# 一般化対称性について

山口 哲 (大阪大学)

1. 導入
  - 対称性とは
  - トポロジカル欠陥：最初の導入
  - 注意

2. 有限群のゲージ場
  - ゲージ場の復習
  - パッチワーク
  - 有限群のゲージ場

3. 2次元双対性欠陥
  - 双対対称性（量子対称性）
  - 双対性
  - 双対性欠陥
  - 応用：相構造について

# 文献　（ほんの一部．他の文献は [1] の文献が参考になる）

レビュー

[1] Shao, 2308.00747
非可逆対称性のレビュー．
文献も充実している．

この講義に特に関係の深いオリジナル論文

[2] Koide, Nagoya, SY, 2109.05992

[3] Choi, Cordova, Hsin, Lam, Shao
2111.01139

[4] Kaidi, Ohmori, Zheng, 2111.01141

[5] Aasen, Mong, Fendley, 1601.07185
2008.08598

[6] Bhardwaj, Tachikawa, 1704.02330

[7] Chang, Lin, Shao, Wan, Yin, 1802.04445

# 1. 導入

## ☆ 対称性とは？

場の理論で対称性とは何か？

いろんな答えがありうる.

そのうち 3 つ

① 場 $\phi$, 作用 $S(\phi)$

変換 $\phi \to \phi'$ で $S(\phi) = S(\phi')$ となるもの

② Hamiltonian $\hat{H}$

(反)ユニタリー演算子 $\hat{U}$ で $\hat{H}\hat{U} = \hat{U}\hat{H}$ となるもの

③ トポロジカル欠陥 (後で)

①, ② の不便な点　：大域的な記述である.

① 時空全体で一斉に変換しなければならない

(例：2次元の共形対称性 (知っている人向け)
複素座標 $z \to f(z)$ 正則
メビウス変換以外は 1:1 でない 「変換」ではない!?
① の意味での対称性ではない.)

② $\hat{H} = \int d^{d-1}x \, \hat{T}_{00}$
$\hat{U}$ :
空間全体にひろがる巨大な演算子

$\boxed{\text{(大域的対称性だけど) 局所的な記述が望ましい.}}$

④ 連続的対称性, 無限小変換の場合

$\exists J^{\mu}(x) \qquad \partial_{\mu} J^{\mu}(x) = 0$

局所的！

離散的な場合は??

③ (内部対称性) トポロジカル欠陥

# ☆ トポロジカル欠陥：最初の導入

## □ 保存則：U(1)対称性の場合

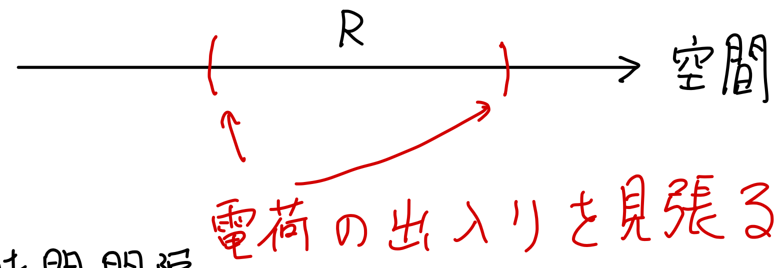
U(1)対称性 ⇒ 電荷Qの保存

(② $[\hat{H},\hat{Q}]=0$)

(Q：宇宙全体の電荷)が時間変化しない.

**本当は局所的に保存する** (④ $\partial_\mu J^\mu=0$)

---

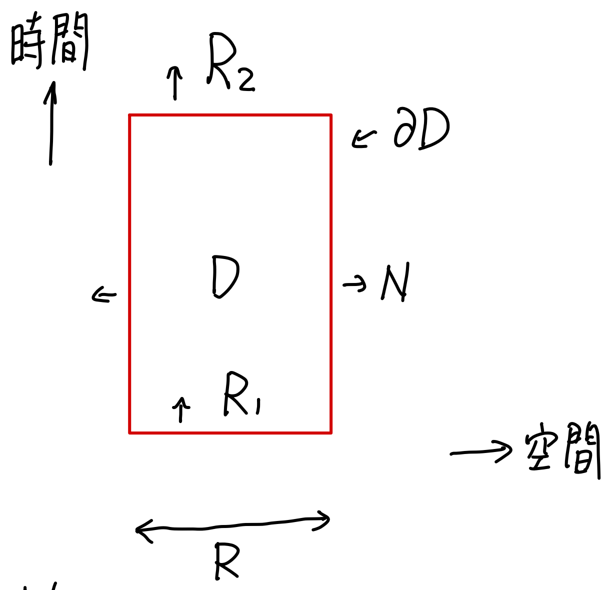



ある時間間隔

(∂Rから出た電荷) + (R内の電荷の増加) = 0

⇑

④ $\partial_\mu J^\mu = 0$




$$M := \partial D = R_2 - R_1 + N$$

$$0 = \int_D d^d x\, \partial_\mu J^\mu = \int_M dS_\mu J^\mu$$

$$= \underbrace{\int_{R_2} d^{d-1}x\, J^0 - \int_{R_1} d^{d-1}x\, J^0}_{\text{電荷の増加}} + \underbrace{\int_N dS_\mu J^\mu}_{\partial R\text{から出ていく電荷}}$$

(※曲った時空でもよい

$$\nabla_\mu J^\mu = 0 \ , \Rightarrow 0 = \int_D d^d x \sqrt{-g}\, \nabla_\mu J^\mu = \int_M dS_\mu J^\mu$$
)

⇓

(後の都合上) 有限変換の演算子 $\left( \hat{U}_\alpha := e^{i\alpha \hat{Q}} \right)$

$$\rightsquigarrow \quad U_\alpha(M) = e^{i\alpha Q(M)} , \quad Q := \int_M dS_\mu J^\mu$$

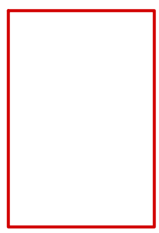
**対称性欠陥**

時空の他の部分と性質が異なる
(Lagrangian密度
格子)

局所的な保存則:

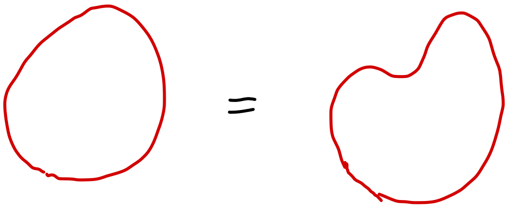
$M = \partial D$ のとき　$U_\alpha(M) = 1$

絵で



$U_\alpha$　$= 1$

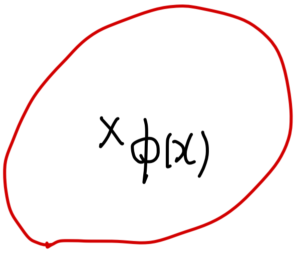
対称性欠陥の値は連続的に変えても値は変わらない



電荷 $q$ の局所演算子 $\phi(x)$ = ($J^\mu(x)$ のソース)

$q$ (の粒子…)

$\times\ \phi(x)$




$= e^{i\alpha q} \times \phi(x)$

⇒ Ward-Takahashi 恒等式

(cf. 2d CFT)

## □ 離散対称性の保存量

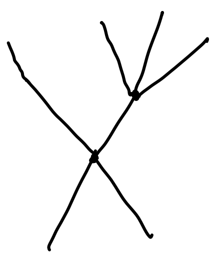
$\mathbb{Z}_2 := \{1, \eta\}$ , $\eta^2 = 1$

例: $\phi^4$理論 ① $\phi \to -\phi$

$\hat{\eta}\hat{\phi}(x)\hat{\eta}^{-1} = -\hat{\phi}(x)$

($\hat{\eta}$ を $\hat{\phi}$ で表わせるか?)

