一般化対称性について

山口 哲

1. 導入
2. 対称性とトポロジカル欠陥
3. 2次元 Ising 模型
4. 高次形式対称性
5. 高次元の非可逆対称性

文献 （ほんの一部. 他の文献は [1] の文献が参考になる）

レビュー

[1] Shao, 2308.00747

非可逆対称性のレビュー.
文献も充実している.

この講義に特に関係の深いオリジナル論文

[2] Koide, Nagoya, SY, 2109.05992

[3] Choi, Cordova, Hsin, Lam, Shao 2111.01139

[4] Kaidi, Ohmori, Zheng, 2111.01141

[5] Aasen, Mong, Fendley, 1601.07185 2008.08598

[6] Bhardwaj, Tachikawa, 1704.02330

[7] Chang, Lin, Shao, Wan, Yin, 1802.04445

1. 導入

☆ 対称性とは?

場の理論で対称性とは何か?

たくさんの答えがありうる.
そのうち 3つ

① 場 ϕ, 作用 $S(\phi)$

変換 $\phi \to \phi'$ で $S(\phi) = S(\phi')$ となるもの

② Hamiltonian $\hat{H}$.

(反)ユニタリー演算子 $\hat{U}$ で $\hat{H}\hat{U} = \hat{U}\hat{H}$ となるもの

③ トポロジカル欠陥 (後で)

①, ② の不便な点

大域的な記述である

① 時空全体で一斉に変換しなければならない.

例: 2次元の共形対称性?? (知っている人向け)

複素座標 $z \to f(z)$ 正則

メビウス変換以外は1対1ではない.

変換ではない!?

② $\hat{H} = \int d^{d-1}x\, \hat{T}_{00}$

$\hat{U}$:

空間全体にひろがる巨大な演算子

$\boxed{\text{(大域的対称性だけど) 局所的な記述が望ましい}}$

④ 連続的対称性、無限小変換の場合

$\exists J^{\mu}(x) \qquad \partial_{\mu} J^{\mu}(x) = 0$

局所的!!

離散的な場合?

③ (内部対称性) トポロジカル欠陥

☆ 対称性の使い方の例

② の記述, 量子力学で

<u>命題</u> $\hat{U}, \hat{V}$: ユニタリー, $\hat{H}$と可換

$\hat{U}\hat{V} = a\hat{V}\hat{U}$, a: c数, $a \neq 1$

$\Rightarrow$ すべての準位 (特に基底状態) は縮退している

('t Hooft anomaly matching condition)

<u>証明</u> $^\exists|\psi\rangle$, $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$, 縮退なしと仮定

$\hat{H}\hat{U}|\psi\rangle = \hat{U}\hat{H}|\psi\rangle = E\hat{U}|\psi\rangle$

$\hat{U}|\psi\rangle$ もエネルギーEの固有状態

$\Downarrow$

$\hat{U}|\psi\rangle = u|\psi\rangle$ $\quad {}^\exists u \in \mathbb{C}, |u| = 1$

同様に $\exists v \in \mathbb{C},\ |v|=1$

$$\hat{V}|\psi\rangle = v|\psi\rangle$$

$$\underset{\displaystyle uv|\psi\rangle}{\underset{\shortparallel}{\hat{U}\hat{V}|\psi\rangle}} = a\hat{V}\hat{U}|\psi\rangle = auv|\psi\rangle$$

$a \neq 1$ $\Rightarrow$ 矛盾 $\blacksquare$

(1×1 行列は非可換になれない)

この命題 $\hat{U}, \hat{V}$ がユニタリーでなかったら？

(対称性ではない)

似たような命題が成り立つ!! ⇝ 使える

「非可逆対称性」

一般化対称性:

$\hat{H}$ と可換 (⇒ トポロジカル)

他の条件はゆるめても結構使える.

※ Euclidean の定式化

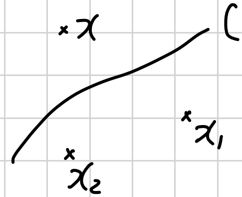
Lorentzian の理論とは別の「Euclideanの理論」を考えているわけではない.

「理論」は同じ、定式化, 考えやすい量が違う.

例: $$\mathrm{Tr}\, e^{-\beta\hat{H}} = \int D\phi\, e^{-S_E(\phi)}$$

Euclidean, 時間方向周期 β

※ 演算子関係式



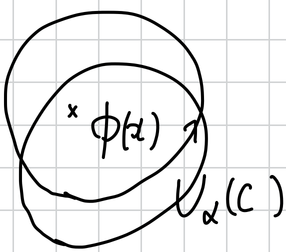
例: $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$ 略記

量子論で

$$\langle \partial_\mu J^\mu(x)\, \mathcal{O}_1(x_1) \cdots W(C) \cdots \rangle = 0$$

x は $x_1, \cdots, C, \cdots$ (他の演算子のささっているところ) とは異なる

例



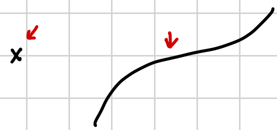
$= e^{i\alpha}\ \phi(x)$

$$\langle U_\alpha(C)\, \phi(x) \underbrace{\cdots}_{任意} \rangle = \underbrace{e^{i\alpha}}_{同じ} \langle \phi(x) \underbrace{\cdots}_{任意} \rangle$$

C の内側には入っていない.

2. 対称性とトポロジカル欠陥

☆ 欠陥



d次元時空内, 他のところと性質が異なる

dim (次元)　　,　　codim = d −(dim)
異なる部分の次元

$\boxed{\text{制限: 相互作用は局所的}}$

離れたところが直接相互作用することはない.

広い意味の「演算子」

例: ・局所演算子 (0次元欠陥)

※ Lagrangianに出てくる場の汎関数で書けているものも書けていないものもある.

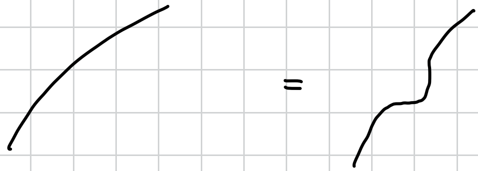
・ゲージ理論の Wilson loop

$$\mathrm{Tr}_R\, P\exp\left(i\oint A\right)$$

※ 欠陥は動的な物体ではない

☆ 対称性とトポロジカル欠陥 その1

・ トポロジカル欠陥 = 連続変形で値を変えない欠陥



同じトポロジー
連続変形

やること

② $\hat{H}\hat{U}=\hat{U}\hat{H}$ と ④ $\partial_\mu J^\mu=0$

$\Downarrow$

③ トポロジカル欠陥

■ d次元 場の理論、連続対称性の場合

$$\hat{U}=e^{i\alpha\hat{Q}}, \quad \hat{Q}=\int_{\text{空間}} d^{d-1}x\, \hat{J}^0 = -i\int_{\text{空間}} d^{d-1}x\, \hat{J}^d$$

$$\hat{J}^d := i\hat{J}^0$$

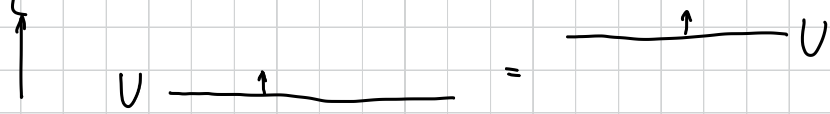
※ Euclidean 形式で「エルミート共役」は気をつけなければならない。

Heisenberg っぽい演算子

$$\hat{U}(\tau) := e^{\tau\hat{H}}\hat{U}e^{-\tau\hat{H}} = \hat{U}$$

← 対称性だから

⇒ Euclidean path integral



∘ 一般化

M: 向きのついた codim 1 surface

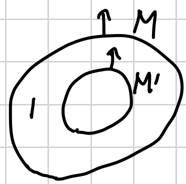
$$U(M) := e^{i\alpha Q(M)}$$

$$Q(M) := -i \int_M dS_\mu J^\mu \quad \left(= -i \int_M j \right)$$

$$j := \frac{1}{(d-1)!} \varepsilon_{\mu_1 \cdots \mu_d} J^{\mu_d} \times dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_{d-1}}$$

2つの codim 1 M, M'

s.t. $^\exists D \quad \partial D = M \cup (-M')$ ← M'の向きを反対にしたもの



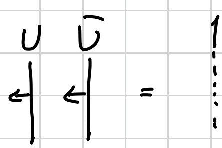
$$\Rightarrow \quad Q(M) = Q(M') \quad \left(\because Q(M) - Q(M') = -i \int_D d^dx \, \partial_\mu J^\mu = 0 \right)$$

$$U(M) = U(M')$$ (特にトポロジカル)

(単にトポロジカルより強い条件)

こういう $U(M)$ 「対称性欠陥」

- $Q(-M) = -Q(M)$
- $U(-M) =: \bar{U}(M)$



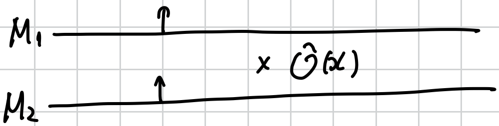
▨ 局所演算子への作用

$\hat{O}(x)$ 局所演算子　　$x=(\vec{x},\tau)$

$$\hat{U}\,\hat{O}(x)\,\hat{U}^{\dagger} = \hat{O}'(x)$$

（※量子力学の教科書と異なる convention）

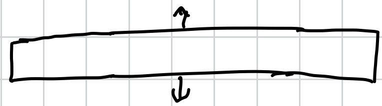
$\parallel$



$\parallel$

$$T\left(\hat{U}(M_1)\,\hat{U}(-M_2)\,\hat{O}(x)\right)$$

↑ time ordered product



$\parallel$

$$T\left(\hat{U}(M)\,\hat{O}(x)\right) \qquad M := M_1 \sqcup (-M_2)$$

xと同時刻には挿入なし.

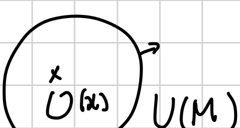
$$\langle 0|\,T\left(\hat{U}(M)\,\hat{O}(x)\cdots\right)|0\rangle$$

$$= \langle 0|\,T\left(\hat{O}'(x)\cdots\right)|0\rangle$$

$\Downarrow$

$$\langle U(M)\,O(x)\cdots\rangle = \langle O'(x)\cdots\rangle$$

を　$U(M)\,O(x) = O'(x)$　と書く.



