1} e^{K(-1)^b} (-1)^{b(c_1+c_2)} = \sqrt{2} e^{K(-1)^{c_1+c_2}} \quad (3.50)$$

となります。この計算では、今は $K = K_c$ の場合を考えているので $\tilde{K} = K$, $\sinh 2K = 1$ であることに注意してください。(3.50) の右辺の $\sqrt{2}$ は、(3.42) の Euler 相殺項のリンクのところとちょうど相殺します。(3.50) の右辺の残りの部分は、Ising 模型の Boltzmann ウェイトです。つまり、 D 内のバルクでは $\hat{\Lambda}$ をアクティブ格子とする、 $K = K_c$ の Ising 模型になっています。

次に、リンクの両側のプラケットのうち、片方のみ D の内部にある場合を考えます。 D の外にあるプラケットにはゲージ対称性は無いので a の自由度が残っていることに注意します。次のように自由度の名前をつけます。



$$(3.51)$$

この部分の b の和は、先程と同様に

$$\sum_{b=0,1} e^{K(-1)^b} (-1)^{b(c_1+c_2)} = \sqrt{2} e^{K(-1)^{c_1+c_2}} (-1)^{ac_1} (-1)^{ac_2} \quad (3.52)$$

となります。先ほどと同様に、右辺の $\sqrt{2}$ は Euler 相殺項のリンクの部分とキャンセルし、次の因子は Ising 模型の Boltzmann ウェイトになります。それ以外に、 D の境界上で $(-1)^{ac_1} (-1)^{ac_2}$ という因子が残ります。これが本質的に欠陥に与えられるウェイトです。これをまとめて表すために、アクティブサイト (Ising 模型の自由度が割り振られているアクティブ格子のサイト) を \bullet で表すことにします。図 3.7 を見てください。 D の外では、 Λ のサイトがアクティブで、その自由度は a 、 D の中では、 $\hat{\Lambda}$ のサイトがアクティブで、その自由度を c という記号で表してきました。境界では、それらのサイトが隣り合っています。(3.52) の結果は、このように隣り合っているサイトのペアに次のようなウェイトを割り振ればよいということです。



$$= (-1)^{ac} \quad (3.53)$$

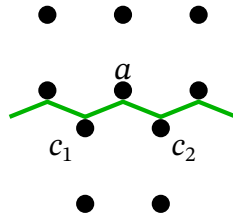


図 3.7 b の和を取った後の KW 欠陥を説明する図。緑の線を境界として、下が D の内側、上が D の外側になる。黒い点は Ising 模型の自由度が割り当てられたアクティブサイト。アクティブ格子は緑の線を境に互いに双対になっている。

さて、残り考えないといけないのは、 D 内の各サイトに割り振られた $\sqrt{2}$ と D 内の各プラケットに割り振られた $1/\sqrt{2}$ です。境界を気にしなければ、サイトとプラケットは対応させることができるので、このウェイトも境界に押し付けることができます。

最後のところは少し誤魔化しています。本当にこのウェイトがちゃんと境界に押し付けられることを示すには、どのように押し付けるかをちゃんと決める必要があります。これの易しいやり方を私は知りません。実際にちゃんとウェイトを決めることができることが、[8] で示されています。

ここまでで、半空間ゲージ化を行うと、その境界に余次元 1 の欠陥が現れることが分かりました。この欠陥を **KW 欠陥** と呼ぶことにします。

3.5.4 トポロジカル性

次に KW 欠陥がトポロジカルであることを示します。

このために D を選んで、その要素のサイト、リンク、プラケットをそれぞれ●、■、□ で表します。これまでやってきたように、 D で半空間ゲージ化をやった上で、他にも任意の演算子を挿入し、すべての自由度に関して和をとったものに関して成り立つ恒等式（演算子恒等式）を絵で表すことにします。

次の (ア)、(イ) の演算子恒等式が成り立ちます。

(ア)境界にあるリンク ℓ とそれを含むプラケット p に関して、 p のゲージ変換で $b_\ell = 0$ にします。このゲージ固定で p に割り振られた $1/(\text{ゲージ体積})$ がキャンセルします。また Euler 相殺項は p と ℓ で相殺します。結果として、 D から

p と ℓ を除いたもの D' で半空間ゲージ化したものと同じになります。

(3.54)

(イ)境界にあるサイト i とリンク ℓ で次を満たすものを考える。

(a) i につながる4つのリンクで D に属するのは ℓ のみ。

(b) ℓ の両側にあるプラケットは D に属さない。

このとき、サイト i の拘束条件から $b_\ell = 0$ のみが寄与します。また Euler 相殺項は i と ℓ で相殺します。結果として D から i と ℓ を除いた D' で半空間ゲージ化したものと同じになります。

(3.55)

これは Ward-Takahashi 恒等式に当たるものの一種です。

この (ア) と (イ) の恒等式を用いると、値を変えることなく D の境界のトポロジを保ったまま、格子1つ分ずつ変形していくことができます。これは、KW 欠陥がトポロジカルであることに他なりません。

この Ward-Takahashi 恒等式の応用例として可縮な円周のトポロジーの KW 欠陥の期待値を求めてみましょう。

(3.56)