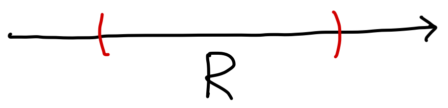
⇒ ② $\hat{H}\hat{\eta} = \hat{\eta}\hat{H}$



$\hat{\eta}$ : $\phi$粒子の個数の偶奇
(全宇宙)

# 局所的な保存則？

簡単のため、粒子の個数の偶奇＝電荷と呼ぶ



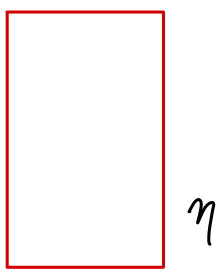

(∂Rから出ていった電荷) + (R内の電荷の減少) = 0 ……(*)

は成り立ちそう。

しかし、カレントはない！

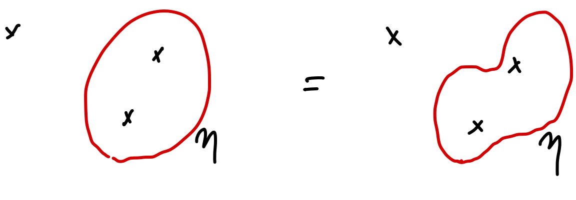
変わりに トポロジカル欠陥 $\eta(M)$ （さっきの $U_\alpha(M)$ にあたるもの）がある。

$\mathbb{Z}_2$ 対称性の $\boxed{\text{対称性欠陥}}$

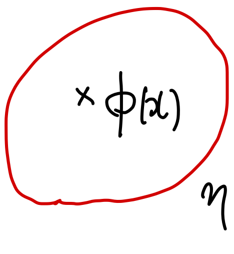



$= 1 \Rightarrow (*)$

• トポロジカル




• $\phi(x)$：電荷1 （粒子を1つ作る／消す (奇数個)）




$= -1 \times \phi(x)$

# ☆ 注意

## □ Euclidean の定式化

Lorentzian の理論とは別の「Euclidean の理論」を考えているわけではない

「理論」は同じ、定式化、考えやすい量が違う。

例：正準分配関数

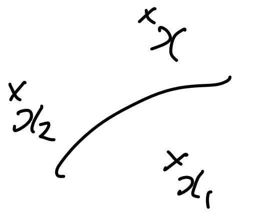
$$\mathrm{Tr}\, e^{-\beta\hat{H}} = \int D\phi\, e^{-S_E(\phi)}$$

↑ Euclidean，時間方向周期 $\beta$

## □ 演算子関係式

例：量子論で $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$

↑ 略記




$$\left( \langle \partial_\mu J^\mu(x)\, \mathcal{O}_1(x_1) \cdots W(C) \cdots \rangle = 0 \right.$$

ただし $x$ は $x_1, \cdots, C, \cdots$（他の演算子のささっているところ）と異なる )

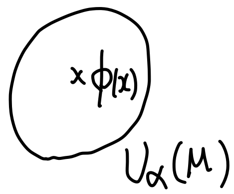
$$\left( \langle \cdots \rangle := \frac{1}{Z} \int D\phi \cdots e^{-S_E(\phi)} \right.$$

（$\beta \to \infty$ なら）

$$\left. = \langle 0 | T(\cdots) | 0 \rangle \right)$$

↑ 虚時間順序積

例




$= e^{i\alpha} \times \phi(x)$

⇑ 略記

$$\langle U_\alpha(M)\, \phi(x)\, \underbrace{\cdots}\, \rangle = e^{i\alpha} \langle \phi(x)\, \underbrace{\cdots}\, \rangle$$

同じ、任意

Mの内側には入っていない。

# 2. 有限群のゲージ場

## ☆ ゲージ場の復習

理論 $S(\phi)$

大域的対称性の群 $G$ （Eg. $SU(N)$ $N\times N$ ユニタリー $\det=1$ ）

$\rightarrow$ Lie代数 $\mathfrak{g}$ （Eg. $su(N)$ $N\times N$ エルミート $\mathrm{tr}=0$ ）

$$\phi \rightarrow \phi^g = \rho(g)\phi \quad (g\in G)$$

$$S(\phi^g) = S(\phi)$$

表現
（例：$SU(N)$ のときで $\rho(g)=g$ 「基本表現」）

ゲージ場：$\mathfrak{g}$ に値を持つベクトル場 $A_\mu(x)$

ゲージ変換：パラメータ $g(x)\in G$

$$A_\mu^g = g A_\mu g^{-1} + i g \partial_\mu g^{-1}$$

（共変微分 $D_\mu := \partial_\mu - iA_\mu$ が
$D_\mu^g = g D_\mu g^{-1}$ と変換する）

作用

$S(\phi, A)$ ： $S(\phi, A=0) = S(\phi)$ ,

$S(\phi^g, A^g) = S(\phi, A)$ （「ゲージ不変」）

になるように決める。

$$S(\phi, A) = S(\phi) + \int d^d x\, A_\mu(x) J^\mu(x) + O(A^2)$$

$$\left( \Leftrightarrow \left. \frac{\delta S(\phi, A)}{\delta A_\mu(x)} \right|_{A=0} = J^\mu(x) \right)$$

カレント

## 背景ゲージ場

$$Z(A) = \int D\phi\, e^{-S(\phi, A)}$$

$A$ は積分しない.

$A$ : 背景ゲージ場

⇒ ゲージ化してない理論の解析に有用

Eg. $$\langle J_\mu(x) J_\nu(y) \cdots \rangle = \frac{1}{Z(0)} \left( -\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \right) \left( -\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)} \right) \cdots \left. Z(A) \right|_{A=0}$$

Eg. 't Hooft アノマリー

$$Z(A^g) = e^{i\mathcal{A}(A, g)} Z(A)$$

## Dynamical なゲージ場

$$Z = \int DA \int D\phi\, e^{-S(\phi, A)}$$

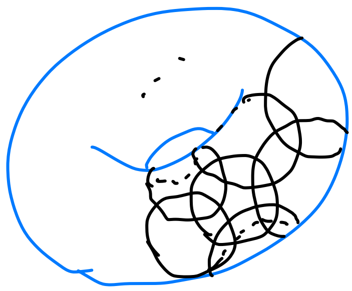
$A$ についても積分する

「ゲージ化」

# ☆ パッチワーク

実はゲージ場は単に $\mathfrak{g}$ に値を持つベクトル場ではない.
(Eg. モノポール)

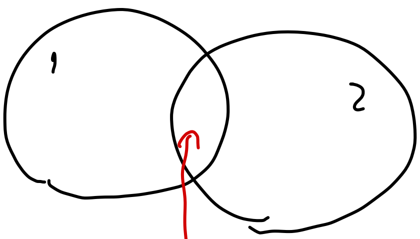
時空をパッチ(ボールと同じトポロジーを持つ開集合)に分ける



(※理論の記述のために手で決めたもの
cf. 座標)

① それぞれのパッチ $i$ 上で
(仮の)物質 $\phi^i$, ゲージ場 $A_\mu^i$ ($\mathfrak{g}$ に値を持つゲージ場)

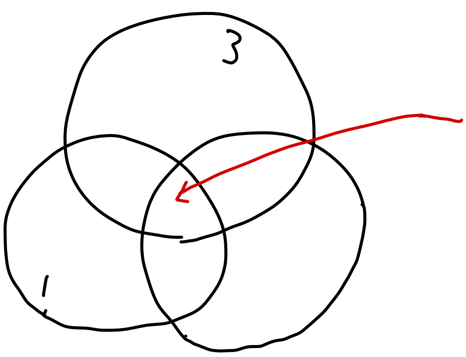
② パッチどうしはゲージ変換でつなぐ



$g_{12}(x)$
変換関数

$$\phi^1(x) = g_{12}(x)\,\phi^2(x), \quad A_\mu^1(x) = g_{12}(x) A_\mu^2(x) g_{12}(x)^{-1} + i\, g_{12}(x)\, \partial_\mu g_{12}(x)^{-1}$$