$= \ {}^{\times}O'(x)$

WT id の有限変換への一般化

↓ 実際 α：無限小

$$\left(1 + i\alpha Q(M)\right) \mathcal{O}(x) = \mathcal{O}'(x)$$

$$i\alpha Q(M)\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}'(x) - \mathcal{O}(x) =: \alpha \Delta \mathcal{O}(x)$$

↓ $Q(M)$ の定義

$$\int_M dS_\mu J^\mu(y)\, \mathcal{O}(x) = \Delta \mathcal{O}(x) = \int_D d^dy\, \delta^d(x-y) \Delta \mathcal{O}(x)$$

$$= \int_D d^dx\, \partial_\mu J^\mu(y)\, \mathcal{O}(x)$$

$\Updownarrow$

$$\partial_\mu J^\mu(y)\mathcal{O}(x) = \delta^d(x-y)\Delta\mathcal{O}(x)$$

$\boxed{\text{WT id}}$

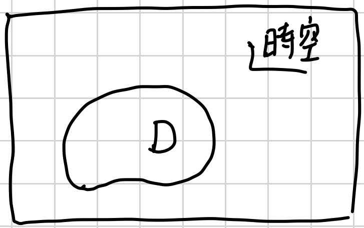
（yは他の挿入と重ならない）

☆ 対称性とトポロジカル欠陥 その2

①から通常のWT id を導くのと同じやり方

G : 群 ,　$g \in G$　変換 $\phi \to \phi^g$

$$S(\phi^g) = S(\phi)$$



D: 領域

"ゲージ変換"

$$\phi'(x) = \begin{cases} \phi^g(x) & x \in D \\ \phi(x) & x \notin D \end{cases}$$

$$Z = \int D\phi \, e^{-S(\phi)}$$

文字を変える

$$= \int D\phi' \, e^{-S(\phi')}$$

代入

$$= \int D\phi \, e^{-S(\phi')}$$

(測度は不変を仮定)

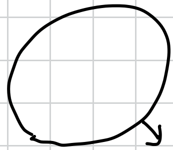
$$S_{D,g}(\phi) := S(\phi')$$

一般に $S_{D,g}(\phi) \neq S(\phi)$

しかし 異なるのは $\partial D =: M$ でのみ

外部 : $\phi' = \phi$

内部 : 対称性なので



$$U_{g^{-1}}(M) := e^{S(\phi) - S_{D,g}(\phi)}$$

M上に局在

「対称性欠陥」

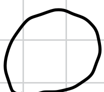
$$Z = \int D\phi \, e^{-S(\phi)} \, U_{g^{-1}}(M)$$

両辺 $1/Z$

$$\langle U_{g^{-1}}(M) \rangle = 1$$

。Dの外に他の演算子が入っていても同様

$$\langle U_{g^{-1}}(M) \cdots \rangle = \langle \cdots \rangle$$



$U_{g^{-1}}(M)$ $= 1$

$(M = \partial D, \ \exists D)$

▨ 演算子への作用

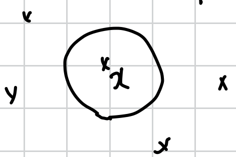
$$Z\langle \mathcal{O}(x)\cdots\rangle = \int D\phi\, \mathcal{O}(x)\cdots e^{-S(\phi)}$$

さっきと同じ

$x \in D$

$\cdots \notin D$

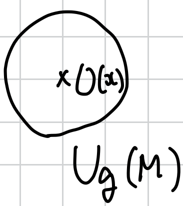
$$= \int D\phi\, \mathcal{O}^g(x)\, U_{g^{-1}}(M)\cdots e^{-S(\phi)}$$



$\Downarrow$

$$\langle \mathcal{O}(x)\cdots\rangle = \langle U_{g^{-1}}(M)\,\mathcal{O}^g(x)\cdots\rangle$$

$\mathcal{O}(x)$は$^\forall$局所演算子，　$^\forall g \in G$なので文字を変える



$= \mathcal{O}^g(x)$

$\mathcal{O}_a(x)$：すべての局所演算子の基底

$$\mathcal{O}^g_a(x) = \mathcal{O}_b(x)\, R(g)^b{}_a$$

$R(g)$：Gの表現

背景ゲージ場

(簡単のため)連続対称性

背景ゲージ場 A

$S(\phi, A)$: $S(\phi, A=0) = S(\phi)$

$$Z(A) = \int D\phi\, e^{-S(\phi, A)}$$

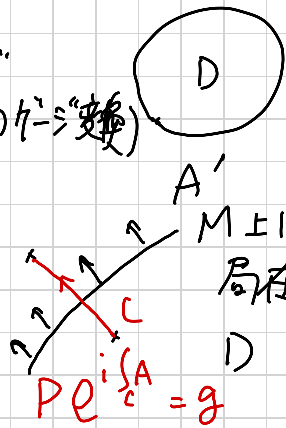
ゲージ変換(ゲージ不変性を仮定)

$$Z(A') = \int D\phi\, e^{-S(\phi, A')}$$

$$= Z(A)$$

($A=0$で さっきのゲージ変換)

$\Rightarrow$



ただし、

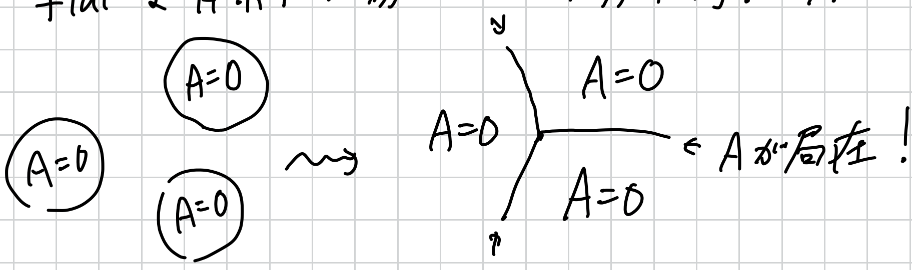
$F=0 \Rightarrow F'=0$

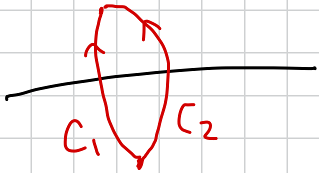
"flat"

対称性欠陥の配位 $\Rightarrow$ flatな背景ゲージ場

逆に

flatな背景ゲージ場 $\xrightarrow{\text{ゲージ変換}}$ 局所的に $A=0$





← Aが局在

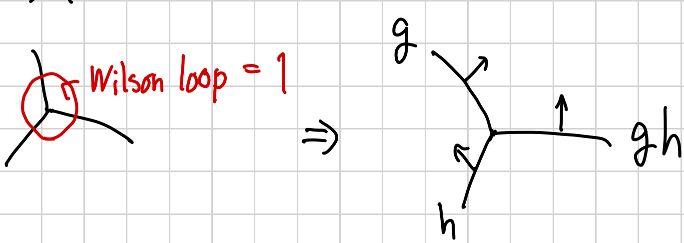
$$Pe^{i\oint_C A} = 1 \Rightarrow Pe^{i\int_{C_1} A} = Pe^{i\int_{C_2} A}$$

$\Rightarrow$ 対称性欠陥 U_g　　($= : g$)

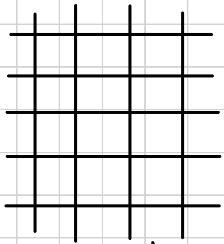
flatな背景ゲージ場の配位

$\Longrightarrow$ (ジャンクションを含む)対称性欠陥の配位

。トポロジカルジャンクション



▨ Ising の spin flip の例



各サイト i に自由度 $a_i = 0, 1$

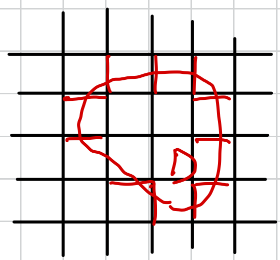
各リンク $\langle ij \rangle$ に 相互作用 $K(-1)^{a_i + a_j}$

$$Z = \sum_{\{a\}} \exp\left(K \sum_{\langle ij \rangle} (-1)^{a_i + a_j} \right)$$

すべての配位についての和

spin flip $a_i \longrightarrow a_i + 1 \pmod 2$

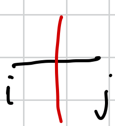
$$a'_i = \begin{cases} a_i + 1 & i \in D \\ a_i & i \notin D \end{cases}$$



$\sum_{\{a\}} = \sum_{\{a'\}}$ は成立

リンク $\langle ij \rangle$ $i, j \in D$, $i, j \notin D \Rightarrow$ 相互作用は不変

境界



$$= \exp\left(-K(-1)^{a_i + a_j} \right)$$

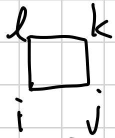
前と同様に　$\sigma_i := (-1)^{a_i}$

$$ {}^{*}\sigma_i \quad = \quad -1 \quad {}^{*}\sigma_i $$

。ゲージ場の配位

各リンク $\langle ij \rangle$ に $B_{ij} = 0, 1$

flat $\Leftrightarrow$ すべてのplaquette $\langle ijkl \rangle$



$$B_{ij} + B_{jk} + B_{kl} + B_{li} = 0 \pmod 2$$

ゲージ変換

パラメータ：各サイト i　$\lambda_i = 0, 1$

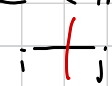
$$B_{ij} \to B_{ij} + \lambda_i + \lambda_j \pmod 2$$

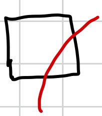
$$a_i \to a_i + \lambda_i \pmod 2$$

結合：リンク $\langle ij \rangle$

$$\exp\left(K\,(-1)^{a_i + a_j + B_{ij}}\right)$$

。対称性欠陥 $\Leftrightarrow$ flat な B の配位

$(\Rightarrow)$  欠陥と交わるリンク $B_{ij} = 1$，それ以外 $B_{ij} = 0$

 plaquette：必ず出て入る $\Rightarrow$ 偶数個 $B=1$

$\Rightarrow$ flat

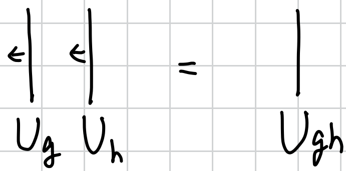
☆ 対称性欠陥のまとめ

普通の対称性

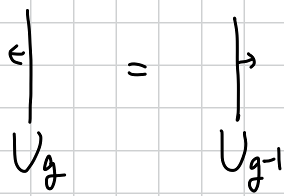
$\forall g \in G$,　M : codim 1, 向きのついた部分多様体

$\longrightarrow$ $U_g(M)$ トポロジカル欠陥

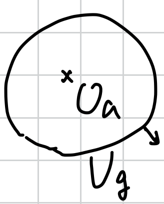
- 群構造



$U_1 = 1$ (自明な欠陥)



- 局所演算子への作用



$$= \sum_b R(g)^b{}_a \, \mathcal{O}_b$$

☆ 一般化対称性

普通の対称性 ⟶ トポロジカル欠陥

↑「一般化対称性」
と呼ぼう!

- codim 1 ⇒ codim p+1
  "p-form symmetry"
  p-形式対称性

- 群構造 ⇒ 群構造なし
  "non-invertible symmetry"
  非可逆対称性

  かけ算 (fusion), 単位元 (自明な欠陥) あり, 逆元なし

3. 2次元Ising模型

○ やること

- 2次元 Ising spin flip $\mathbb{Z}_2$ 対称性

  ゲージ化 ⇓

  Ising / $\mathbb{Z}_2$ ← $^\exists$双対 $\mathbb{Z}_2$ 大域的対称性

- Kramers-Wannier 双対性

  ⇒ 非可逆対称性の例)

☆ 2次元 Ising と $\mathbb{Z}_2$ ゲージ化

▨ Ising 模型

$$Z_{\text{Ising}} = \sum_{\{a\}} \exp\left(K \sum_{\langle ij \rangle} (-1)^{a_i + a_j}\right)$$

spin flip $\quad a_i \to a_i + 1 \pmod 2$

▨ Spin flip の(トポロジカルな)ゲージ化

さっき導入した背景ゲージ場のすべての配位を足しあげる

$$Z_{\text{Ising}/\mathbb{Z}_2} = \frac{1}{2^V} \sum_{\{a\},\{b\}} \exp\left(K \sum_{\langle ij \rangle} (-1)^{a_i + a_j + b_{ij}}\right) \times \prod_{\substack{\text{plaquette} \\ \langle 1234 \rangle}} \delta^{\text{mod } 2}_{b_1+b_2+b_3+b_4,\, 0}$$

ゲージ体積

拘束

。ゲージ体積：それぞれのサイトに $\lambda_i = 0, 1$ の2とおり

$$\to 2^V$$

。拘束

$$\delta^{\mathrm{mod}\,2}_{b,0} := \begin{cases} 0 & b = 1 \ \mathrm{mod}\ 2 \\ 1 & b = 0 \ \mathrm{mod}\ 2 \end{cases}$$

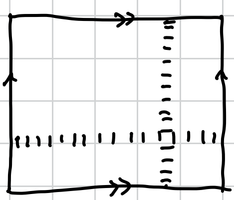
$$= \lim_{g \to 0} \exp\left(\frac{1}{g^2} \left((-1)^b - 1 \right) \right)$$

Wilson の plaquette 作用で弱結合極限をとったもの.