最初の等号は、(ア)、(イ) を繰り返すことで得られます。次の等号は、● に割り当てられた Euler 相殺項です。拘束条件の方は自動的に満たされます。

対称性欠陥の場合、2章で見たように、可縮な円周の期待値は1であることが分

かりますから⁵⁾可縮な円周の期待値が $\sqrt{2}$ である KW 欠陥は対称性欠陥ではないということになります。このことから **KW 欠陥は非可逆対称性の欠陥の例であることが分かります。**

3.6 対称性の構造

ここでは、対称性の構造について見ていきます。2次元 Ising 模型の KW 欠陥を含むような非可逆対称性を表すのに便利な数学的構造はフュージョン圏と呼ばれています。フュージョン圏の物理学者向けの分かりやすい解説は [3] にあります。

ここでは、数学的な説明というよりは、場の理論の演算子関係式、あるいは Ward-Takahashi 恒等式として説明したいと思います。また、有限群の対称性もフュージョン圏で表されるので、その場合にどうなるかも説明します。フュージョン圏の主な構造は次の3つです。

- 足し算：相関関数にした後で足し算をします。
- フュージョン則：有限群の対称性の場合には、掛け算の構造になります。
- F 記号：有限群の対称性の場合には、アノマリーの構造になります。

これらについて、有限群の場合と Ising 模型の対称性 (**Ising 圏**と呼ぶことにします) を例にして説明します。

大事なことは、例えば Ising 模型で Ising 圏の対称性の構造が分かったとします。このとき、Ising 圏の対称性の構造のみを用いて導かれた帰結は、**Ising 圏の対称性を持つすべての理論に適用可能**だということです。これは通常の対称性と同様です。

3.6.1 足し算

2次元の次元1のトポロジカル欠陥の種類を圏論の言葉を借りて「対象」(object)と呼ぶことにします。対象と、欠陥が入っている幾何学的な線を考えると具体的なトポロジカル欠陥になります。対象を表す記号を a と書き、2次元時空内の連結な端のない線を C として欠陥を $L_a(C)$ と書くことにします。例えば、群の対称性欠陥の場合、群の元は対象です。

実は、群の対称性の場合でも、群の元だけが対象というわけではありません。

5) 厳密にはアノマリーがあるような対称性の場合、1にならないこともあります。しかし、その場合でも絶対値は1になります。

(群の掛け算以外に) 群の形式的な足し算を考えることができます。

$$L_{a+b}(C) := L_a(C) + L_b(C) \quad (3.57)$$

と定義します (1.3 節で説明した演算子関係式の意味です)。

ここで、注意深い人は次の点が心配になるかもしれません。2.1 節の最初で説明したように、そもそも欠陥は局所的でなければなりません。この欠陥 $L_a(C) + L_b(C)$ は局所的でしょうか? 少なくとも局所性は自明ではありません。また、足し算を考えましたが、引き算や複素数倍はどうでしょうか?

実は足し算は次のように考えると局所的であることが分かります。まず、 C 上に系とは結合していないスカラー場の自由度 $n = 1, 2$ を置きます。そして C に沿った微分 $\partial_i n$ が $\partial_i n = 0$ とします。この拘束条件は局所的であることに注意してください。 C は連結としているので n の取りうる値は C 全体で 1 または C 全体で 2 です。したがって、この欠陥を挿入した分配関数は、挿入しないものの 2 倍になります。この欠陥は自明な欠陥を 2 つ足したものと思えることができます。

一般の欠陥の足し算を考える場合には、次のように考えます。上と同様に C 上に $n = 1, 2$ を導入して $\partial_i n = 0$ の拘束条件を考えます。今度はこの n と系を結合させます。 $n = 1$ の部分では、欠陥 L_a となり、 $n = 2$ の場合はとします。 L_a も L_b も局所的な欠陥で、 n も局所場ですからこれは局所的な結合です。したがって、こうして作った欠陥は局所的です。この欠陥の対象を $a + b$ と定義します。分配関数を考えると (3.57) の定義と同じものになります。

上の作り方からは引き算は考えられないことに注意してください。非負の整数以外の複素数倍も局所的にすることはできません。(3.56) で可縮な円周の KW 欠陥の期待値を考えましたが、これに勝手に $1/\sqrt{2}$ をかけて期待値を 1 にすることは、局所性を破ります。したがって、 $\sqrt{2}$ には意味があります。

少し言葉について説明します。他の対象の足し算で書けない対象を **単純対象** (simple object) と言います。単純対象が有限個しかない場合、このフュージョン圏は **有限生成** (finitely generated) であると言います。定義から有限生成のフュージョン圏の対象はいくつかの単純対象の和で書けます。有限群の対称性の場合、単純対象は群の元です。Ising 圏の単純対象は自明対象 1、spin flip η 、KW 欠陥 \mathcal{N} の 3 つです。それぞれ \vdots , $|$, $|$ で表すことにします。

以降、2次元では有限生成のフュージョン圏のみ考えます。

3.6.2 フュージョン則

2次元空間内で、2つの1次元のトポロジカル欠陥を間になにも挟まずに並べておいたものはおいたものは、また1次元のトポロジカル欠陥になります。このような操作は**フュージョン** (fusion) と呼ばれ、このルールは**フュージョン則** (fusion rule) とよばれます。有限生成のフュージョン圏の場合には、単純対象2つのフュージョンがどうなるかを定めれば良いことになります。任意の対象は、いくつかの単純対象の和で書かれますから、フュージョン則は

$$\left| \begin{array}{c} | \\ a \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} | \\ b \end{array} \right| = \sum_{c: \text{単純対象}} N_{ab}^c \left| \begin{array}{c} | \\ c \end{array} \right| \quad (3.58)$$