③ 3つのパッチの重なりで整合



$$g_{12}(x)\, g_{23}(x) = g_{13}(x)$$

④ ゲージ変換はパッチごと

$\lambda_i(x) \in G$ :
$$\phi^{i\prime}(x) = \lambda_i(x)\,\phi^i(x)$$
$$A^{i\prime}_\mu(x) = \lambda_i(x)\,A^i_\mu(x)\,\lambda_i(x)^{-1} + i\lambda_i(x)\,\partial_\mu\lambda_i(x)^{-1}$$
$$g'_{ij}(x) = \lambda_i(x)\,g_{ij}(x)\,\lambda_j(x)^{-1}$$

ゲージ場の配位 $(A^i_\mu(x),\ g_{ij}(x))$
ゲージ変換 $\lambda_i(x)$

## ☆ 有限群のゲージ場

$G$ : 有限群 ⇝ Lie代数 $\mathfrak{g} = \{0\}$

$\Rightarrow \quad A^i_\mu(x) = 0$

変換関数 $g_{ij}(x) \in G$ なめらかに $x$によることはできない.

$\Rightarrow \quad g_{ij} \in G$ 定数

$$\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{A^2_\mu(x)} = g_{12}(x)\,\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{A^1_\mu(x)}\,g_{12}(x)^{-1} + i\,g_{12}(x)\,\underset{\substack{\parallel \\ 0 \\ (\text{定数なので})}}{\partial_\mu g_{12}(x)^{-1}}$$

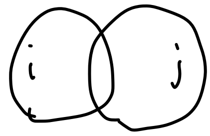
ゲージ変換 $\lambda_i \in G$ 定数

(トポロジカルなゲージ場)

(格子なら有限群でトポロジカルでないゲージ場を考えることができる)

有限群のゲージ場　　これを $A$ と書くことにする

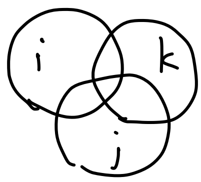
2つのパッチの重なり $i,j$　$g_{ij} \in G$



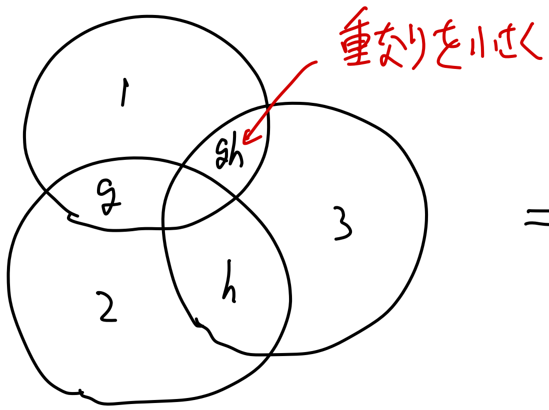

ただし 3つのパッチの重なり $ijk$ で　$g_{ij}\, g_{jk} = g_{ik}$

ゲージ変換 $\lambda_i \in G$

$$g'_{ij} = \lambda_i\, g_{ij}\, \lambda_j^{-1}$$



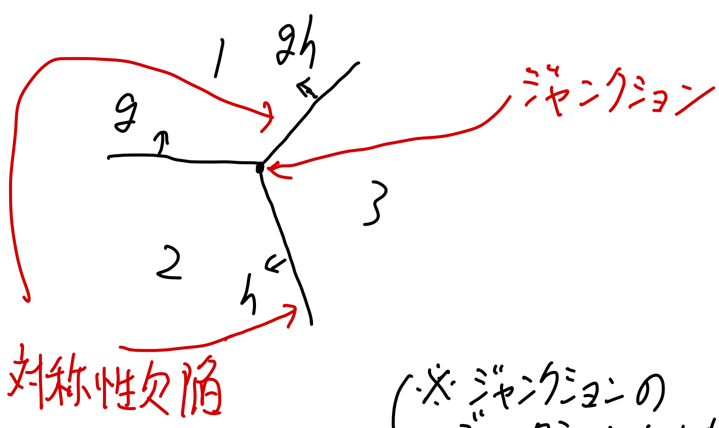

## □ 対称性欠陥との関係



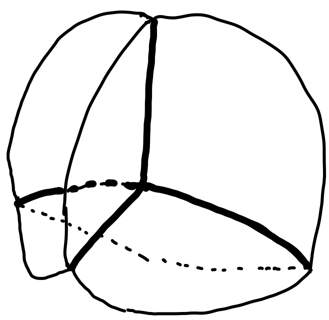

パッチの絵は繁雑

⇒

**対称性欠陥の配位**




(※ジャンクションのジャンクションとかもある



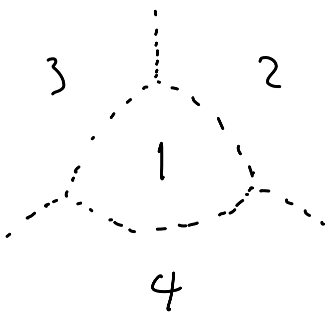
# 有限群の場合

$$\boxed{\text{ゲージ場の配位} = \text{対称性欠陥の配位}}$$

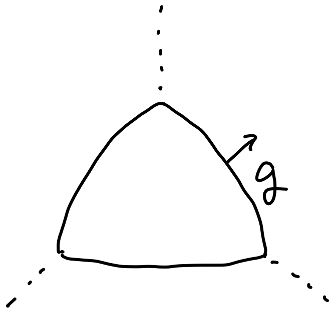
□ 対称性欠陥について

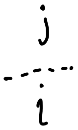
$g_{j1} = 1$

ゲージ変換
$\lambda_1 = g^{-1}$, 他 $= 1$

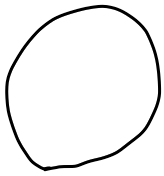


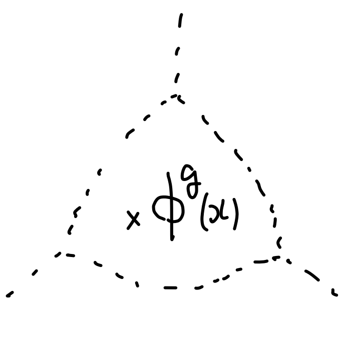

=



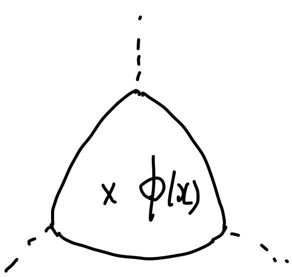



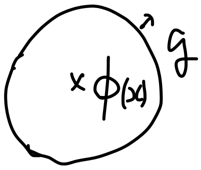

$g_{ij} = 1$
(自明な欠陥)
無いのと同じ

⇒  = 1 (Ward-Takahashi 恒等式)