▨ ゲージ固定

flat な b の配位が与えられたとき、

(1) 水平、垂直それぞれにリンクの列を選ぶ

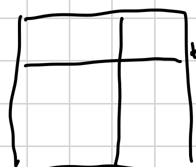


← 横にならんだ | のリンクの列 L_1

↑ たてにならんだ ー のリンクの列 L_2

(2) ゲージを選ぶ

$$b_\ell = 0 \ , \quad \ell \in L_1, L_2$$



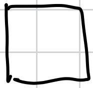
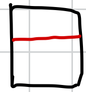
対称性欠陥

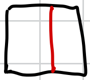
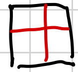
↙ 0 or 1 $\in \mathbb{Z}_2$

↖ 0 or 1 $\in \mathbb{Z}_2$

(3) 4通りの可能性

$$(b_{\ell_1}, b_{\ell_2}) = \begin{matrix} (0,0) \\ (1,0) \\ (0,1) \\ (1,1) \end{matrix} \quad \text{for} \quad \begin{matrix} \ell_1 \in L_1 \\ \ell_2 \in L_2 \end{matrix}$$

$(0,0) \Rightarrow$ 　　$(1,0) \Rightarrow$ 

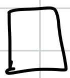
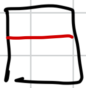
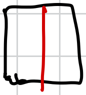
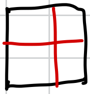
$(0,1) \Rightarrow$ 　　$(1,1) \Rightarrow$ 

(4) 残っているゲージ対称性

$\lambda_i = 0$ for all i

$\lambda_i = 1$ 〃

$\Downarrow$

$Z_{\mathrm{Ising}/\mathbb{Z}_2} = \frac{1}{2}\Big($  $+$  $+$  $+$  $\Big)$

※

- ゲージ場に関しては格子の細かさに関係ない

  $\longrightarrow$ 連続理論に拡張可

- string とか CFT に出てくる orbifold

- 熱力学的な量（自由エネルギー密度とか）

  は Ising と $\mathrm{Ising}/\mathbb{Z}_2$ で同じ

☆ 双対対称性

T : 2次 QFT,

大域的 G (abelian, 有限) 対称性, アノマリーなし
(ゲージ化可能)

命題

(1) T/G は アノマリーのない $\hat{G}$ 対称性がある.

$\hat{G} := \{ G$の既約表現$\}$ $\hat{G} \simeq G$ (カノニカルな同型はない)

$\otimes$ でアーベル群になっている Gの「電荷」全体

(2) $T/G/\hat{G} \simeq T$

---

(1) $T/G \Rightarrow W_{\hat{a}}(C)$ $\hat{a} \in \hat{G}$ (irrep) Wilson loop

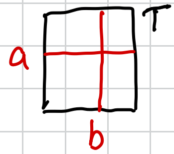
は トポロジカル欠陥, codim 1

$\hat{a}$ $\hat{b}$ $=$ $\hat{a} \otimes \hat{b} =: \hat{a} + \hat{b}$ $\Rightarrow$ 群構造

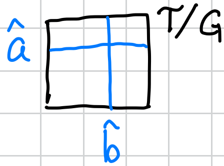
(③の意味で) 対称性

(2)

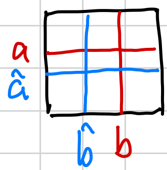
$$Z_{T/G} = \frac{1}{|G|}\sum_{a,b\in G}$$



$$Z_{T/G/\hat{G}} = \frac{1}{|\hat{G}|}\sum_{\hat{a},\hat{b}\in\hat{G}}$$



$$= \frac{1}{|\hat{G}|}\sum_{\hat{a},\hat{b}\in\hat{G}}\frac{1}{|G|}\sum_{a,b\in G}$$



$\hat{a},\hat{b}\in\hat{G}$

Gの既約(1次元)表現

$\chi_{\hat{a}} : G \to U(1)$　　表現行列=指標 (1次元なので)

$$\chi_{\hat{a}}(a)\chi_{\hat{a}}(b) = \chi_{\hat{a}}(a+b)$$

$$\chi_{\hat{a}}(a)\chi_{\hat{b}}(a) = \chi_{\hat{a}+\hat{b}}(a)$$

$$\left(|\hat{G}| = |G|\right)$$

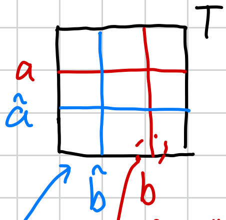
一般に $\displaystyle\sum_{\hat{a}\in\hat{G}}\chi_{\hat{a}}(b) = |\hat{G}|\,\delta_{b,0}$

例:

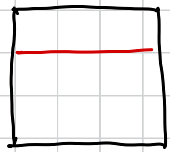
$$G = \mathbb{Z}_N = \{0, 1, \cdots, N-1\}$$

$$\hat{G} = \mathbb{Z}_N = \{0, 1, \cdots, N-1\}$$

$$\chi_{\hat{a}}(b) = e^{\frac{2\pi i}{N}\hat{a}b}$$



$$= \underbrace{\chi_{\hat b}(a)}_{\downarrow}\;\underbrace{\chi_{\hat a}(b)}$$



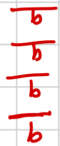
Wilson loop

$\chi_{\hat b}\left(\oint B\right)$

← ゲージ場の配位 $\neq 0$ の部分

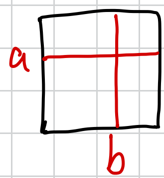
$\sum_{\hat b}\chi_{\hat b}(a) = |G|\delta_{a,0}$

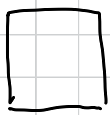
$\sum_{\hat a}\chi_{\hat a}(b) = |G|\delta_{b,0}$



← リンクがぜんぶ b

$$Z_{T/G/\hat G} = \frac{1}{|G|^2}\sum_{a,b}|G|^2\delta_{a,0}\delta_{b,0}$$



$=$  $= Z_T$

$$\boxed{T/G/\hat G = T}$$

※ 時空が一般の閉じた Riemann 面 Σ の場合

$$Z_{T/G/\hat G} = \frac{1}{N^{\chi}} Z_T \qquad N := |G|$$

χ : Σ の Euler 数

$= 2-2g = V - E + F$

↑ジーナス ↑#頂点 ↑#辺 ↑#面

⟶ Counter term を取って吸収できる.

$$Z_{T/G,\text{new}} = \sqrt{N}^{\chi} Z_{T/G,\text{いままでの}}.$$

$$\sqrt{N}^{\chi} = \exp\left(\sum_{\text{サイト}} \frac{1}{2}\log N - \sum_{\text{リンク}} \frac{1}{2}\log N + \sum_{\text{プラケット}} \frac{1}{2}\log N\right)$$

(局所相殺項で書ける)

※ Gがnon-abelianの場合. T/G理論

- Wilson loopはトポロジカル　$W_R(C)$　R: 既約表現
  しかし、⊗で群にならない

⇒「非可逆対称性」の例　$\mathrm{Rep}(G)$

☆ KW 双対性

命題

$$\frac{1}{(\sinh 2K)^{V/2}} Z_{\mathrm{Ising}/\mathbb{Z}_2}(K) = \frac{1}{(\sinh 2\tilde{K})^{V/2}} Z_{\mathrm{Ising}}(\tilde{K})$$

K と $\tilde{K}$ の関係　$\sinh 2K \sinh 2\tilde{K} = 1$

○ 有用な公式

$$\delta^{\mathrm{mod}\,2}_{b,0} := \begin{cases} 0 & , b=1 \pmod 2 \\ 1 & , b=0 \pmod 2 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{c=0,1} (-1)^{cb} = \frac{1}{2}\left(1+(-1)^b\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{c=0,1} e^{\pi i c b}$$

⇓

plaq. p に　$c_p = 0, 1$ の自由度

$$Z_{\mathrm{Ising}/\mathbb{Z}_2}(K) = \frac{1}{2^{2V}} \sum_{\{a\},\{b\},\{c\}} \exp\left[K \sum_{\langle ij \rangle} (-1)^{a_i + a_j + b_{ij}} \right.$$

$$\left. + \pi i \sum_{p=\langle ijkl \rangle} c_p \left(b_{ij} + b_{jk} + b_{kl} + b_{li} \right) \right]$$

証明

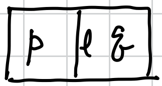
$$Z := Z_{\mathrm{Ising}/\mathbb{Z}_2}(K)$$

ゲージ固定 $a_i = 0$

$$= \frac{1}{2^V}\sum_{\{c\}}\sum_{\{b\}}\exp\Big[K\sum_{\substack{\ell \\ \text{リンク}}}(-1)^{b_\ell} + \pi i \sum_{p=\langle ijk\ell\rangle} c_p\left(b_{ij}+\cdots\right)\Big]$$

$\sum_{\{b\}}$ を先に評価

1つの ℓ に注目 → 2つの plaq. に接する



$$Z = \frac{1}{2^V}\sum_{\{c\}}\prod_{\substack{\ell \\ \text{リンク}}} Z_\ell$$

$$Z_\ell := \sum_{b=0,1}\exp\Big(K(-1)^b + \pi i\, b\,\underbrace{(c_p + c_q)}_{=:c}\Big)$$

$$= e^K + (-1)^c e^{-K}$$

$$= \begin{cases} 2\cosh K & (c=0) \\ 2\sinh K & (c=1) \end{cases}$$

$$Z_\ell = 2\cosh K\,(\tanh K)^c$$

$$\vdots$$

$$= \sqrt{2\sinh 2K}\; e^{\tilde{K}(-1)^c}$$

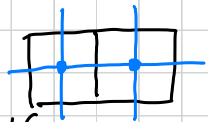
(公式 $(-1)^c = 1-2c$)
$c=0,1$

$$\tilde{K} : \tanh K = e^{-2\tilde{K}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sinh 2K \sinh 2\tilde{K} = 1$$

$$Z = \frac{1}{2^V}\sum_{\{c\}}\prod_{\substack{\ell:\text{link} \\ \| \\ \text{dual link } \langle pq\rangle}} Z_\ell$$



$$= \frac{1}{2^V}\sum_{\{c\}}\prod_{\langle pq\rangle}\sqrt{2\,\mathrm{sh}2K}\; e^{\tilde{K}(-1)^{c_p+c_q}}$$

(#リンク $=2V$)

$$= \underbrace{(\mathrm{sh}2K)^V}_{=\frac{(\mathrm{sh}2K)^{V/2}}{(\mathrm{sh}2\tilde{K})^{V/2}}}\underbrace{\sum_{\{c\}}\exp\left(\tilde{K}\sum_{\langle pq\rangle}(-1)^{c_p+c_q}\right)}_{Z_{\mathrm{Ising}}(\tilde{K})}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{(\mathrm{sh}2K)^{V/2}} Z_{\mathrm{Ising}/\mathbb{Z}_2}(K) = \frac{1}{(\mathrm{sh}2\tilde{K})^{V/2}} Z_{\mathrm{Ising}}(\tilde{K})$$

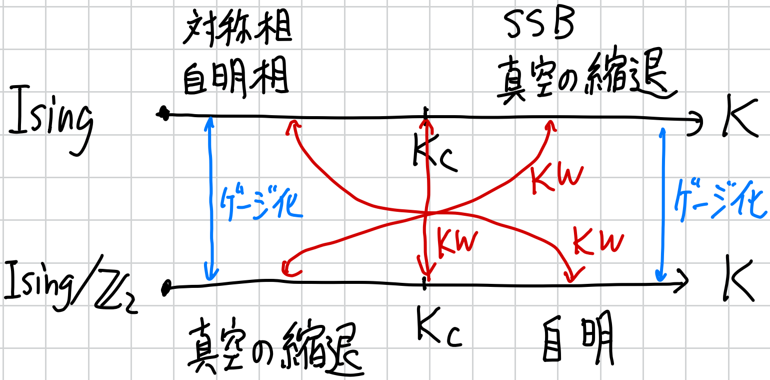
$\blacksquare$

▨ 相構造

K_c : $K_c = \tilde{K}_c$

$\sinh 2K_c = 1$

$\Rightarrow K_c = \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})$



↑

空間的なWilson loop

$= \pm 1$

☆ Ising の演算子(欠陥)

$$Z_{\mathrm{Ising}/\mathbb{Z}_2}(K) \qquad \left(\propto Z_{\mathrm{Ising}}(\tilde{K}) \leftarrow \text{こっちの言葉づかいで}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{2V}} \sum_{\{a\},\{b\},\{c\}} \exp\Big[K \sum_{\langle ij \rangle} (-1)^{a_i + a_j + b_{ij}} + \pi i \sum_{p=\langle 1234 \rangle} c_p (b_1 + b_2 + b_3 + b_4) \Big]$$

演算子(欠陥)

1. スピン演算子

$$\sigma_p = (-1)^{c_p}$$

$\{c\}$の和をとった後で見ると Lagrangianの中の場の汎関数で書けない

無くなるわけではない!!