のように表すことができます。ここで、 N_{ab}^c はフュージョン係数 (fusion coefficient) と呼ばれる非負の整数です。この式を単に

$$a \times b = \sum_c N_{ab}^c c \quad (3.59)$$

とも表すことにします。

例えば、有限群の対称性の場合、単純対象は群の元で、フュージョン則は a, b を群の元として

$$\left| \begin{array}{c} | \\ a \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} | \\ b \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} | \\ ab \end{array} \right| \quad (3.60)$$

となります。

Ising 圏のフュージョン則について説明します。まず 1 は自明な欠陥ですから、他の元とフュージョンをとっても、その元を変化させません。また $1, \eta$ は \mathbb{Z}_2 の群をなしますから

$$\eta \times \eta = 1 \quad (3.61)$$

になります。あるいは絵で

$$\left| \begin{array}{c} | \\ \eta \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} | \\ \eta \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} | \\ 1 \end{array} \right| \quad (3.62)$$

と書きます。KW 欠陥を含むフュージョン則には非可逆対称性であることが効いています。それは2種類あります。一つは

$$\mathcal{N} \times \eta = \eta \times \mathcal{N} = \mathcal{N}, \quad (\text{絵では}) \quad \left| \begin{array}{c} | \\ \mathcal{N} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} | \\ \eta \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} | \\ \mathcal{N} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} | \\ \eta \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} | \\ \mathcal{N} \end{array} \right| \quad (3.63)$$

です。もう一つは

$$\mathcal{N} \times \mathcal{N} = 1 + \eta, \quad (\text{絵では}) \quad \left| \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \right. = \dots + \left| \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \right. \quad (3.64)$$

です。これらは非自明ですので導出を半空間ゲージ化の立場から説明します。

まず、 $\mathcal{N} \times \eta$ からです。 η はゲージ化された Ising の見方からは、 b の Wilson ループ（横切るリンクの $(-1)^b$ を挿入する欠陥）になります。このことを強調するために、少し色を変えて、下に W の文字を書いて表すことにします。各サイトに関しての拘束があるので、変形することができることに注意すると

The diagram shows two vertical lines, one green and one red, followed by an equals sign. To the right is a 3x3 grid of blue squares with blue dots at the intersections. A vertical orange line, labeled 'W' below it, passes through the center of the grid. This is followed by another equals sign and a second 3x3 grid of blue squares with blue dots at the intersections, also with a vertical orange line labeled 'W' passing through the center.

という恒等式を得ます。右辺では、 W の横切るリンクには b の自由度は割り当てられていません。言い換えると $W = 1$ に置き換えることができます。したがって

The diagram shows two vertical lines, one green and one red, followed by an equals sign. To the right is a 3x3 grid of blue squares with blue dots at the intersections. A vertical orange line passes through the center of the grid. This is followed by another equals sign and a single vertical green line.

という fusion rule が得られます。

同じ関係を別の見方で導出してみましょう。ゲージ化されていない Ising 模型の見方では、 η は $\hat{\Lambda}$ のリンクをつないでいってできるループ上で定義されていて、そのリンク上で背景ゲージ場 $B = 1$ を入れるという欠陥です。これを強調するために、先ほどとは少し色を変えて、下に B をつけて書くことにします。これがトポロ

ジカルであることを踏まえると

Diagram (3.67) illustrates the fusion of two vertical lines (red and green) into a grid structure. The left side shows two vertical lines, one red and one green, followed by an equals sign. The right side shows a grid of blue lines with blue dots at the intersections. A vertical purple line labeled B is positioned to the left of the grid. The grid is composed of three horizontal and three vertical blue lines. The purple line B is on the far left. The grid is followed by another equals sign and then the same grid structure with the purple line B on the far left. The label B is also placed below the purple line on the right side.

という恒等式を得ます。ここで、右辺では、背景ゲージ場 B がある場所は動的なゲージ場 b がある場所に重なっていることに注目します。このことから、動的なゲージ場の再定義 $b' = b + B$ によって、背景ゲージ場を吸収し、消してしまふことができます。したがって

Diagram (3.68) illustrates the fusion of two vertical lines (red and green) into a single vertical line (green) after a grid. The left side shows two vertical lines, one red and one green, followed by an equals sign. The middle part shows a grid of blue lines with blue dots at the intersections. The right side shows a single vertical green line, followed by another equals sign. The label B is not present in this diagram.

という fusion rule が得られます。

次に (3.64) の導出を説明します。(3.64) の左辺は 2 つの \mathcal{N} の間で半空間ゲージ化したとすることができます。さらに 3.5.4 項の (ア)、(イ) の恒等式が成り立つことも考慮すると

Diagram (3.69) illustrates the fusion of two vertical lines (green) into a single vertical line (blue) after a grid. The left side shows two vertical lines, both green, followed by an equals sign. The middle part shows a grid of blue lines with blue dots at the intersections. The right side shows a single vertical blue line, followed by another equals sign. The label B is not present in this diagram.