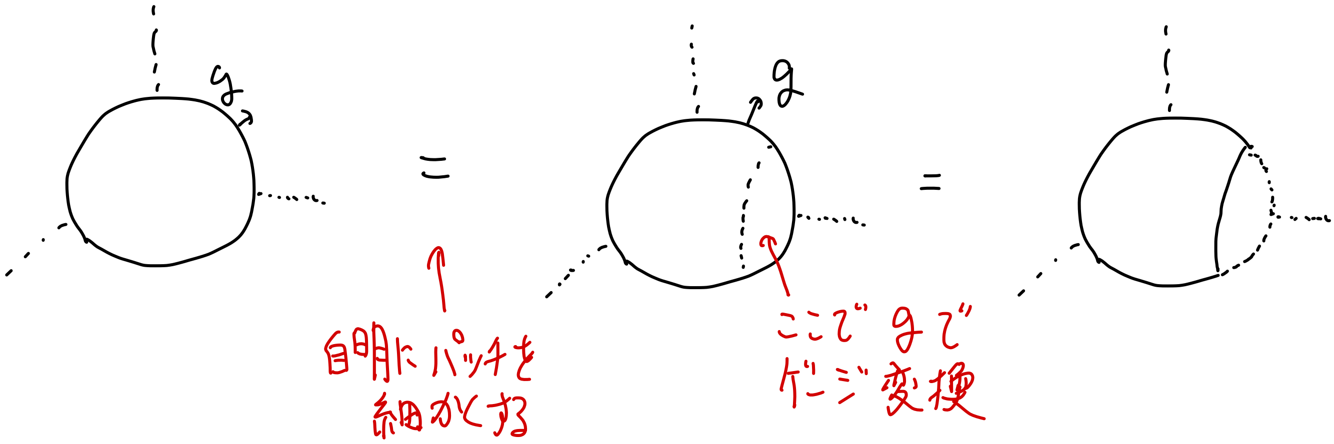


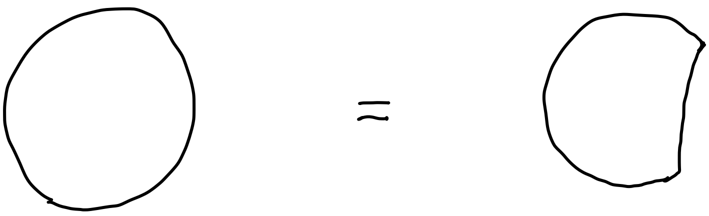

=




⇒ 


= × $\phi^g(x)$ (WT 恒等式)



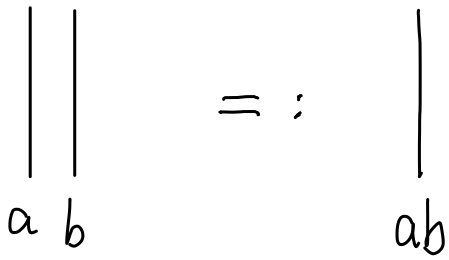



"トポロジカル"

# 逆に

codimension 1 のトポロジカル欠陥
　　　　　　　　　　　　　TD
ラベル　$a$

2つのTDを並べておく ⇒ 1つのTD（フュージョン）




（かけ算の定義）

何もないTD　1

逆元？

TD $a$ $\rightarrow$ TD $a^{-1}$

s.t. $a \; a^{-1} = a^{-1} \; a = 1$

Yes $\Rightarrow$ 群 $G$ $\Rightarrow$ 普通の対称性

$\times \phi(x)$ ($a$) $=: \times \phi^{a}(x)$ ← $\phi^{a}(x)$ の定義

No $\Rightarrow$ 群構造なし $\Rightarrow$ 普通の対称性ではない

$\boxed{\text{非可逆対称性}}$

## 対称性とは③

Codim 1 のトポロジカル欠陥
群構造があるもの

$\boxed{\text{一般化対称性} \quad = \quad \text{トポロジカル欠陥}}$

欠陥であってトポロジーを変えずに連続変形しても値を変えない

- p形式対称性：
  codim 1 ⇒ codim p+1
  (ふつうの対称性は 0形式対称性)

- 非可逆対称性：群構造がないもの

この後の目標：非可逆対称性の例を挙げる.
応用例

↓ ふつうの対称性に戻って準備

## ゲージ化

有限群の対称性について

$A :=$ (ゲージ場の配位) = (対称性欠陥の配位)

$$Z(A) = \int D\phi \, e^{-S(\phi, A)}$$

⇓ ゲージ化

$$Z_{gauged} = \frac{1}{|G|^V} \sum_A Z(A)$$

$V$: パッチの数 ⇒ $|G|^V$ ゲージ変換の数
= 「ゲージ体積」

※ ゲージ不変性 $Z(A') = Z(A)$ （$A'$：ゲージ変換）
が成り立たない場合がある.
or
$Z(A)$がパッチのとり方による場合がある

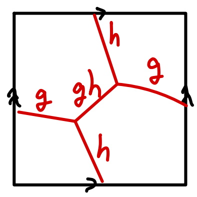
⇒ ゲージ化できない「アノマリー」

※ ジャンクションの部分に入れる$A$のみによるウェイトに任意性がある $Z'(A) = Z(A)e^{iS_{SPT}(A)}$

"SPT相", "invertible phase", "discrete torsion", ‥

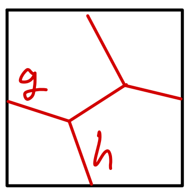
例：$T^2$, $G$：アーベル群

パッチ1つ

$Z(A) =$ 

$A=(g,h)$ $g,h \in G$

↓ゲージ化

$Z_{\text{Gauged}} = \frac{1}{|G|}\sum_{g,h\in G}$ 


（string, CFTの言葉で orbifold）

# 3. 2次元双対性欠陥

目標：2次元非可逆対称性の例を作る.

☆ 双対対称性（量子対称性）

2次元 QFT $T$
有限アーベル群 $G$ の大域的対称性
アノマリーなし（ゲージ化できる）
例：$T$：$\phi^4$理論，$G=\mathbb{Z}_2$

$\Downarrow$

$G$をゲージ化した理論 $T/G$
次が成り立つ

i) $T/G$ は群 $\hat{G}$ の大域的対称性を持つ
アノマリーなし　「双対対称性」(dual symmetry)
「量子対称性」(quantum symmetry)

ii) $T/G/\hat{G} \simeq T$

以下説明

□ $\hat{G}$：「Pontryagin 双対」

$\hat{G} := \{\rho : G \to U(1)\ 準同型\} = \{既約表現\}/(同値)$

群 $\left\{ \begin{array}{l} \text{積：表現のテンソル積} \\ \quad \rho_1, \rho_2 \to \rho_1\rho_2(g) := \rho_1(g)\rho_2(g) \\ \text{1：自明な表現} \\ \text{逆元：複素共役表元} \quad \rho^{-1}(g) := (\rho(g))^{-1} \end{array} \right.$

だいたい $\hat{G}$：ありうる電荷の集合

群演算：電荷のたし算

- $\hat{\hat{G}} \simeq G$ (canonicalに)

  $\rho \in \hat{G}$, $g \in G$, $g(\rho) := \rho(g) \in U(1)$

- $\widehat{U(1)} \simeq \mathbb{Z}$ (たし算で群), $\hat{\mathbb{Z}} \simeq U(1)$

- $\hat{\mathbb{Z}}_N \simeq \mathbb{Z}_N$ (canonicalではない)

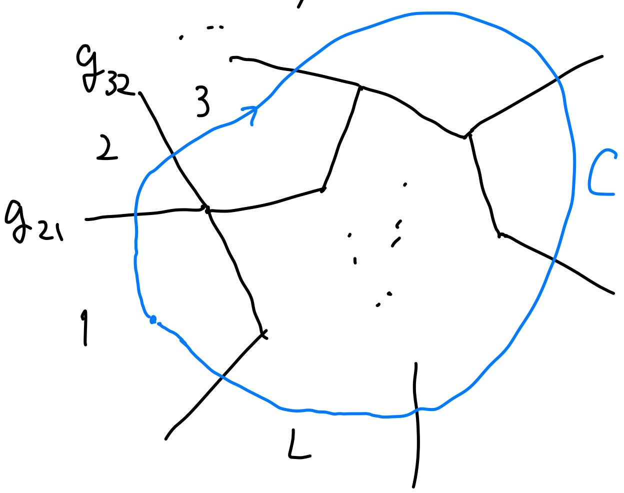
  $G$：有限 $\Rightarrow \hat{G} \simeq G$

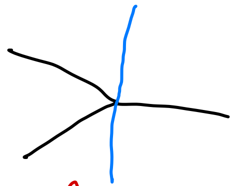
## Wilsonループ

T/G の線欠陥

( $g_{ij}$ は dynamical )

(codim 1)



↑ こういうのは とりあえずやめとく.