$\boxed{p}$

$\sigma_p \Leftrightarrow$ flatの代わりに $\delta^{\mathrm{mod}\,2}_{\Sigma b+1,0}$

2. b Wilsonループ = Isingでspin flipの対称性欠陥

$$\eta(C) = (-1)^{b_{\ell_1}+b_{\ell_2}+\cdots}$$

$$\overset{\times}{\sigma_p}\ \eta = -1\ \overset{\times}{\sigma_p}$$

3. 無秩序スピン (disorder spin)

$\mu_i \sim (-1)^{a_i}$ ゲージ不変でない

⇓ Wilson lineを付ける

$$\mu_i = (-1)^{a_i+b_{\ell_1}+\cdots}$$

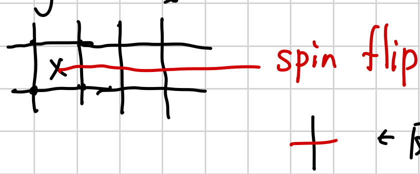
$$\overset{\times}{\mu_i} \quad \eta$$

局所演算子だけどトポロジカル欠陥がついている.

"non-genuine" 局所演算子

非純製

Isingの描像

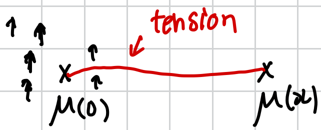


← 反強磁性相互作用

名前の由来

- 秩序相（自発的対称性の破れ）

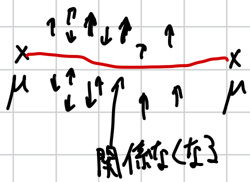
$$\langle \sigma(0) \rangle \neq 0 \quad \left(\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lim_{|x|\to\infty} \langle \sigma(0)\sigma(x) \rangle \neq 0 \right)$$



$$\sim e^{-m|x|}$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \langle \mu(0) \rangle = 0$$

- 無秩序相（対称相）



$$\sim \underset{\neq 0}{\text{const}} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \langle \mu(0) \rangle \neq 0$$

Ising $/\mathbb{Z}_2$ σ

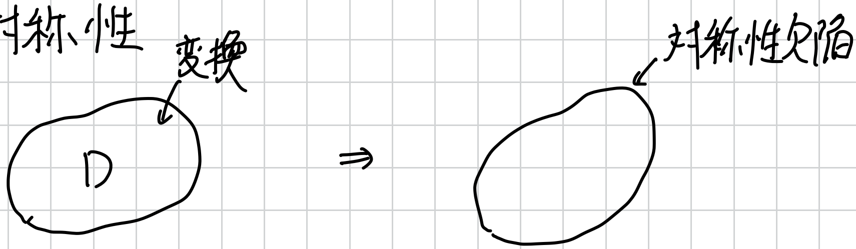
☆ KW欠陥

▨ アイデア

KW双対性 $K = K_c$ ⇒ 非可逆対称性

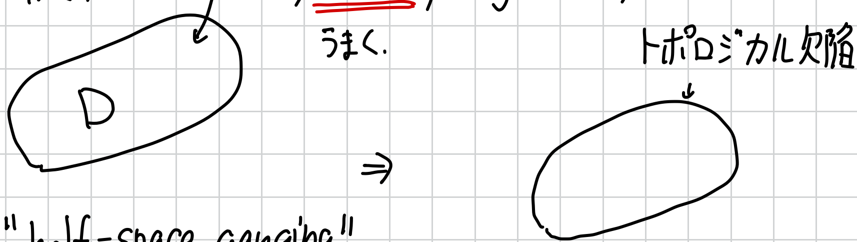
$\text{Ising}/\mathbb{Z}_2 \simeq \text{Ising}$

・対称性



⇓

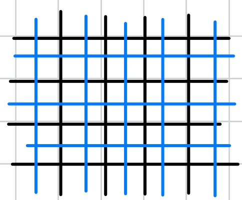
・一般化　変換，ゲージ化，integrate in/out
うまく.



"half-space gauging"

▨ Dのとり方

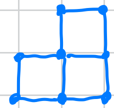
Isingのスピンが乗っている格子
"active lattice"



⇓

双対　"inactive lattice"

D : inactive lattice の言葉で
"端"をすべて含んでいる



D : inactive lattice の

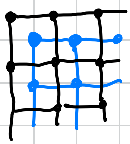
(サイト　リンク　プラケット) の集合

次を満たす

- $p \in D \Rightarrow \partial p = \{p$のまわりの4つのリンク$\} \subset D$
- $\ell \in D \Rightarrow \partial \ell = \{\ell$の両端のサイト$\} \subset D$

"Dirichlet boundary condition"

ル゛



← ∂Dとして

∂Dのリンク：ゲージ場 $= 0$

サイト：ゲージ変換なし

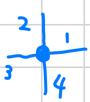
▨ D内でゲージ化

(0. □ ← $a = 0, 1$, ·|· 相互作用)

D内の要素に対して

1. | ← $b = 0, 1$ ⇒ aスピンとcouple, $\sum_{b=0,1}$

"対称性欠陥"

2. 

← $\delta^{\mathrm{mod}\ 2}_{b_1+b_2+b_3+b_4,\,0} = \sum_{c=0,1} \frac{1}{2}(-1)^{c(b_1+\cdots+b_4)}$

"ジャンクション"

3. □ ← ゲージ変換 ⇒ 1/ゲージ体積 $= \frac{1}{2}$

4. Euler counter term

$\bullet = \sqrt{2}$

$| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\square = \sqrt{2}$

Euler

$$Z_D = \underbrace{\sum_{\{a\}}}_{\text{全体}} \underbrace{\sum_{\{b\}} \sum_{\{c\}}}_{\text{Dの中だけ}} \prod_{\square \in D} \frac{\sqrt{2}}{\underbrace{2}_{\text{ゲージ体積}}} \prod_{| \in D} \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_{\bullet \in D} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

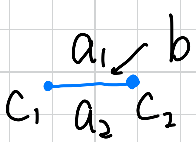
← 拘束をcで書いたときの$\frac{1}{2}$

$$\times \prod_{| \notin D} e^{K(-1)^{a_i+a_j}} \times \prod_{| \in D} e^{K(-1)^{a_i+a_j+b_{ij}}}$$

$$\times \prod_{\square \in D} (-1)^{c_p \sum_{\ell \in |} b_\ell}$$

▨ bの和をとる

• Dの内部 (前と同じ)

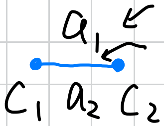


⇒ ゲージ固定 $a_1, a_2 = 0$ $\left(\begin{array}{c} K = K_c \\ \sinh 2K = 1 \end{array} \right)$

$$\sum_{b=0,1} e^{K(-1)^b} (-1)^{b(c_1+c_2)} = \sqrt{2}\, e^{K(-1)^{c_1+c_2}}$$

← Euler とキャンセル

・境界



$\Rightarrow$ ゲージ固定 $a_2=0$

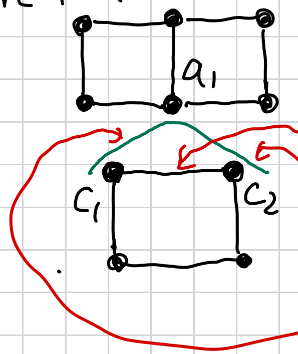
$$\sum_{b=0,1} e^{K(-1)^{b+a_1}} (-1)^{b(c_1+c_2)} = \sum_{b'} e^{K(-1)^{b'}} (-1)^{b'(c_1+c_2)} \times (-1)^{a_1 c_1} (-1)^{a_1 c_2}$$

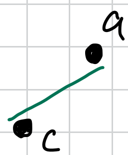
($b'=b+a_1$ とおいた)

$$= \underbrace{\sqrt{2}\, e^{K(-1)^{c_1+c_2}}}_{} \underbrace{(-1)^{a_1 c_1}}_{} \underbrace{(-1)^{a_1 c_2}}_{}$$

↖Euler とキャンセル

active lattice





$\to (-1)^{ac}$

▨ 残っている定数

D内 $\color{blue}{\bullet}$ $= \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

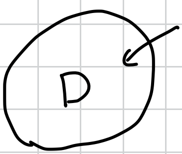
$\color{blue}{\square}$ $= \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = \sqrt{2}$

D内のバルクではキャンセル

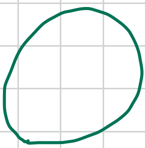
$\rightsquigarrow$ 境界のみに残る

(ちゃんとした構成 [Aasen, Mong, Fendley 16])

▨ ここまでのまとめ



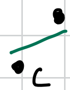
⇓



KW欠陥

genuine codim 1 の欠陥

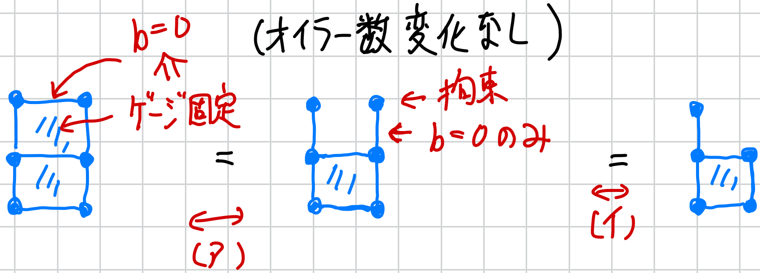
- Dのバルクは外と変わらない
- 局所的



$\sim (-1)^{ac}$

▨ トポロジカルであること.

Dの例　(オイラー数変化なし)

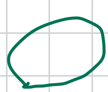


(ア), (イ) の操作で分配関数は変化なし

= トポロジカル

(ア), (イ) をくりかえして縮めていく

$=$ • $=$ Euler $\sqrt{2}$ 拘束 $\delta_0 = 1$ $= \sqrt{2}$

⇒  $= \sqrt{2}$ ⇒ 従来の対称性ではない!

ここまでの結論

- $K = K_c$ の Ising には「KW欠陥」
  codim 1 トポロジカル欠陥がある.

- これは従来の対称性の対称性欠陥
  ではない.