という関係式を得ます。右辺に注目します。それぞれのサイトでの拘束条件を考えると、すべてのリンクに割り当てられた b の値は同じでなければなりません。ですから、 b についての和はすべて $b = 0$ とすべて $b = 1$ になります。これらはそれぞれ

れ、自明な欠陥と η 欠陥と同じになります。また、 D に含まれるサイトの数とリンクの数は同じですから、Euler 相殺項は消えます。したがって

$$|| = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} = \dots + | \quad (3.70)$$

というフュージョン則を得ます。

Ising 圏のフュージョン則をまとめておきます。

$1, \eta, \mathcal{N}$ の 3 種類の単純対象があり、それらの中に次のフュージョン則がある。

$$1 \times a = a \times 1 = a, \text{ for } \forall a, \quad (3.71)$$

$$\eta \times \eta = 1, \quad (3.72)$$

$$\mathcal{N} \times \eta = \eta \times \mathcal{N} = \mathcal{N}, \quad (3.73)$$

$$\mathcal{N} \times \mathcal{N} = 1 + \eta. \quad (3.74)$$

3.6.3 F 記号

フュージョン圏の中で、もう一つ重要な構造は F 記号 (F symbol) です。F 記号は文脈によって結合子 (associator) や交差関係式 (crossing relation) などとも呼ばれることがあります。ここでは、F 記号を演算子恒等式として説明します⁶⁾。

F 記号について説明するために、まずジャンクション (junction) について説明します。 a, b, c, \dots を単純対象として、 $N_{ab}^c \neq 0$ のときに次のような三叉路の欠陥でト

6) 数学の文脈では、対象に対して \mathbb{C} ベクトル空間が割り当てられ、結合子はそれらの間の線形写像として定義されます。この講義では、これらのベクトル空間の基底を選んで、線形写像を行列で表したときの行列成分を F 記号と呼んでいます。

ポロジカルなものが $N_{ab^c} \neq 0$ 種類存在して、トポロジカルになります。

$$\begin{array}{c}
 c \\
 | \\
 \diagup \quad \diagdown \\
 a \qquad b
 \end{array}
 \tag{3.75}$$

例えば、群の対称性の場合には、

$$\begin{array}{c}
 ab \\
 | \\
 \diagup \quad \diagdown \\
 a \qquad b
 \end{array}
 \tag{3.76}$$

というものが存在して、トポロジカルです。この群の対称性のジャンクションは 2.3.3 項でも出てきました。このジャンクションが、どのように系の自由度に結合子しているか等は理論の「対称性」だけで決まることではなく、理論の詳細によることです。

一方で、このジャンクションの組み換えに関する次の演算子関係式は、系の詳細によらず、対称性だけで決まります。

$$\begin{array}{c}
 e \\
 | \\
 d \\
 \diagup \quad \diagdown \\
 a \qquad b \qquad c
 \end{array}
 = \sum_f (F_{abc}^e)_{df}
 \begin{array}{c}
 e \\
 | \\
 f \\
 \diagup \quad \diagdown \\
 a \qquad b \qquad c
 \end{array}
 \tag{3.77}$$

ここで、 a, b, c, d, e, f は単純対象のラベルです。 $(F_{abc}^e)_{df}$ は複素数で **F 記号** (F-symbol) と呼ばれます。また、関係式 (3.77) は**交差関係式** (crossing relation) と呼ばれます。

F 記号は、移動の仕方の無矛盾性から来る **5 角形恒等式** (pentagon identity) を満たす必要があります。これについて簡単に説明します。まず、(3.77) を何回も適用して得られる、次のような恒等式を考えます (ラベル等、すべて省略します)。

$$\begin{array}{c}
 | \\
 \diagup \quad \diagdown \\
 \diagup \quad \diagdown \\
 \diagup \quad \diagdown
 \end{array}
 = F
 \begin{array}{c}
 | \\
 \diagup \quad \diagdown \\
 \diagup \quad \diagdown \\
 \diagup \quad \diagdown
 \end{array}
 = FF
 \begin{array}{c}
 | \\
 \diagup \quad \diagdown \\
 \diagup \quad \diagdown \\
 \diagup \quad \diagdown
 \end{array}
 \tag{3.78}$$

一方、左辺に関して、(3.77)を別の方法で何回も適用して

$$\begin{array}{c} | \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} = F \begin{array}{c} | \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} = FF \begin{array}{c} | \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} = FFF \begin{array}{c} | \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \quad (3.79)$$

という関係式も得ます。(3.78)の右辺と(3.79)の右辺は等しくなければなりませんから

$$FF = FFF \quad (3.80)$$

という形の関係式が成り立ちます。これを五角形関係式と呼んでいます。

少し例を述べます。有限群の対称性でアノマリーが無い場合、非自明な ($0 \neq 0$ でない) 交差関係式は

$$\begin{array}{c} abc \\ | \\ ab \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \quad b \quad c \end{array} = \begin{array}{c} abc \\ | \\ bc \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \quad b \quad c \end{array} \quad (3.81)$$

となります。2.3.3 項の議論を思い出してもらおうと、この恒等式はゲージ不変性の一部でした。この恒等式から、ジャンクションを含むトポロジカル欠陥の配位を考えたとき、分配関数は、そのネットワークの取り方によらないということが出来ます。すべてのトポロジカル欠陥の配位について和を取ることがゲージ化でしたから、この関係式を満たせばゲージ化できることとなります。