C : ループ. パッチをまたぐときは codim 1 のところを通る

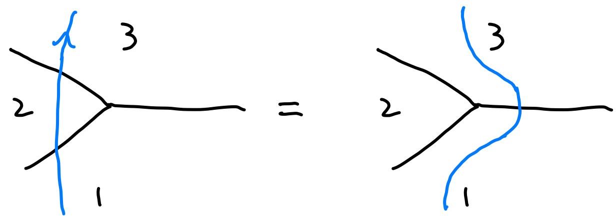
$\rho$ : G の表現

$$W_\rho(C) := \mathrm{tr}\,\rho(g_{L(L-1)} \cdots\cdots g_{32} g_{21})$$

( 既約 (1次元) のとき $= \rho(g_{\cdot\cdot}) \cdots \rho(g_{\cdot\cdot})$ )

( $\mathrm{tr}\,\rho(g)$ を $\mathrm{tr}_\rho\, g$ と書くことがある )

○ トポロジカルであること




$\Leftarrow$ 貼り合っている条件 $g_{32} g_{21} = g_{31}$

∘ フュージョン

$$W_{\rho_1}\ W_{\rho_2} = W_{\rho_1\rho_2}$$

$\rho_1, \rho_2 \in \hat{G}$　　　↑ $\hat{G}$での積

i)

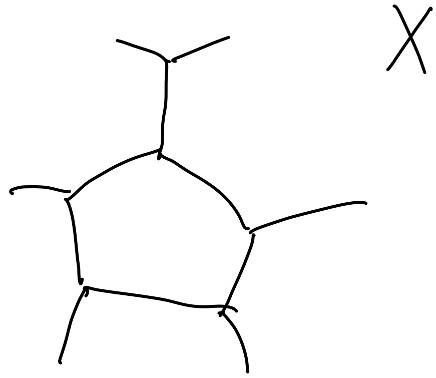
Wilson ループは
codim 1 のトポロジカル欠陥
群 ($\hat{G}$) 構造
||
対称性

※ $G$ が有限非アーベル群の場合
Wilson ループは codim 1 のトポロジカル欠陥

既約表現 $\rho$ ⇒ $\rho \otimes \rho' = 1$ ↙ 自明表現
となる $\rho'$ は無い場合もある.
⇓
群構造なし.

非可逆対称性の例

## □ $\hat{G}$ のゲージ化




$$Z_T(A) = \int D\phi \, e^{-S(\phi, A)}$$

A: Gのゲージ場 = 対称性欠陥の配位

Gのゲージ化

$$Z_{T/G} \sim \sum_{A} Z_T(A)$$

B: $\hat{G}$のゲージ場 = Wilsonループの配位

$$Z_{T/G}(B) \sim \sum_{A} Z_T(A) \; W(B, A)$$

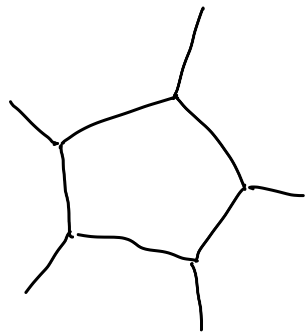
$\hat{G}$のゲージ化

示したいこと

$$Z_{T/G/\hat{G}} \sim \sum_{B:\,\text{Wilsonループの配位}} \sum_{A} Z_T(A)\, W(B,A) = Z_T$$

ちゃんとやる

X: 単連結 ⇒ パッチに分ける

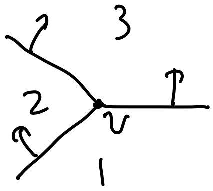


面(パッチ)全体 $C_2$

辺 〃 $C_1$

頂点 〃 $C_0$

- ゲージ場の配位: 各辺に Gの元 $e \in C_1 \Rightarrow g_e \in G$
- flat (パッチが貼り合う条件)




各頂点 $v \to \delta_{U_v, 1}$

$$U_v := g_{32}\, g_{21}\, g_{31}^{-1}$$

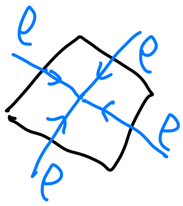
- ゲージ変換 ⇒ 各面

$$|G| =: N$$

$$Z_{T/G} = \frac{1}{N^{|C_2|}} \sum_{\{g\}} Z(g)$$

Wilson loop

各辺 $\rho_e \in \hat{G}$ , 各面 $i$ で "つながっている" 条件




$$L_i := \prod_{e:i\text{の辺}} \rho_e$$

$$\delta_{L_i,1}$$

$$Z_{T/G}(\rho) = \frac{1}{N^{|C_2|}} \sum_{\substack{\{g\} \\ \text{flat}}} Z_T(g) \prod_{e \in C_1} \rho_e(g_e)$$

$$\Downarrow$$

$$Z_{T/G/\hat{G}} = \frac{1}{N^{|C_0|}} \sum_{\{\rho\}} Z_{T/G}(\rho) \prod_{i \in C_2} \delta_{L_i,1}$$

$$= \frac{1}{N^{|C_2|+|C_0|}} \sum_{\substack{\{g\} \\ \text{flat}}} Z_T(g) \sum_{\{\rho\}} \prod_{e \in C_1} \rho_e(g_e) \prod_{i \in C_2} \delta_{L_i,1}$$

$$L_i \in \hat{G} \qquad \delta_{L_i,1} = \frac{1}{N} \sum_{\lambda_i \in G} L_i(\lambda_i) = \frac{1}{N} \sum_{\lambda_i \in G} \prod_{e:i\text{の辺}} \rho_e(\lambda_i)$$

$$= \frac{1}{N^{2|C_2|+|C_0|}} \sum_{\substack{\{g\} \\ \text{flat}}} Z_T(g) \sum_{\{\lambda\}} \sum_{\{\rho\}} \prod_{e \in C_1} \rho_e \big( \underbrace{\lambda_{e_2} g_e \lambda_{e_1}^{-1}}_{g_e^{\lambda}} \big)$$

$e = ij$ $\quad$ $j = e_2$, $g_{ij}$, $i = e_1$ $\qquad$ $\displaystyle\sum_{e\in\hat{G}} e(g) = N\delta_{g,1}$

$$= \frac{1}{N^{2|C_2|+|C_0|}} \sum_{\{\lambda\}} \underbrace{\sum_{\substack{\{g\}\\ \text{flat}}}}_{=\sum_{\substack{\{g^\lambda\}\\ \text{flat}}}} \underbrace{Z_T(g)}_{=Z_T(g^\lambda)} \prod_{e\in C_1} N\delta_{g^\lambda_e,1}$$

(∵ゲージ不変)

$$= \frac{1}{N^{2|C_2|+|C_0|-|C_1|}} \sum_{\{\lambda\}} Z_T(1)$$

$$= \frac{1}{N^{\chi}} Z_T$$

$\chi = |C_2| - |C_1| + |C_0|$

$X$ の Euler 数

$\chi = 2 - 2g$

($g$ は genus)

$$\boxed{Z_{T/G/\hat{G}} = \frac{1}{N^{\chi}} Z_T}$$

局所相殺項で吸収できる

$$Z_{T/G,\mathrm{new}} := \sqrt{N}^{\chi} Z_{T/G,\mathrm{old}}$$

$$= \frac{1}{N^{|C_0|}} \sum_{\substack{\{g\} \\ \mathrm{flat}}} Z_T(g) \underbrace{\prod_{v \in C_0} \sqrt{N} \prod_{e \in C_1} \frac{1}{\sqrt{N}} \prod_{i \in C_2} \sqrt{N}}_{\text{Euler 相殺項}}$$

こうすると (new 省略)

$$\boxed{Z_{T/G/\hat{G}} = Z_T}$$

$\longrightarrow$ ii)

☆ 双対性 (duality)

(ここでの意味)

$T$ : 2d QFT , 有限アーベル群 $G$ 対称性

$T$ が

$$\boxed{T/G \simeq T}$$

$\hat{G} \simeq G$ 対称性　　$G$ 対称性

同型が1つ決まる.