⇓

一般化対称性、非可逆対称性の例

☆ 対称性の構造

2D Ising のトポロジカル欠陥

1	η	$\mathcal{N}$
自明	spin flip	KW

$\underbrace{\text{自明}\quad\text{spin flip}}_{\mathbb{Z}_2 \text{ symmetry}}$

$\underbrace{\text{自明}\quad\text{spin flip}\quad\text{KW}}_{\text{Ising 圏}}$

融合圏 (fusion category)
くわしくは [Bhardwaj, Tachikawa 17]

▨ Fusion rule

$$a\ b \;=\; a\otimes b \;=\; \sum_c N_{ab}{}^{c}\; c$$

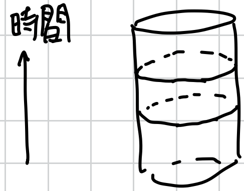
2つのトポロジカル欠陥
ならべておく

$a\otimes b$ ← こういう記号で書く.
新たなトポロジカル欠陥

"simple"なものの和
(仮定)

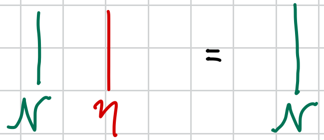
Hilb. sp に作用する演算子(②の立場)の見方で
演算子の積

時間

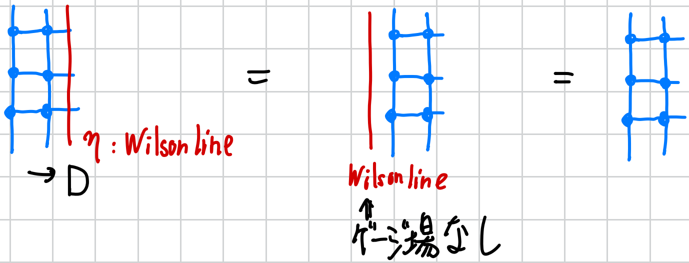


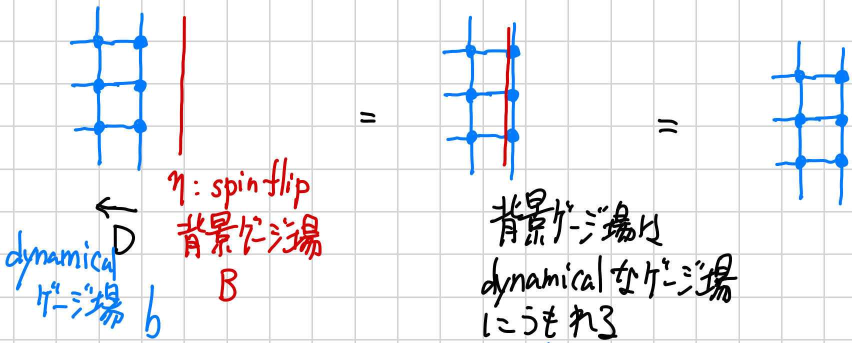
従来の対称性の場合
群演算

o



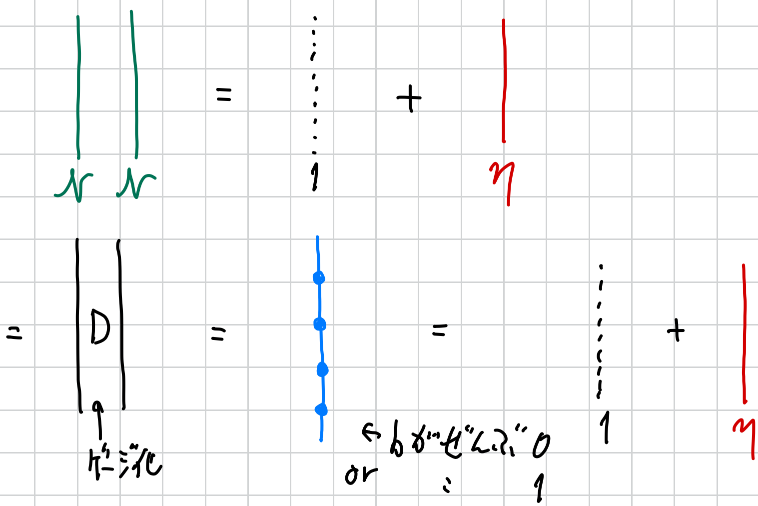
(⇒ $\mathcal{N}$ は非可逆)



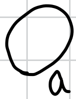


背景ゲージ場は
dynamicalなゲージ場
にうもれる
$b' = b + B$

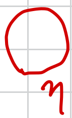
o



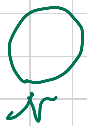
▨ Quantum dimension



$=: \mathrm{qdim}$

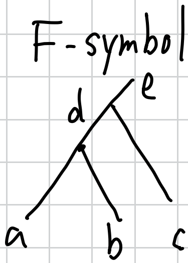


$= 1$,

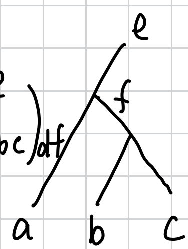


$= \sqrt{2}$

▨ F-symbol

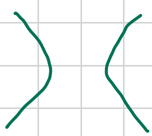


$= \sum_f \left(F^{e}_{abc}\right)_{df}$

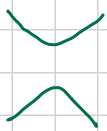


例

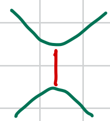
∘



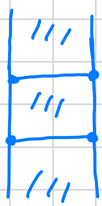
$= \frac{1}{\sqrt{2}} \Bigg($



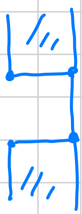
$+$



$\Bigg)$

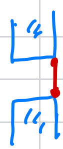


$\underset{(?)}{=}$



このlinkの部分をexplicitに書く

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \Bigg($

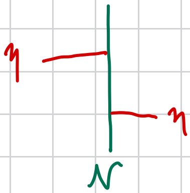


$+$

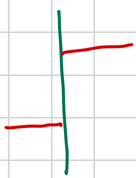
$\Bigg)$

Euler　　b=1　　b=0

∘

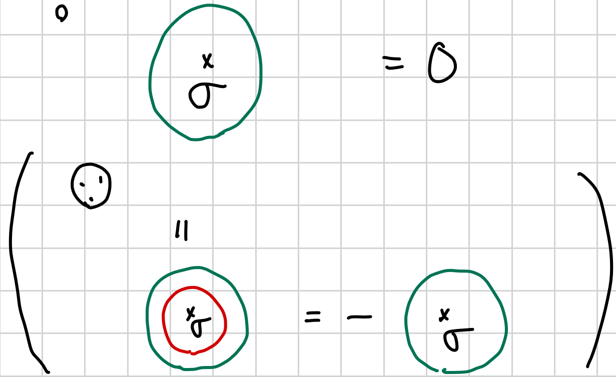


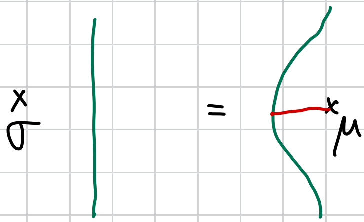
$= (-1)$

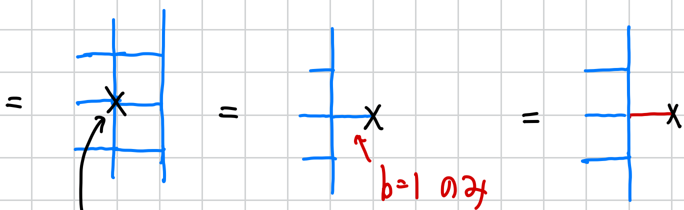


⇒ Ising圏

▨ 他の WT id







強制的に $\Sigma b = 1$

☆ 応用 [Chang, Lin, Shao, Wang, Yin 19]

命題： Ising 圏の対称性を持つ 2D QFT は
trivially gapped にならない

gapped かつ、空間のトポロジーがどんなものでも
真空に縮退なし.

空間の体積が大きい

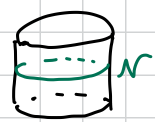
$E_1 - E_0 \geq m$ $\quad {}^{\exists} m > 0$ 体積によらない

第1励起状態のエネルギー

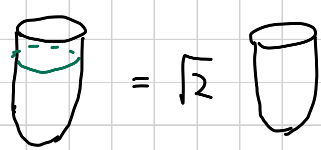
基底状態のエネルギー $E_0 = 0$

証明 gapped, 唯一の真空 $|0\rangle$ を仮定
以外、計量の曲率 $\ll m^2$, 体積 $\gg \frac{1}{m}$ ⇒ $|0\rangle$ 以外の状態は無視

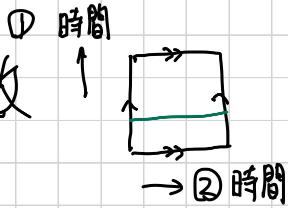
$\hat{N}$: Hilbert 空間に作用する演算子



$\hat{N}|0\rangle = \sqrt{2}\,|0\rangle$



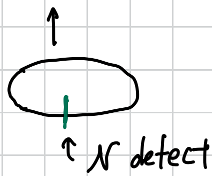
分配関数



① $Z = \langle 0|\hat{\mathcal{N}}|0\rangle = \sqrt{2}$

矛盾

② $Z = \dim \mathcal{H}_{\mathrm{defect}} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$



※ Ising 圏 $\supset$ $\mathbb{Z}_2$ 対称性 ← 普通の対称性 ← これのおかげ？

別の対称性

Fibonacci 圏 : トポロジカル欠陥 1, F

Fusion rule $F^2 = F + 1$

普通の対称性を含まない。

⇒ 同様の命題が成り立つ（trivially gapped になれない）

$\hat{F}$ の固有値 $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

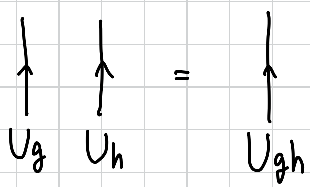
4. 高次形式対称性

☆ 定義：p形式対称性

群 $G \ni g$,　codim $p+1$ 向きついた面 M

$\Rightarrow$ $U_g(M)$: トポロジカル欠陥

次を満たすもの

・ 

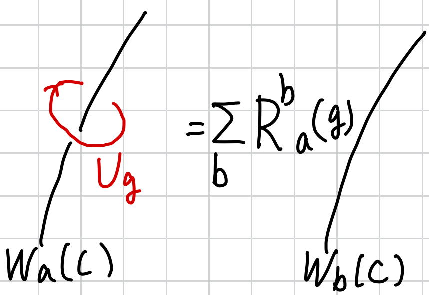
（$\Rightarrow$ $p>0$ なら
G はアーベル群 $gh=hg$）

・ $U_1 = 1$, $U_g(-M) = U_{g^{-1}}(M)$

▨ 演算子への作用

$W_a(C)$: p 次元（トポロジカルとは限らない）欠陥

C : p 次元面



$R^b{}_a(g)$: G の表現

（※ G はアーベル群
$\Rightarrow$ $R^b{}_a(g) = (\text{phase})\,\delta^b_a$
となる基底がとれる）

※ 例： ゲージ理論の中心対称性

（後で詳しく）

※ 昔から知られていたが、局所的な記述が発見されたのが最近

[Gaiotto, Kapustin, Seiberg, Willet 14]

☆ 格子ゲージ理論の中心対称性

▨ 格子ゲージ理論

d 次元立方格子 , ゲージ群 $SU(N)$ (例)

Lie代数でなくて群

各リンク $\langle ij \rangle$ に $U_{ij} \in SU(N)$

・ 分配関数

$$Z = \int \prod_{\langle ij \rangle} dU_{ij} \, \exp(-S(U))$$

Haar測度

$$S(U) = -K \sum_{\substack{\langle ijkl \rangle \\ \text{plaquettes}}} \left[\mathrm{tr}\left(U_{ij} U_{jk} U_{kl} U_{li} \right) + (\text{c.c.}) \right]$$

$\left(※ \quad K \sim \frac{1}{g_{YM}^2} \right)$

・ ゲージ変換パラメータ : 各サイト i に $g_i \in SU(N)$

$$U_{ij}' = g_i U_{ij} g_j^{-1} \Rightarrow S(U') = S(U)$$

☒ 中心対称性

さっきの格子ゲージ理論に $^\exists$1形式対称性群 $\mathbb{Z}_N$) $\mathbb{Z}_N^{[1]}$

- (群の話)

$SU(N) \ni \omega 1_N$　　$\omega := e^{\frac{2\pi i}{N}}$

$Z := \{\omega^k 1_N : k=0,1,\cdots,N-1\} \subset SU(N)$

部分群

Z の元は $^\forall g \in SU(N)$ と可換

こういう Z を「$SU(N)$ の中心 (center)」

$Z \simeq \mathbb{Z}_N$

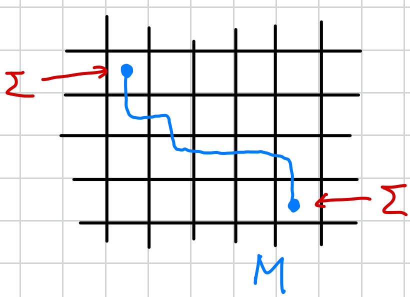
- 前にやった時空の一部で変換 ⇒ トポロジカル欠陥

M: codim 1 surface, $\partial M = \Sigma$

サイトと交らない.