アノマリーについても少し触れておきます。有限群の対称性の交差関係式は、アノマリーがある場合も含めて

$$\begin{array}{c} abc \\ | \\ ab \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \quad b \quad c \end{array} = \mathcal{A}(a, b, c) \begin{array}{c} abc \\ | \\ bc \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \quad b \quad c \end{array} \quad (3.82)$$

と書けます。ただし、 $\mathcal{A}(a, b, c)$ は0でない複素数で、アノマリーを表します。これに関して、次のようなことに注意する必要があります。

- $\mathcal{A}(a, b, c)$ は五角形関係式を満たす必要があります。

$$\mathcal{A}(ab, c, d)\mathcal{A}(a, b, cd) = \mathcal{A}(a, b, c)\mathcal{A}(a, bc, d)\mathcal{A}(b, c, d) \quad (3.83)$$

これは教科書にのっているアノマリーの説明の Wess-Zumino 無矛盾条件におおよそ対応します。

- ジャンクションに 0 でない複素数 $C(a, b)$ をかけて再定義することができます。

$$A'(a, b, c) = C(a, b)C(ab, c)C(a, bc)^{-1}C(b, c)^{-1}A(a, b, c) \quad (3.84)$$

こうすると $A(a, b, c)$ は変化しますが、この操作で結びついているアノマリーは同じアノマリーとみなします。例えば、この操作で $A(a, b, c) = 1$ とできたとすると、アノマリーは無いことになります。これは教科書にのっているアノマリーの説明の局所相殺項を足すことにおおよそ対応します。なお A が 5 角形恒等式 (3.83) を満たすなら、 A' も満たすことに注意してください。

離散群を G 、また、 $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とし、掛け算でアーベル群とみなします。(3.83) を満たす $A : G \times G \times G \rightarrow \mathbb{C}^\times$ 全体の集合を (3.84) でつながるものを同一視した集合を $H^3(BG, \mathbb{C}^\times)$ と書いて、3 次の群コホモロジーと呼びます。言い換えると 2 次元の離散群 G の対称性のアノマリーは $H^3(BG, \mathbb{C}^\times)$ で分類できます⁷⁾。

別の例として、Ising 圏の F 記号について説明します。前と同様に Ising 圏の単純対象の 1、spin flip η 、KW 欠陥 \mathcal{N} をそれぞれ $\begin{array}{c} \vdots \\ | \\ | \end{array}$ 、 $\begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array}$ 、 $\begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array}$ で表すことにします。これらは反対向きにしても同じものなので、ここからは向きを気にしないで絵を書くことにします。また、自明な欠陥はしばしば書くのを省略します。

ジャンクションのうち、自明な欠陥を含むものは、他の 2 つの線が同じもの場合に 1 種類存在します。自明な欠陥を含まないものは、

$$\begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \quad (3.85)$$

とその足を入れ替えたものになります。

まず、 $\begin{array}{c} \vdots \\ | \\ | \end{array}$ と $\begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array}$ は、先ほど述べたアノマリーの無い \mathbb{Z}_2 の交差関係式を満たします。新しいのは $\begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array}$ を含む交差関係式です。足の入れ替えなどを除くと、非自明なのは次の 4 種類です。

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = - \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}, \quad (3.86)$$

7) 実は、いつでも局所相殺項で $|A(a, b, c)| = 1$ とすることができるので、 $A : G \times G \times G \rightarrow U(1)$ に限って考えて良いです。したがって、2 次元のアノマリーを分類するものは $H^3(BG, U(1))$ と書いてもよく、多くの文献ではこちらが書かれています。

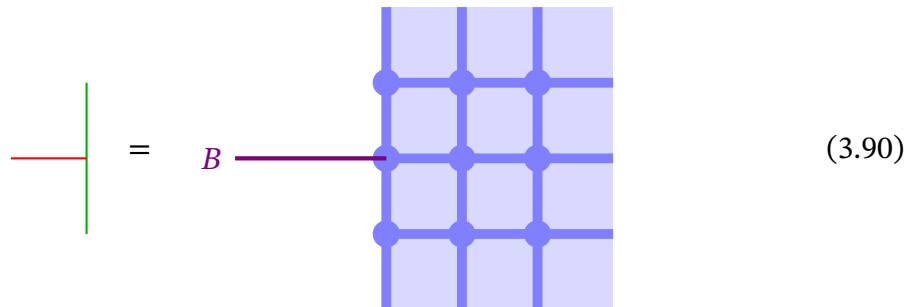
$$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}, \quad (3.87)$$

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right), \quad (3.88)$$

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} - \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right). \quad (3.89)$$

これらについて、半空間ゲージ化の描像から説明していきます。

まずは、半空間ゲージ化の立場からジャンクションがどのように記述できるかと、それがトポロジカルであることを見ます。1つめのジャンクションの見方は、 η をゲージ化していない方において、背景ゲージ場として記述する方法です。

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = B \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \quad (3.90)$$


これを強調するために、背景ゲージ場の色を変えて、 B というラベルをつけて表しています。この線の上でのみ、背景ゲージ場の値 $B = 1$ にしています。端がありますが、これは D の中に続いていたとしても動的なゲージ場に吸収してしまうことができるために、ここで止めることができます。ただし、終わっているサイトでの拘束条件は、背景ゲージ場も含めて flat であるというものになっていることに注意し