を満たす場合がある

例 : critical lattice Ising, $G = \mathbb{Z}_2$ , Ising CFT $G = \mathbb{Z}_2$

・massless compact real scalar, 半径 $\sqrt{N}$

$G = \mathbb{Z}_N \subset U(1)_{\text{shift}}$ , ⋯

この例

$\phi(x)$ : real scalar　$\phi(x) \sim \phi(x) + 2\pi$

$$S_E(\phi) = \frac{R^2}{4\pi}\int d^2x \sqrt{g}\, g^{\mu\nu}\, \partial_\mu\phi\, \partial_\nu\phi$$

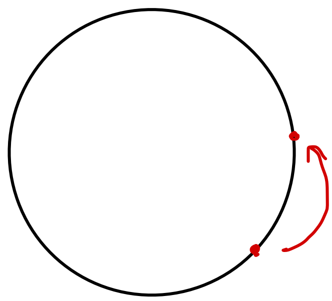
→ $T_R$ と書くことにす

$$\mathbb{Z}_N = \{ \underbrace{e^{\frac{2\pi i}{N}k}}_{\omega^k},\ k = 0, 1, \cdots, N-1 \}$$

$$\omega^k : \phi \to \phi' = \phi + \frac{2\pi k}{N}$$

事実

(1) $T_R/\mathbb{Z}_N \simeq T_{R/N}$


同一視

$$\phi \sim \phi + \frac{2\pi}{N}$$

$$\tilde{\phi} := N\phi \Rightarrow \tilde{\phi} \sim \tilde{\phi} + 2\pi$$

$$S = \frac{R^2/N^2}{4\pi}\int d^2x \sqrt{g}\, g^{\mu\nu}\partial_\mu\tilde{\phi}\,\partial_\nu\tilde{\phi}$$

(2) $T_R \simeq T_{1/R}$ (T-duality)

$$\Rightarrow \quad T_R/\mathbb{Z}_N \underset{(1)}{\simeq} T_{R/N} \underset{(2)}{\simeq} T_{N/R} \overset{?}{\simeq} T_R$$

$\frac{N}{R} = R$ なら成り立つ

$\Rightarrow \quad R = \sqrt{N}$

---

※ 事実:

$R=1$ のとき、(2) $\Rightarrow$ ふつうの対称性

↓

実は $SU(2)\times SU(2)$ 対称性がある

$e^{\pi i J^1}$ : $J^3 \to -J^3$

が T-duality　　$J^3 = i\partial\phi$

やりたいこと

(1) ゲージ化を含む操作で元にもどる $\Rightarrow$ 一般化対称性

# ☆ 双対性欠陥

$T \simeq T/G \Rightarrow$ 非可逆対称性

(Tambara-Yamagami category)

簡単のため

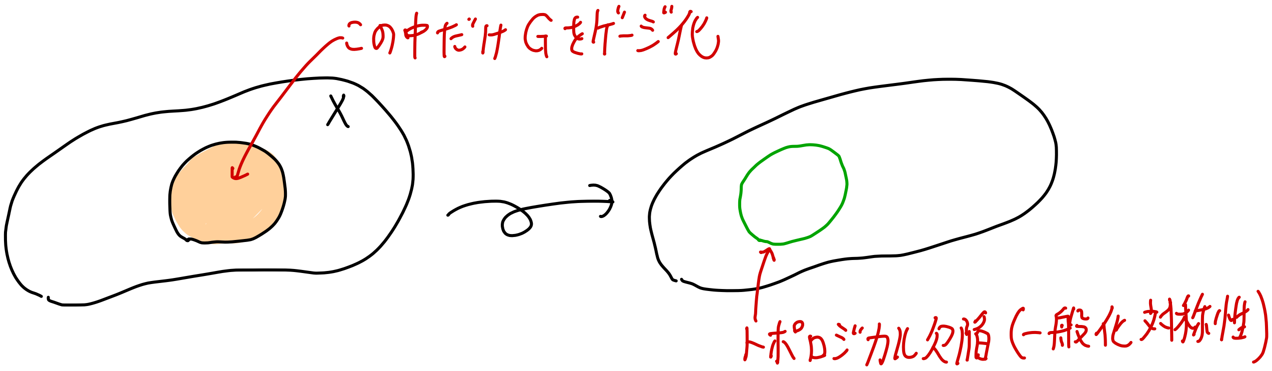
$$G=\mathbb{Z}_N=\{e^{\frac{2\pi i}{N}k} \mid k=0,1,\cdots,N-1\}$$

$$\hat{G}=\{\rho_\ell:\mathbb{Z}_N\to U(1) \mid \rho_\ell(e^{\frac{2\pi i k}{N}})=e^{\frac{2\pi i k\ell}{N}},\ \ell=0,1,\cdots\}$$

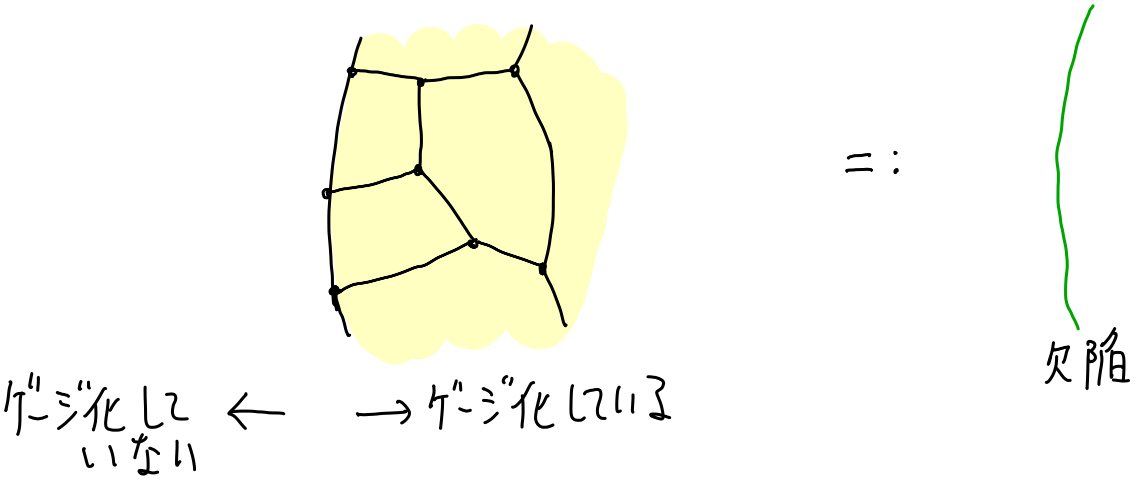
$$\begin{array}{ccc} \hat{G} & \xrightarrow{\sim} & G \\ & & (\text{同型}) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \rho_\ell & \to & e^{\frac{2\pi i \ell}{N}} \end{array}$$

の場合のみ考える, SPT相なし

見つけ方：半空間ゲージ化

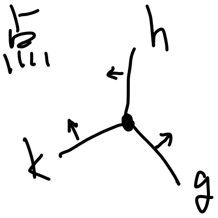



## □ 半空間ゲージ化

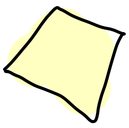


• 辺  Gの元を置いてすべて足し合わせる

Euler $\frac{1}{\sqrt{N}}$

• 頂点  拘束条件 $gh=k$

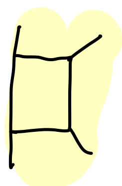
Euler $\sqrt{N}$

• 面  (ゲージ変換)