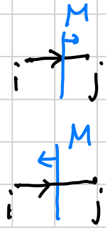
向き付き

(双対格子の codim 1 要素をつないでできる面)

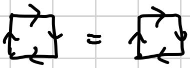


- 積分の変数変換

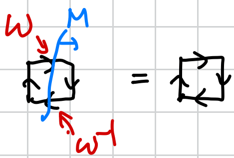
$$U_{ij}' = \begin{cases} U_{ij} & \langle ij\rangle \text{はMと交わらない} \\ U_{ij}\,\omega \\ U_{ij}\,\omega^{-1} \end{cases}$$



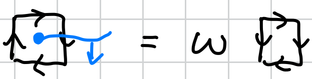
- $S(U')$ vs $S(U)$



変わってなければ自明に変わらない



変わらない



変わる!!

Σの上のplaquette

$$S = \cdots - K\left(\omega\,\mathrm{tr}(U\cdots) + (c.c)\right)$$

$$S_{M,\omega}(U) := S(U')$$

$S_{M,\omega}(U)$ と $S(U)$ は Σ 上だけで異なる

$\Rightarrow$ codim 2 トポロジカル欠陥

$V_{\omega^{-1}}(\Sigma)$

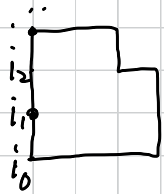
$V_{\omega^k}(\Sigma)$ も同様に定義

$\Rightarrow$ $\mathbb{Z}_N^{[1]}$ 対称性　「中心対称性」

▨ Wilson loop への作用

- Wilson loop

  C : リンクをつないでできるループ



$$W_{\square}(C) = \mathrm{tr}\left(U_{i_0 i_1} U_{i_1 i_2} \cdots U_{i_{k-1} i_k} \right)$$

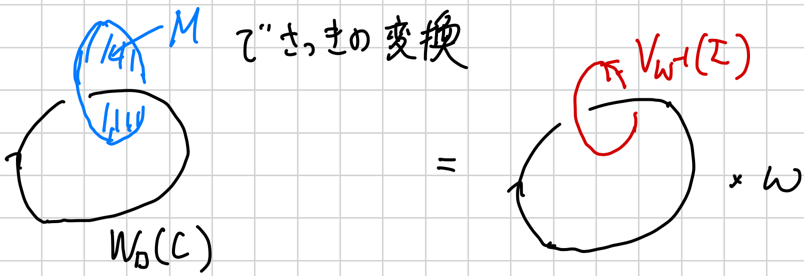
↑基本表現

ゲージ不変，次元1欠陥（一般にはトポロジカルではない）

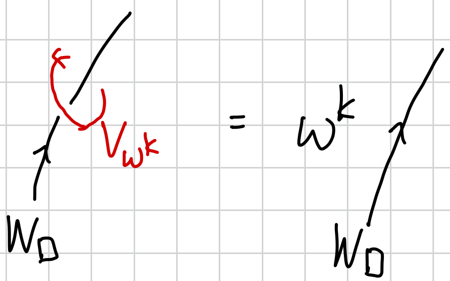
$$W_{\rho}(C) = \mathrm{tr}\left(\rho\left(U_{i_0 i_1} U_{i_1 i_2} \cdots \right) \right)$$

↑ $SU(N)$ の表現

- M でさっきの変換

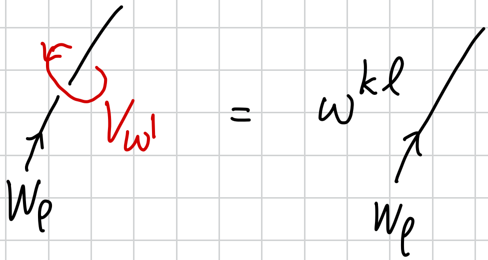


$\Rightarrow$ WT id



ρ : 既約表現, $\underbrace{\square \otimes \square \otimes \cdots \otimes \square}_{\ell \text{個}} = \rho \oplus \cdots$

$\ell \bmod N$: "N-ality"



☆背景ゲージ場 その1

普通の対称性のとき、

$\boxed{\text{flatな背景ゲージ場の配位 = 対称性欠陥の配位}}$

p形式対称性の場合も同様

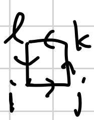
ゲージ場？

▨ 格子, $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ の場合 ⇒ $\mathbb{Z}_N$ 2-form ゲージ場

(0-form対称性 ⇒ 1-formゲージ場)

• ゲージ場 B

各プラケット ⟨ijkl⟩ に $B_{ijkl} \in \mathbb{Z}_N = \{0, 1, \cdots, N-1\}$



逆向き. $B_{lkji} = -B_{ijkl}$

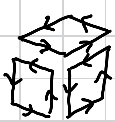
• ゲージ変換

パラメータ：各リンク⟨ij⟩に $\Lambda_{ij} \in \mathbb{Z}_N$ $\Lambda_{ij} = -\Lambda_{ji}$

$$B'_{ijkl} = B_{ijkl} + \underbrace{\Lambda_{ij} + \Lambda_{jk} + \Lambda_{kl} + \Lambda_{li}}_{=:\ \delta\Lambda_{ijkl}}$$

• 場の強さ

cube (向き付き) c



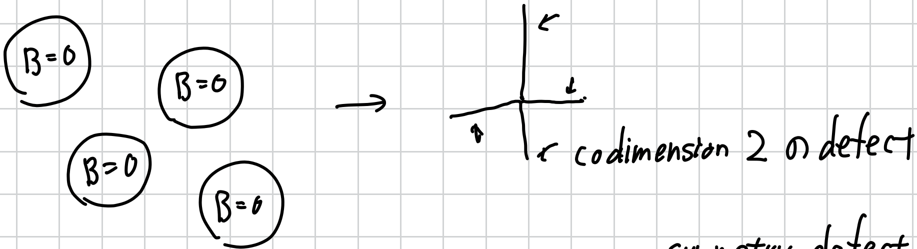
$$\delta B_c = \sum_p B_p$$

cubeの中のplaquette, cubeの向きから導かれる向き.

δB はゲージ不変

"flat" $\Leftrightarrow$ $\delta B = 0$

- flat $\Rightarrow$ ゲージ変換で局所的には $B=0$ にできる



$\Rightarrow$ symmetry defect.

格子ゲージ理論とのcoupling

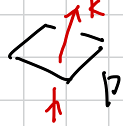
$$S(U,B) = -K \sum_{\langle ijkl \rangle} \left[e^{\frac{2\pi i}{N} B_{ijkl}} \mathrm{tr}(U_{ij} \cdots) + (c.c.) \right]$$

- U_{ij} のゲージ変換

$$U_{ij}' = e^{-\frac{2\pi i}{N} \Lambda_{ij}} U_{ij} \Rightarrow S(U,B) \text{ は不変}$$

- V の配位 $\Leftrightarrow$ flat な B

$V_{\omega^k}(M)$, M が交わるplaq. p (正の向き



$\Rightarrow \quad B_p = k$

flat $\Leftarrow$ 端がないので
cube の中に入ったら必ず出ていく

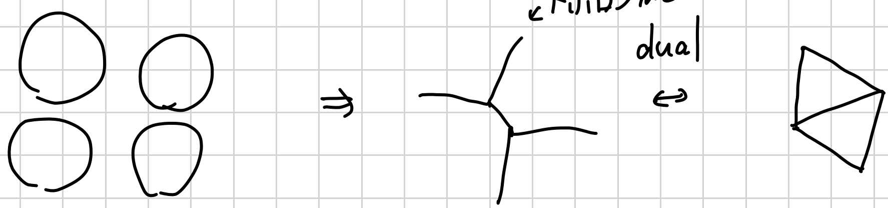
- $\mathbb{Z}_N^{[1]}$ をゲージ化 $\rightarrow$ 別の理論

$$Z_{gauged} = \sum_b \int DU \, e^{-S(U,b)}$$

☆ 背景ゲージ場 その2：単体コホモロジー

アイデア

flatなゲージ場：局所的に0にできる



⇒ 荒い格子で十分

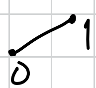
三角形の格子でもよい.
(単体)

⇒ 数学の道具：単体コホモロジー

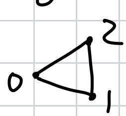
▨ Chain

- X：閉じた d 次元多様体
  単体分割 ⇒ K
  頂点に通し番号 0, 1, 2, 3, …
- 単体：頂点，リンク，三角形，4面体，…

p 単体



$\langle 01 \rangle$



$\langle 012 \rangle$ …

一般に $\langle i_0 i_1 \cdots i_p \rangle$
$i_0 < i_1 < \cdots < i_p$

(以下めんどうなので $\langle 01 \cdots p \rangle$ の場合だけ書くこともある)

- G : アーベル群 ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_N$, $\cdots$)

  $C_p(K, G)$: p 単体の形式的な G 係数線型結合

  $\Rightarrow$ アーベル群

- ∂ : boundary

  $\partial : C_p(K,G) \longrightarrow C_{p-1}(K,G)$ hom

$$\partial \langle 01 \cdots p \rangle = \langle 12 \cdots p \rangle - \langle 02 \cdots p \rangle + \cdots$$
$$= \sum_{j=0}^{p} \langle 01 \cdots \underset{\substack{\wedge \\ j\text{ぬけ}}}{} p \rangle (-1)^j$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial^2 = 0}$$

- $Z_p(K,G) := \{ c \in C_p(K,G) \mid \partial c = 0 \}$ "cycle"

  $B_p(K,G) := \partial C_{p+1}(K,G)$

  両方アーベル群

  $Z_p \supset B_p \quad (\because \partial^2 = 0)$

  $H_p(K,G) := Z_p(K,G) / B_p(K,G)$

  $\boxed{\text{ホモロジー}}$

定理： $H_p(K, G)$ は K のとり方によらない

$H_p(X, G)$ と書く.