ます。トポロジカルであることは、次の恒等式で説明できます。

1つめの等号は、背景ゲージ場を動的なゲージ場に吸収できることから、 D に含まれるリンクで伸ばしても変わらないことを用いました。2つめの等号は、ゲージ変換で、これは η の欠陥がトポロジカルであることと同じ議論です。このようにしてジャンクションの位置を連続的に変えることができること、つまりトポロジカルであることが示せました。

次に、もう一つ別の方向から η を見てみます。 D の中では、 η はWilsonラインで表されます。これを強調するために、少し色を変えて、 W というラベルを付けて表します。

左端は突き出ている、 $\hat{\Lambda}$ のプラケットの中心で終わっています。これについて少しコメントします。まず、端があるのでゲージ不変かどうか気になります。これは D の外側のプラケットにはゲージ変換が割り当てられていないので、端が D の外にあるかぎり、ゲージ不変になります。このジャンクションがトポロジカルであることは、次のように示せます。

(3.93)

1つめの等号は、ゲージ場の無いところでの変形ですので、Wilson ラインの値は変わりません。2つめの等号は、サイトでの拘束条件から成り立ちます。こうしてジャンクションがトポロジカルであることが分かりました。

準備が整ったので、まず関係式(3.86)の導出をします。まず、

(3.94)

のように半空間ゲージ化の立場から実現できます。この右辺を式(3.93)と同様の変形をすると、次のようになります。

(3.95)

ここで、1つめの等号は、左辺に比べて Wilson ラインが背景ゲージ場 $B = 1$ の線を一回余分に横切っているので (-1) が掛かります。次の等号は式(3.93)と同様にサ

イトでの拘束条件から従います。最後の形は、簡略化して書くと

$$- B \text{ (grid with loop } W) = - \text{ (simplified diagram)} \quad (3.96)$$

となります。最初と最後を見ると (3.86) になっています。逆に B の線の方を (3.91) と同様に变形しても導出できます。こちらは練習問題に残しておきます。

次に関係式 (3.88) を導出してみます。左辺を半空間ゲージ化の見方で表すと

$$\text{Green X} = \text{Blue grid with 2 vertical links} = \text{Blue grid with 2 vertical links and link } l \quad (3.97)$$

となります。2つめの等号は 3.5.4 項の (ア) の恒等式を用いました。この右辺のリンク l に関する因子や和を陽に書き下してみます。これは、リンク変数 $b_l = 0, 1$ の和と、Euler 相殺項の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ です。

$$\text{Blue grid with 2 vertical links} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\text{Blue grid with 2 vertical links} + \text{Blue grid with 2 vertical links and link } l \right) \quad (3.98)$$

この式の右辺は (3.88) の右辺になります。したがって、(3.88) が導出できました。

他の関係式 (3.87), (3.89) も同様に導出できます。これらは練習問題に残しておきます。

3.6.4 他の Ward-Takahashi 恒等式

前項までは、トポロジカル欠陥のみの変形に関する Ward-Takahashi 恒等式を導出しました。ここでは、その他の演算子が絡む Ward-Takahashi 恒等式をいくつか見ていきます。

まず、KW 欠陥とスピン演算子に関して、次の恒等式が成り立ちます。

$$\text{Green circle with } x_\sigma = 0 \quad (3.99)$$

これは、まずフュージョン則 (3.63) を用い、次に spin flip に関する Ward-Takahashi 恒等式を用いることで示される、次の恒等式が成り立つことから分かります。

$$\textcircled{x_\sigma} = \textcircled{\textcircled{x_\sigma}} = - \textcircled{x_\sigma} \quad (3.100)$$

次に、KW 欠陥がスピン演算子を横切るときに関する次の恒等式が成り立つこのを説明します

$$\left| \textcircled{x_\sigma} \right. = \left| \textcircled{x_\mu} \right. \quad (3.101)$$

この式の左辺を半空間ゲージ化の見方で次のように表せます。

$$\left| \textcircled{x_\sigma} \right. = \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \\ \times \\ \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \end{array} \right. \quad (3.102)$$

ここで右辺の×の位置にスピン演算子が入っています。このサイトでは、入ってくる4つのリンクの b の和が (0ではなく) 1 という拘束条件がかかれているというのが、スピン演算子でした。これを次のように変形します。

$$\left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \\ \times \\ \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \\ \times_\ell \\ \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \\ \times \\ \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \end{array} \right. \quad (3.103)$$

最初の等号は 3.5.4 項の (ア)、(イ) の変形を次々に適用して得られます。次に×のサイトでの拘束条件を考えるとこれにつながっているリンク ℓ の b_ℓ は、1しか取りません。つまり、これは spin flip の欠陥が入っているのと同じです。Euler 相殺項も考慮して、2つめの等号が得られます。右辺は、(3.101) の右辺と同じです。

最後に以前に導いた次の恒等式をもう一度書いておきます。

$$\bigcirc = \sqrt{2}. \quad (3.104)$$

この量は KW 欠陥の**量子次元** (quantum dimension) と呼ばれます。これは、交差関係式 (3.88), (3.89) を用いることでも導出できます。

3.7 応用

さて、ここまで非可逆対称性の例として $K = K_c$ の Ising 模型にある Ising 圏について見てきました。繰り返しになりますが、対称性の良いところは、対称性があるということだけから、理論の詳細を知ることなしに情報が得られるということです。ここでは、Ising 圏の対称性がある理論に関して成り立つ次の定理を示します [4]。