(ゲージ体積)$^{-1}$ : $\frac{1}{N}$

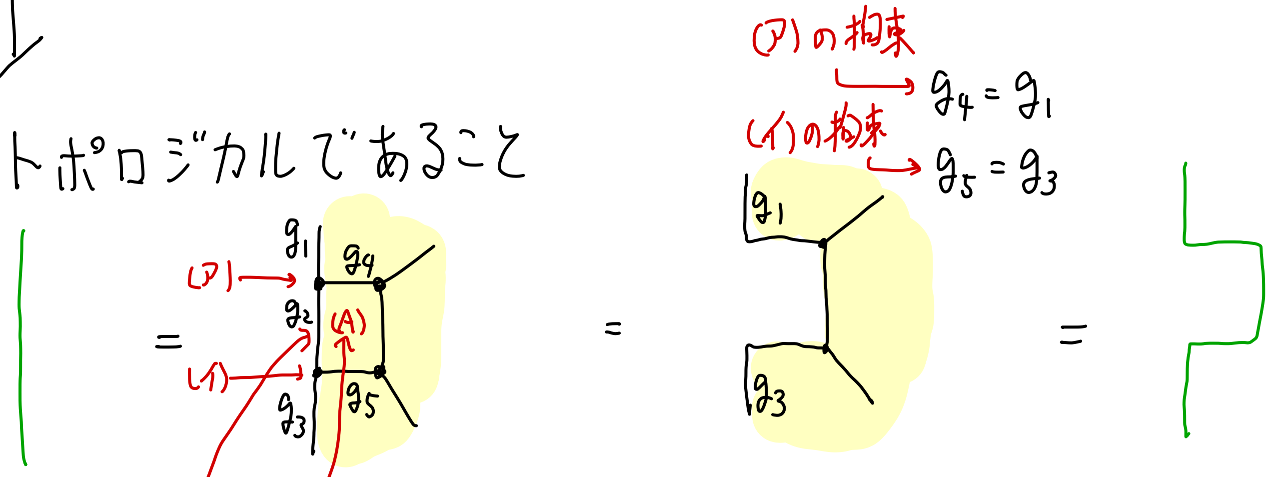
Euler : $\sqrt{N}$

※ゲージ化していない面のゲージ変換は無い

このへん 

⇓

トポロジカルであること




ここのゲージ変換を使って(ゲージ固定)

ここを1にする

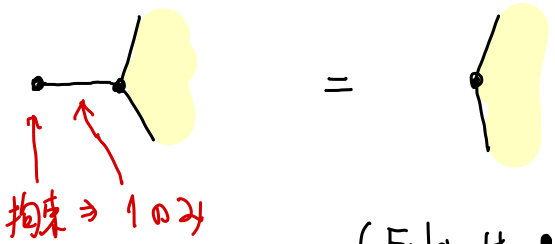
$\sum_{g_2} = N$

面Aのウェイト $= \frac{1}{N}\sqrt{N}$

ゲージ体積　Euler

リンク2のウェイト $= \frac{1}{\sqrt{N}}$ → 1

Euler

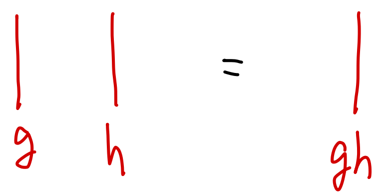



(Euler は •と ー でキャンセル)

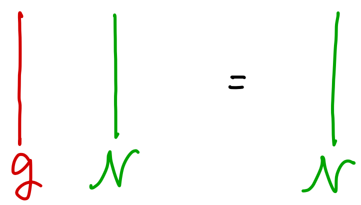
## □ Fusion 則

G対称性の欠陥 


双対性欠陥 


∘ 

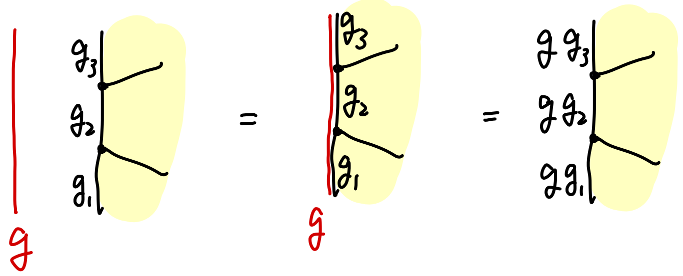

(群のかけ算)

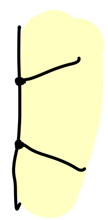
∘ 

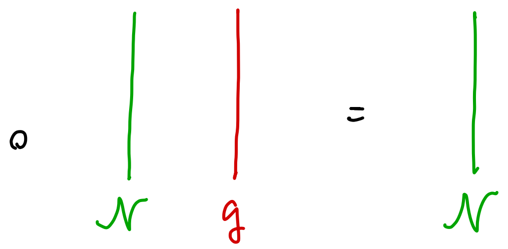

⇒ N は非可逆

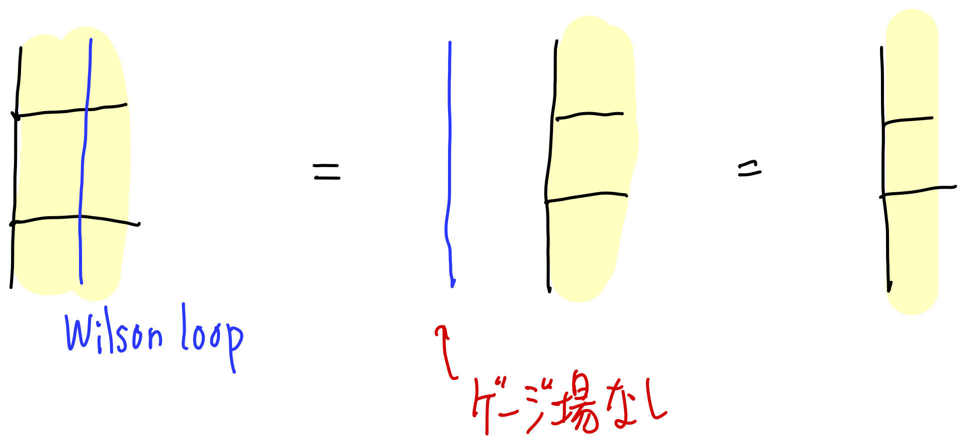
和をとっている変数の再定義

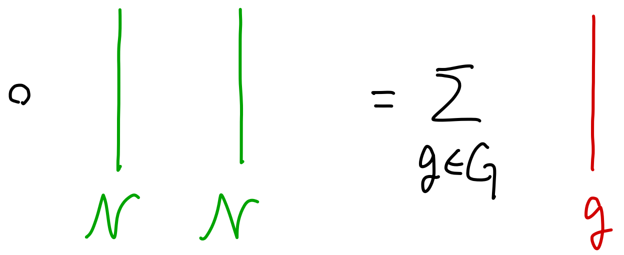
$gg_i = g_i' \Rightarrow \sum_{g_i} = \sum_{g_i'}$

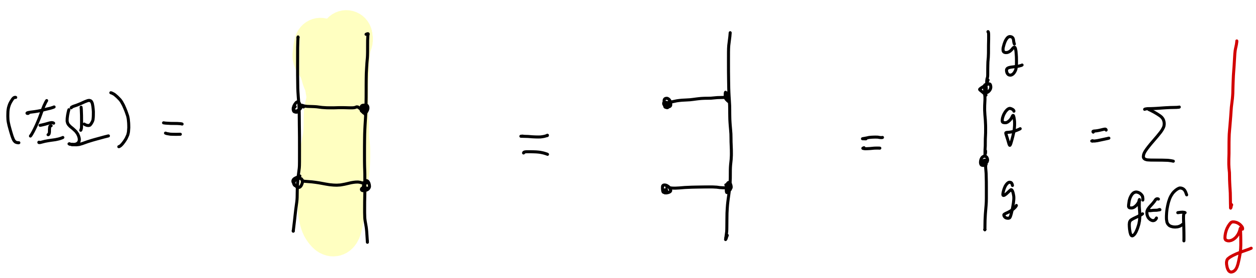
(左辺) = 


=  = (右辺)