Cochain

p単体にGの元を割りふるやり方

$\langle i_0 i_1 \cdots i_p \rangle$ に $A_{i_0 \cdots i_p} \in G$ を割りふる

例：$p = 1$ ：リンク $\langle ij \rangle$ に $A_{ij} \in G$ を割りふる.

p-cochain 全体 $C^p(K, G)$ アーベル群

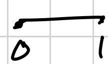
（深いことを考えない p-form ゲージ場全体）

- Coboundari $\delta : C^p \to C^{p+1}$

$A \in C^p$

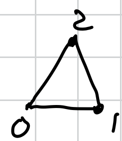
$$(\delta A)_{0 \cdots (p+1)} := A_{1 \cdots (p+1)} - A_{02 \cdots (p+1)} + \cdots$$

$$= \sum_{j=0}^{p} (-1)^j A_{0 \cdots \hat{j} \cdots (p+1)}$$



例 $\lambda \in C^0 \Rightarrow (\delta\lambda)_{01} = \lambda_1 - \lambda_0$

$A \in C^1 \Rightarrow (\delta A)_{012} = A_{12} - A_{02} + A_{12}$



$\Rightarrow \boxed{\delta^2 = 0}$

・ $Z^p(K,G) = \{A \in C^p(K,G) \mid \delta A = 0\}$ "p-cocycle"

$B^p(K,G) = \delta C^{p-1}(K,G)$

$Z^p \supset B^p \Leftarrow \delta^2 = 0$

$$H^p(K,G) := \underbrace{Z^p(K,G)}_{\text{"flat"}} / \underbrace{B^p(K,G)}_{\text{ゲージ変換}}$$

定理：$H^p(K,G)$はKによらない

$H^p(X,G)$と書く

▨ $G = \mathbb{Z}_N$の場合 （$\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, …）

＋で群

かけ算もある （$\mathbb{Z}$に代表元をとって mod N）

以下、こういうものだけ考える.

▨ 積分

$A \in C^p(K,G)$, $\Sigma \in C_p(K,G)$

$\int_c A$ を定義

$$\int_{a\langle 01\cdots p\rangle} A := aA_{01\cdots p}, \quad a \in G$$

bilinear

▨ カップ積

$$C^p(K,G) \times C^q(K,G) \longrightarrow C^{p+q}(K,G)$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ A & & B \end{array}$$

$$(A \smile B)_{01\cdots(p+q)} = A_{01\cdots p}\, B_{p\cdots(p+q)}$$

性質

- $\delta(A \smile B) = \delta A \smile B + (-1)^p A \smile \delta B$

$\Downarrow$

$$H^p(X,G) \times H^q(X,G) \longrightarrow H^{p+q}(X,G)$$

$$A \smile B = (-1)^{pq} B \smile A$$

☆ 自発的対称性の破れ

ふつうの対称性

秩序変数 $\langle \sigma(0) \rangle \neq 0$

⇓ ちゃんという

$$\lim_{|x|\to\infty} \langle \sigma(0)\, \sigma(x) \rangle \neq 0$$

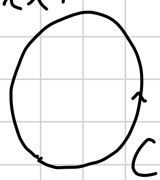
(Volume → ∞)

$\dot{\sigma}(0)$ $\dot{\sigma}(x)$

保っている $\langle \sigma(0)\sigma(x) \rangle \sim e^{-m|x|}$

1-form 対称性の場合

秩序変数 $W(C)$ ← 1次元欠陥 (例:Wilsonループ)



とりあえず

$$\lim_{C\to 大} \langle W(C) \rangle \neq 0$$

周長則 の場合.

← Cの長さ

$$\langle W(C) \rangle \sim e^{-m\int_C ds} \longrightarrow 0$$

だけど

local counter term

$$\tilde{W}(C) = W(C)\, e^{-m\int_C ds}$$ ← まともな1次元欠陥

$$\langle W(C) \rangle \to 定数 \neq 0$$

つまり

対称相

$$\lim_{C\to\text{大}} \langle W(C) \rangle = 0$$ (どんな local counter term を入れても)

$\Leftrightarrow$ 面積則

破れ相

$$\lim_{C\to\text{大}} \langle W(C) \rangle = (\text{定数}) \neq 0$$ (ある counter term で)

$\Leftrightarrow$ Coulomb則, 周長則, …

中心対称性の場合

対称相	$\Leftrightarrow$	閉じ込め
破れの相	$\Leftrightarrow$	非閉じ込め

5. 高次元の非可逆対称性

知られている作り方

- higher gauging
- half-space gauging ← 2次元KW欠陥を作ったのに似ている

☆ ゲージ化

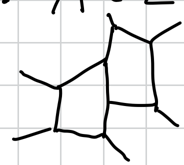
T : d次元QFT with p形式対称性 $G^{[p]}$

群 G : 有限アーベル群 ($\mathbb{Z}_N$の場合)

X : d次元 closed 多様体

K : Xの単体分割 (格子)

$G^{[p]}$がアノマリー無し (ゲージ化可能) : $A \in Z^{p+1}(K, G)$ ゲージ場 (トポロジカル欠陥の配位)

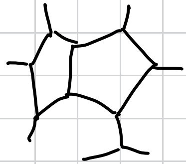


$\Leftrightarrow$ $Z_T(A)$が

- Kによらない
- ゲージ不変 ($Z_T(A+\delta\lambda) = Z_T(A)$)

$$Z_{T/G^{[p]}} = \frac{1}{\mathrm{Vol}} \sum_{a\in Z^{p+1}(K,G)} Z_T(a)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mathrm{Vol}} \sum_{a}$$



という網状の演算子の挿入

$\lambda \sim \lambda + \delta\mu,\ \mu\in C^{p-1}$

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}} = \frac{|C^{p-1}|\,|C^{p-3}|\cdots 1}{|C^{p}|\,|C^{p-2}|\cdots |C^{0}|} \quad p:\text{even}$$

$$\frac{\cdots |C^{0}|}{\cdots} \quad p:\text{odd}$$

ゲージ変換

$a \sim a + \delta\lambda,\ \lambda\in C^{p}$

$\Downarrow$ H^* の言葉で書く.

$$\sum_{a\in Z^{p+1}} Z_T(a) = |B^{p+1}| \sum_{a\in H^{p+1}} Z_T(a) \qquad \left(H^{p+1} = Z^{p+1}/B^{p+1}\right)$$

$$0 \to Z^{p} \xrightarrow{i} C^{p} \xrightarrow{\delta_p} B^{p+1} \xrightarrow{\delta_{p+1}} 0$$

$$B^{p+1} = C^{p}/Z^{p}$$

$$|B^{p+1}| = \frac{|C^p|}{|Z^p|} = \frac{|C^p|}{|H^p|\,|B^p|} = \frac{|C^p|\,|B^{p-1}|}{|H^p|\,|C^{p-1}|} = \cdots$$

$$= \frac{|C^p|\cdots}{|C^{p-1}|\cdots}\;\frac{|H^{p-1}|\cdots}{|H^p|\cdots}$$

$$Z_{T/G^{[p]}} = \frac{|H^{p-1}| \cdots}{|H^{p}| \cdots} \sum_{a \in H^{p+1}} Z_T(a)$$

※ 他に Gravitational な counter term を入れる可能性あり)

▨ 双対対称性

(簡単のため $G = \mathbb{Z}_N$)

- $T/G^{[p]}$ には $q = d-p-2$ form 対称性がある

Wilson surface が対称性欠陥 $e^{\frac{2\pi i}{N}\int_{\tilde{B}} a}$

$$\tilde{B} \in H_{p+1}(X, G) \simeq H^{q+1}(X, G)$$

$$B \in H^{q+1}(X, G)$$

$$Z_{T/G^{[p]}}(B) = \frac{|H^{p-1}| \cdots}{|H^{p}| \cdots} \sum_{a \in H^{p+1}} e^{\frac{2\pi i}{N}\int_X B \cup a} Z_T(a)$$

- B をゲージ化

$$Z_{T/G^{[p]}/G^{[q]}} = \frac{|H^{q-1}| \cdots}{|H^{q}| \cdots} \sum_{b \in H^{q+1}} Z_{T/G^{[p]}}(b)$$

$$Z_{T/G^{[p]}/G^{[q]}} = \frac{|H^{q-1}| \cdots}{|H^{q}| \cdots} \frac{|H^{p-1}| \cdots}{|H^{p}| \cdots}$$

$$\times \underline{\sum_{b\in H^{q+1}}} \sum_{a\in H^{p+1}} \underline{e^{\frac{2\pi i}{N}\int_X b\cup a}} \, Z_T(a)$$

$$= |H^{q+1}| \, \delta_{a,0}$$

$$= \underbrace{\frac{|H^{q-1}| \cdots}{|H^{q}| \cdots} \frac{|H^{p-1}| \cdots}{|H^{p}| \cdots} |H^{q+1}|}\; Z_T$$

__だいたい__ $T/G^{[p]}/G^{[q]} = T$

1. ここの定数

fact $H^r \simeq H^{d-r} \Rightarrow |H| = |H^{d-r}|$

q : even

$$= \prod_{r=0}^{d} |H^r|^{(-1)^{r+1}} = \prod_{r=0}^{d} |C^r|^{(-1)^{r+1}}$$

$$|C^r| = N^{(r\text{単体の数})}$$

$$= N^{-\chi}$$

$$\chi := \sum_{r=0}^{d} (-1)^r \, (r\text{単体の数})$$

Euler数

q : odd

$$= N^{\chi}$$

d : odd $\Rightarrow \chi = 0$

(factから)

d : even $\Rightarrow$ Euler counter term で

$Z_{T/G^{[p]}/G^{[q]}} = Z_T$ とできる

例 $d=2n$, $p=q=n-1$

n: even $\Rightarrow$ r単体に $(\sqrt{N})^{(-1)^{r+1}}$

(p, q : odd) Eg. $d=4$

n: odd

(p, q : even) Eg. $d=2$ $\Rightarrow$ r単体に $(\sqrt{N})^{(-1)^{r}}$

2. 背景ゲージ場入れる

$$Z_{T/G^{[p]}/G^{[q]}}[A]$$

$$= \sum_{\substack{a\in H^{p+1} \\ b\in H^{q+1}}} e^{\frac{2\pi i}{N}\int A\cup b}\, e^{\frac{2\pi i}{N}\int b\cup a}\, Z_T[a]$$

$\int b\cup(a-A)$ ①, p, q : even

$\int b\cup(a+A)$ ②, それ以外

$$= \begin{cases} Z_T[A] & ① \quad \text{Eg. } 2d \quad p=q=0 \\ Z_T[-A] & ② \quad \text{Eg. } 4d \quad p=q=1 \end{cases}$$

荷電共役 (※ $\mathbb{Z}_2$の場合 $-A=A$ なので違わない)

2次元QFT with $\mathbb{Z}_N$ 0-form（ふつうの）対称性
$\mathcal{T}$

で　$\mathcal{T}/\mathbb{Z}_N \simeq \mathcal{T}$ のものがある

例：
- Ising, $K=K_c$　KW duality
- Free scalar, radius $\sqrt{N}$　T duality
- ⋮

⇒ 同じタイプの非可逆対称性

⇓ アナロジー

4次元QFT with $\mathbb{Z}_N^{[1]}$
$\mathcal{T}$

で　$\mathcal{T}/\mathbb{Z}_N^{[1]} \simeq \mathcal{T}$ のものがある

例：
- $\mathbb{Z}_2$ 格子ゲージ理論 $K=K_c$　KWW 双対性
  （Ising に似ている）
- Maxwell 理論 $\frac{1}{g^2} = \frac{N}{4\pi}$, $\theta = 0$　EM 双対性
- $\mathcal{N}=4$ SU(N) SYM $\frac{1}{g^2} = \frac{1}{4\pi}$, $\theta = 0$　MO 双対性
- ⋮

⇒ 同じタイプの非可逆対称性

☆ 4次元 $\mathbb{Z}_2$ 格子ゲージ理論

T 4次元立方格子上 トポロジカルでないもの

各リンクに $a_\ell = 0, 1$

$$Z_T(K) = \sum_{\{a\}} \exp\left(K \sum_{\substack{\text{plaq.} \\ \langle 1234 \rangle}} (-1)^{a_1+a_2+a_3+a_4} \right)$$