定理

Ising 圏の対称性を持つ理論は 0 温度で「自明なギャップあり相」ではない。

ここで**自明なギャップあり相** (trivially gapped phase) とは、ギャップがあって、任意の空間のトポロジーでこの場の理論を考えたときに真空（基底状態）が唯一であることです。2次元の場合は空間が S^1 の場合を考えれば十分です。

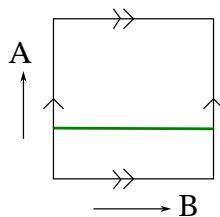


図 3.8 トーラスに KW 欠陥が入った系。左辺と右辺、上辺と下辺がそれぞれ同一視されている。KW 欠陥を緑色で表している。

定理を証明します。背理法を用います。ギャップありで真空が唯一であると仮定します。必要なら宇宙定数を付け加えて、真空のエネルギーを 0 とします。ギャップに比べて十分大きいトーラスを考えて、図 3.8 のように KW 欠陥が入った分配関数を考えます。まず図の A の方向を Euclid 化時間と考えると、演算子形式で考えます。このとき KW 欠陥は Hilbert 空間に作用する演算子となるので、この演算子を

$\widehat{\mathcal{N}}$ と書きます。真空を $|0\rangle$ で表します。温度はギャップに比べて十分小さいので、分配関数に寄与するのは真空のみです。したがって分配関数は

$$Z = \text{Tr} \widehat{\mathcal{N}} e^{-\beta \widehat{H}} = \langle 0 | \widehat{\mathcal{N}} | 0 \rangle = \sqrt{2} \quad (3.105)$$

となります。ここで

$$\widehat{\mathcal{N}} | 0 \rangle = \sqrt{2} | 0 \rangle \quad (3.106)$$

を用いました。これは、図 3.9 のように考えると理解できます。

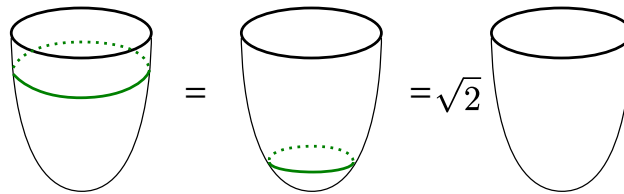


図 3.9 真空に KW 欠陥の演算子がどう作用するかを表した図。半球のトポロジーを持ち、十分大きな Euclid 化時空での経路積分を考えている。上の線は境界で状態を表しているが、十分大きいので、真空のみがのこる。左辺では、真空に KW 欠陥が作用した状態になっている。ギャップありで真空が唯一なので、真空の定数倍になる。トポロジカルなので変形して、下の方に持ってくることで量子次元で置き換えることができるので、この定数は $\sqrt{2}$ であることが分かる。

次に図 3.8 の分配関数を B の方を Euclid 時間と思って演算子形式で考えます。今度は空間内の 1 点にトポロジカル欠陥があるような系の十分低い温度での分配関数になります。この系の Hamiltonian を H_B 、エネルギー 0 の状態の Hilbert 空間を V とすると

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H_B} = \dim V \quad (3.107)$$

となります。つまり Z は非負の整数になりますから、これは (3.105) に矛盾します。

■
Ising 圏の場合、 \mathbb{Z}_2 の対称性を含むので、もしかしたら、この \mathbb{Z}_2 の対称性が本質的な役割を果たして縮退していると考えられるかもしれません。ですので、別の非可逆対称性で、群の対称性は一切含んでいないものを紹介します。これは Fibonacci 圏と呼ばれるもので、その単純対象は $1, F$ の 2 種類のみです。フュージョン則は

$$F \times F = 1 + F \quad (3.108)$$

となります。Fibonacci 圏の対称性があるとき、上と同じ議論をしてみると、 $\hat{F}^2 = 1 + \hat{F}$ の関係が成り立ちますから、 \hat{F} の固有値は $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ となり、やはり非負の整数ではないので、自明にギャップあり相でないことが分かります。これは、従来の対称性が全く無いのに真空の縮退があるという結果を表していて、非可逆対称性が本質的に重要な役割を果たしています。具体例の一つは Zamolodchikov [12] によって調べられたもので、tricritical Ising CFT を relevant 変形したものです。これには Fibonacci 圏の対称性は残っていますが、ギャップがある系です。[12] では可積分性を用いて理論を解くことにより、真空が縮退していることが分かったのですが、[4] では、非可逆対称性の議論だけで、真空が縮退しなければならないことが説明できました。

3.8 ゼロ温度での相構造*

相構造に関して用語がいくつか出てくるので、説明します。考えている場の理論を有限体積の空間（時空ではない）の上で考えます。この空間の体積 V は理論にあるスケールよりも十分大きく、曲率は十分小さいとします。このとき、Hamiltonian \hat{H} が決まります。 \hat{H} のスペクトルの基底状態付近の定性的な性質によって、いくつかの言葉を定義します。

まず、 \hat{H} は**離散スペクトルを持つことを仮定します**。つまり、 $\forall \Lambda \in \mathbb{R}$ に対して Λ より小さい固有値は有限個で、それぞれの縮退度も有限個です。これは通常考えられるような健全な場の理論で成り立つと信じられています。例えば、これが成り立たないとすると、あるエネルギー以下の状態が無限個あることになり、有限温度の分配関数は定義されないことになります⁸⁾。

まず、大きく分けてギャップありとギャップなしの分類があります。ギャップなし相は次のようなものです。

8) 離散スペクトルを持つことは有限温度の分配関数が存在することの必要条件であって、十分条件ではありません。

ギャップなし相

空間の計量をスケール倍を除いて固定します。 $\forall m > 0, \forall N \in \mathbb{Z}$ に対して $\exists V_0$ が存在し、体積 V が、 $V > V_0$ を満たすとき、エネルギー固有値 E が $E - E_0 < 0$ を満たす状態数が N 個以上ある。ただし、 E_0 は基底状態のエネルギーである。

少し説明します。一般的に体積を大きくしていくと状態間隔は詰まっていきます。基底状態付近を見たときに体積を大きくするといくらでも密になるというのがギャップなし相です。粒子描像があるような場の理論の場合は質量の無い粒子がある場合がギャップなし、すべての粒子に質量がある場合がギャップありです。

ギャップありの場合をさらに分類します。ギャップありということは、体積を大きくしたときに、エネルギーがいくらでも基底状態に近づく状態の個数が有限個ということになります。この有限個の状態を「真空」と呼ぶことにします。この言葉を用いて自明なギャップあり相を定義します。

自明なギャップあり相

ギャップあり相であって、任意の空間のトポロジーで真空が唯一である。

ギャップありだが自明でないものは、空間のトポロジーによって真空が複数個あるものです。例えば、離散対称性が自発的に破れた相はこれにあたります。また「トポロジカル秩序相」と呼ばれるものもこれにあたります。

少し余談ですが、自明なギャップあり相はさらに分類できて、対称性に守られたトポロジカル相 (Symmetry Protected Topological Phase)(SPT 相) と本当に自明な相⁹⁾ に分類することもできそうです。これは Hamiltonian のスペクトルだけからは区別がつかず、対称性に対する背景ゲージ場を導入したときの分配関数の位相によって区別できます。

9) 正しい言葉使いかどうかよくわかりません。

第 4 章 高次形式対称性

4.1 高次形式対称性の定義

4.2 格子ゲージ理論の中心対称性

4.3 背景ゲージ場その 1

4.4 背景ゲージ場その 2 : 単体コホモロジー

4.5 自発的対称性の破れ

第 5 章 高次元の非可逆対称性

5.1 高次形式対称性のゲージ化

5.2 4次元 \mathbb{Z}_2 格子ゲージ理論

5.3 Maxwell 理論

参考文献

- [1] S.-H. Shao, “What’s Done Cannot Be Undone: TASI Lectures on Non-Invertible Symmetry,” [arXiv:2308.00747 \[hep-th\]](#).
- [2] D. Gaiotto, A. Kapustin, N. Seiberg, and B. Willett, “Generalized Global Symmetries,” *JHEP* **02** (2015) 172, [arXiv:1412.5148 \[hep-th\]](#).
- [3] L. Bhardwaj and Y. Tachikawa, “On finite symmetries and their gauging in two dimensions,” *JHEP* **03** (2018) 189, [arXiv:1704.02330 \[hep-th\]](#).
- [4] C.-M. Chang, Y.-H. Lin, S.-H. Shao, Y. Wang, and X. Yin, “Topological Defect Lines and Renormalization Group Flows in Two Dimensions,” *JHEP* **01** (2019) 026, [arXiv:1802.04445 \[hep-th\]](#).
- [5] M. Koide, Y. Nagoya, and S. Yamaguchi, “Non-invertible topological defects in 4-dimensional \mathbb{Z}_2 pure lattice gauge theory,” *PTEP* **2022** no. 1, (2022) 013B03, [arXiv:2109.05992 \[hep-th\]](#).
- [6] Y. Choi, C. Cordova, P.-S. Hsin, H. T. Lam, and S.-H. Shao, “Noninvertible duality defects in 3+1 dimensions,” *Phys. Rev. D* **105** no. 12, (2022) 125016, [arXiv:2111.01139 \[hep-th\]](#).
- [7] J. Kaidi, K. Ohmori, and Y. Zheng, “Kramers-Wannier-like Duality Defects in

- (3+1)D Gauge Theories,” *Phys. Rev. Lett.* **128** no. 11, (2022) 111601, [arXiv:2111.01141 \[hep-th\]](#).
- [8] D. Aasen, R. S. K. Mong, and P. Fendley, “Topological Defects on the Lattice I: The Ising model,” *J. Phys. A* **49** no. 35, (2016) 354001, [arXiv:1601.07185 \[cond-mat.stat-mech\]](#).
- [9] D. Aasen, P. Fendley, and R. S. K. Mong, “Topological Defects on the Lattice: Dualities and Degeneracies,” [arXiv:2008.08598 \[cond-mat.stat-mech\]](#).
- [10] 九後汰一郎, ゲージ場の量子論 II. 培風館, 1989.
- [11] A. Kapustin and N. Seiberg, “Coupling a QFT to a TQFT and Duality,” *JHEP* **04** (2014) 001, [arXiv:1401.0740 \[hep-th\]](#).
- [12] A. B. Zamolodchikov, “S matrix of the subleading magnetic perturbation of the tricritical Ising model,”