$\mathbb{Z}_2^{[1]}$ 中心対称性

KW 双対性に似た双対性 [Wegner]

$$\frac{1}{(\sinh 2K)^{\bullet}} Z_{T/\mathbb{Z}_2^{[1]}}(K) = \frac{1}{(\sinh 2\tilde{K})^{\bullet}} Z_T(\tilde{K})$$

$$\sinh 2K \sinh 2\tilde{K} = 1$$

▨ 相構造

$K \ll 1$ (強結合)

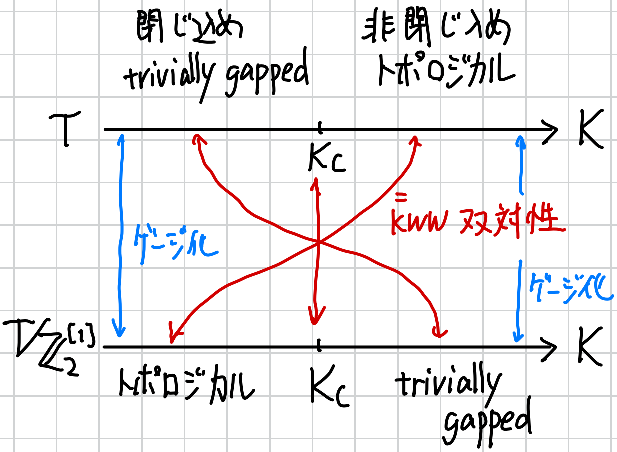
強結合展開 ⇒ 閉じ込め ($\mathbb{Z}_2^{[1]}$ は残る)

(trivially gapped)

$K \gg 1$ (弱結合)

flat な配位が dominate ⇒ 非閉じ込め ($\mathbb{Z}_2^{[1]}$ は SSB)

(gapped, トポロジカルな自由度)

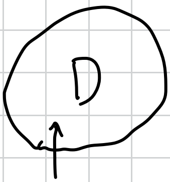


▨ KWW 双対性の欠陥 [Koide, Nagoya, SY]

(ちょっと別の説明)

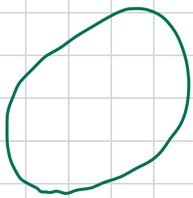
$K=K_c$ で $T/\mathbb{Z}_2^{[1]} \simeq T$

half space gauging



$\mathbb{Z}_2^{[1]}$ をゲージ化

$\Rightarrow$



codim 1 欠陥

トポロジカルであること ← 2次元のKW欠陥と同様

"quantum dimension"

S^3

$\shortparallel$

D^4 = • $= \frac{1}{\sqrt{2}}$

変形　サイト1個　(Euler)

従来の対称性ではない

「非可逆対称性」

☆ 4次元 Maxwell 理論 のEM-duality (S)

- 電磁双対の導出
- そこから導かれる(非可逆)対称性

■ Maxwell 理論

$$I_\tau = \int_X \mathcal{L} \qquad \tau := \frac{\theta}{2\pi} + i\frac{4\pi}{g^2}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g^2} F \wedge * F - \frac{i\theta}{8\pi^2} F \wedge F$$

A: $U(1)$ゲージ場 , $F := dA$: 場の強さ

準備

$$F = F^+ + F^- \qquad F^\pm := \frac{1}{2}(F \pm * F)$$

(anti-) self-dual part

⇓

$$\mathcal{L} = -\frac{2\pi i}{8\pi^2}\left(\tau F^+ \wedge F^+ + \bar{\tau} F^- \wedge F^-\right)$$

S-duality

I_τ と $I_{-\frac{1}{\tau}}$ は等価 (以下 Witten, hep-th/9505186 を参考)

(1) B : $U(1)$ 2-form gauge field

ゲージ変換. パラメータ Λ : $U(1)$ 1-form gauge field

$$A \to A + \Lambda$$
$$B \to B + d\Lambda$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F} := F - B$ がゲージ不変

$$\mathcal{L}_\tau(\mathcal{F}) = -\frac{2\pi i}{8\pi^2}\left(\tau \mathcal{F}^+ \wedge \mathcal{F}^+ + \bar{\tau} \mathcal{F}^- \wedge \mathcal{F}^-\right)$$

Λゲージ不変
だけど一般には Maxwell 理論と異なる

(2) Maxwell 理論と等価な理論を作る.

$$Z_{M_\tau} = \int DA\, e^{-\int \mathcal{L}_\tau(F)}$$

$$\int DB\, \delta(B) = 1$$

$$= \int DA \int DB\, \delta(B)\, e^{-\int \mathcal{L}_\tau(F)}$$

$\delta(B) = 0$ if B が pure gauge でない

ゲージ不変

$$Z_{M_\tau} = \int DADB\ \delta(B)\, e^{-\int \mathcal{L}_\tau(\mathcal{F})}$$

$(\hat{A}: U(1)$ゲージ場$)$

公式

$$\boxed{\delta(B) = \int D\tilde{A}\ e^{-\frac{i}{2\pi}\int \tilde{A}\wedge dB}, \quad \tilde{A}: U(1)\text{ゲージ場}}$$

"証明" のスケッチ　　$(H^2(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$ (torsionがない)とき$)$

$$F(B) := \int D\tilde{A}\ e^{-\frac{i}{2\pi}\int \tilde{A}\wedge dB}$$

(i) $F(B) = 0$, $B \neq$ pure gauge

(ii) $\int DB\, F(B) = 1 \iff \int DB\, D\tilde{A}\ e^{-\frac{i}{2\pi}\int \hat{A}\wedge dB}$ が自明な理論

(i)

$$A = \sum_j n_j a_j + b$$

ω_j が生成子

b: 1形式 トポロジカルに自明

$(2\pi\omega_j = da_j)$

$\Rightarrow H^2(X,\mathbb{Z}) \ni \sum_j n_j \omega_j$, $n_j \in \mathbb{Z}$

$$\int D\tilde{A} = \prod_j \underbrace{\sum_{n_j}}_{\text{Wilson surface}\ \int_{PD(\omega_j)} B \in 2\pi\mathbb{Z}} \underbrace{\int Da}_{dB=0}$$

(ii) $X = M \times S^1$ のとき

S^1: 時間と思って正準量子化

$\Rightarrow$ Hilbert空間は1次元, Hamiltonian $= 0$

切ったり貼ったり

$$Z_{M_\tau} = \int DB\, DA\, D\tilde{A}\ \exp\left[- \int \underbrace{\left(\frac{i}{2\pi} \tilde{A} \wedge dB + \mathcal{L}_\tau(\mathcal{F}) \right)}_{\mathcal{L}} \right]$$

(3) Λ ゲージ変換 $\Rightarrow A=0$

B を積分

$$\frac{i}{2\pi} \tilde{A} \wedge dB = -\frac{i}{2\pi} \tilde{F} \wedge B = -\frac{i}{2\pi} \tilde{F}^+ \wedge B^+ - \frac{i}{2\pi} \tilde{F}^- \wedge B^-$$

$$\frac{(2\pi)^2}{2\pi i} \mathcal{L}$$

$$= \underbrace{- \tilde{F}^+ \wedge B^+}\ - \tilde{F}^- \wedge B^- \underbrace{- \frac{1}{2}\tau B^+ \wedge B^+}\ - \frac{1}{2}\bar{\tau} B^- \wedge B^-$$

$$\underbrace{\qquad} = -\frac{1}{2}\tau \left(B^+ + \frac{1}{\tau} \tilde{F}^+ \right) \wedge \left(B^+ + \frac{1}{\tau} \tilde{F}^+ \right) + \frac{1}{2\tau} \tilde{F}^+ \wedge \tilde{F}^+$$

$$B^{+\prime} := B^+ + \frac{1}{\tau} \tilde{F}^+ \quad \Rightarrow \quad B^{\prime +} \text{ を Gauss 積分}$$

($\Rightarrow \tau$ によるけど [Witten 95]
Euler, signature counter term
で消せる)

B^-, $\tilde{F}^-$ の方も同様

$$\mathcal{L} \to \frac{2\pi i}{(2\pi)^2} \left[-\frac{1}{2\tau} \tilde{F}^+ \wedge \tilde{F}^+ - \frac{1}{2\bar{\tau}} \tilde{F}^- \wedge \tilde{F}^- \right] = \mathcal{L}_{-\frac{1}{\tau}}$$

$$M_\tau \simeq M_{-\frac{1}{\tau}}$$

■ $\mathbb{Z}_N^{[1]}$ ゲージ化

$$\int DB\, D\tilde{A}\ \exp\left(-\frac{iN}{2\pi}\int \tilde{A}\wedge dB\right)$$ ← $\mathbb{Z}_N^{[1]}$ ゲージ理論

$B \sim \mathbb{Z}_N$ 2-formゲージ場

⇓

M_τ : $\mathbb{Z}_N^{[1]} \subset U(1)^{[1]}$ 対称性

$$Z_{M_\tau/\mathbb{Z}_N^{[1]}} = \int DB\, D\tilde{A}\, DA\, \exp\left[-\int \mathcal{L}\right]$$

$$\mathcal{L} = \frac{iN}{2\pi}\tilde{A}\wedge dB + \mathcal{L}_\tau(F)$$

⇓ さっきと同じ

$$Z_{M_\tau/\mathbb{Z}_N^{[1]}} = Z_{M_{-\frac{N^2}{\tau}}} \Rightarrow M_\tau/\mathbb{Z}_N^{[1]} \simeq M_{-\frac{N^2}{\tau}}$$

($N=1$ ならさっきの)

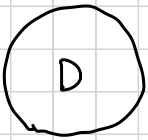
$$T := M_{\tau=iN} \Rightarrow T/\mathbb{Z}_N^{[1]} \simeq T$$

⇒ 非可逆対称性

▨ 対応するトポロジカル欠陥

half-space gauging $\quad \tau = iN$

Dの内部だけ $\tilde{A}, B$ を導入



$$B\big|_{\partial D} = 0$$ (Dirichlet boundary condition)

(⇒ ゲージ不変)

$$\mathcal{L}_{D\text{内}} = \frac{iN}{2\pi} \tilde{A} \wedge \underbrace{dB}_{-\mathcal{F} = -F + B} + \mathcal{L}_{iN}(\mathcal{F})$$

← (Λゲージ不変)

$$= \frac{iN}{2\pi} \tilde{F} \wedge \mathcal{F} + \mathcal{L}_{iN}(\mathcal{F})$$

$$= \underline{\frac{iN}{2\pi} \tilde{F} \wedge F} \; \underline{- \frac{iN}{2\pi} \tilde{F} \wedge B + \mathcal{L}_{iN}(\mathcal{F})}$$

→ Bを積分

$$\int_D \frac{iN}{2\pi} \underbrace{\tilde{F} \wedge F}_{d(\tilde{A} \wedge dA)} \qquad \mathcal{L}_{iN}(\tilde{F})$$

$$= \int_M \frac{iN}{2\pi} \tilde{A} \wedge dA \qquad M = \partial D$$

A	$\tilde{A}$
$\mathcal{L}_{iN}(F)$	$\mathcal{L}_{iN}(\tilde{F})$

↑

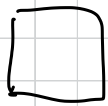
$$\int_M \frac{iN}{2\pi} \tilde{A} \wedge dA$$

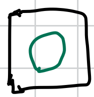
N = 1 のとき

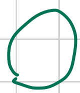
⇒ 普通の対称性

全体で

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2\pi}\tilde{A}\wedge dB + \mathcal{L}_i(\mathcal{F})$$

全体で $\tilde{A}$ を積分 ⇒  全体でMaxwell

D内 A, Bを積分
D外 $\tilde{A}$ を積分 ⇒  トポロジカル欠陥

⇒ $M = \partial D$  $= 1$

※ 2次元自由スカラーのT双対は
自己双対の点では普通の対称性
↓
$SU(2)\times SU(2)$ の1部

⇝ 4次元のアナロジー?