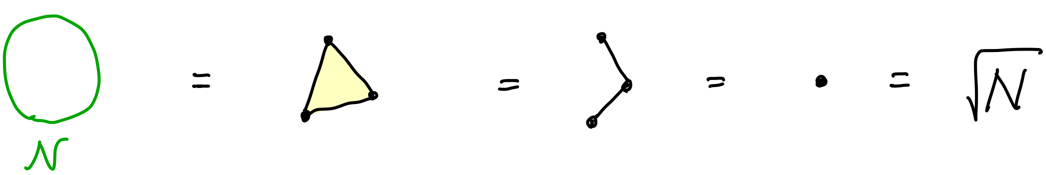


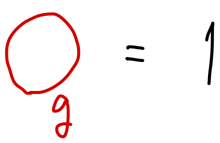




## 量子次元 (quantum dimension)

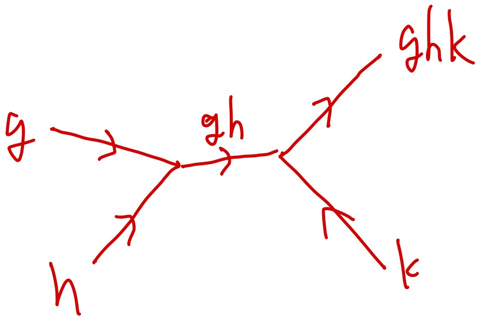



cf.

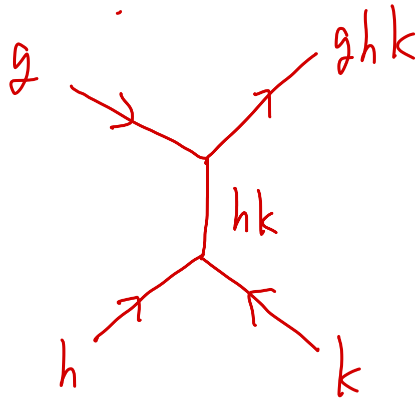


# 交差関係式

・

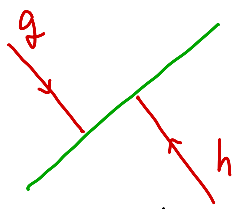



$=$

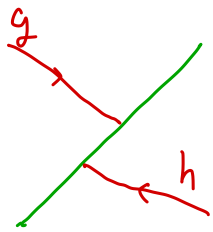



（※ アノマリーがない ⟺ パッチのとり方によらない）

・



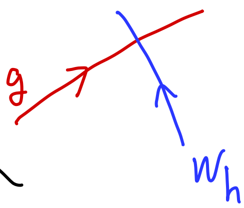

$= \chi(g,h)$




$$g = e^{\frac{2\pi i}{N}a}, \quad h = e^{\frac{2\pi i}{N}b}$$

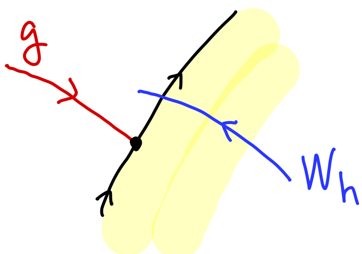
$$\chi(g,h) := e^{\frac{2\pi i}{N}ab}$$

(

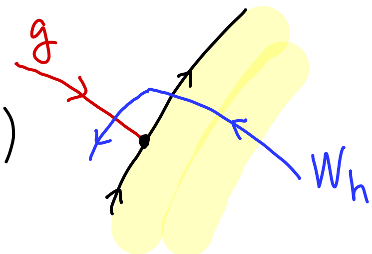



$= \chi(g,h) \cdots$ )

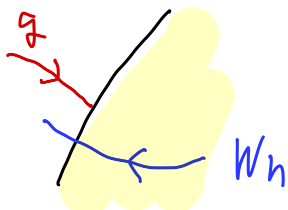
(左辺) $=$



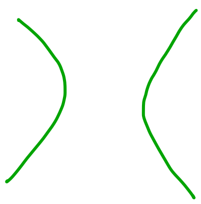
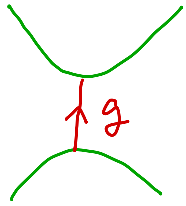

$= \chi(g,h)$

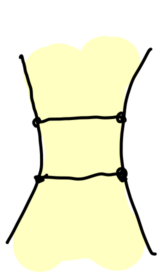
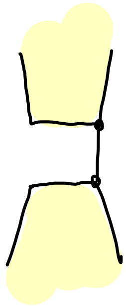
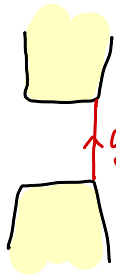



$= \chi(g,h)$



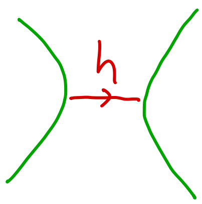

$=$ (右辺)

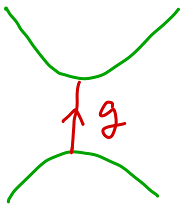
 $= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{g \in G}$ 

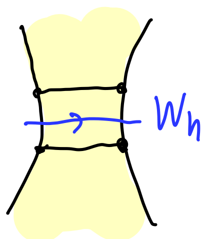

(左辺) =  =  $= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{g \in G}$ 

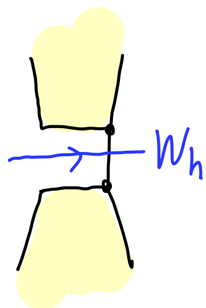
= (右辺)

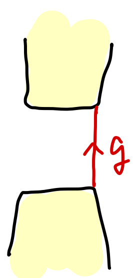
Euler



$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{g \in G} \chi(g,h)$ 


(左辺) = 

= 


$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{g \in G} \chi(g,h)$ 

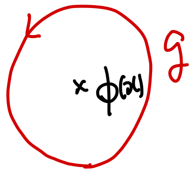
= (右辺)

Euler

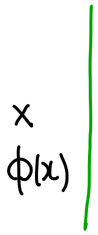
# □ 局所演算子への作用

$\phi(x)$ : 局所演算子　　$h \in \hat{G} (\simeq G)$ の表現で変換

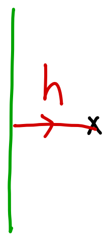
$\forall g \in G$




$= \chi(g,h) \times \phi(x)$

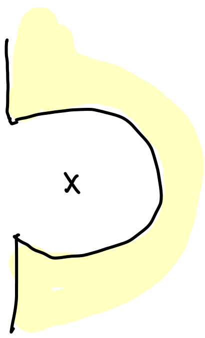



$=$

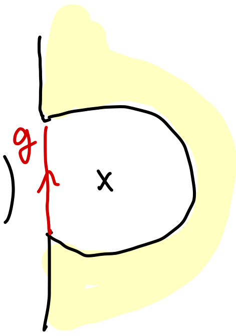



$\tilde{\phi}(x)$　　"disorder operator"

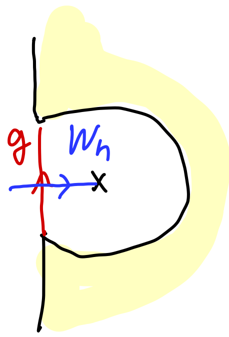
(左辺) $=$



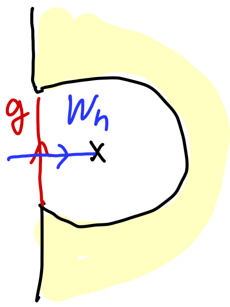
$= \chi(g,h)$



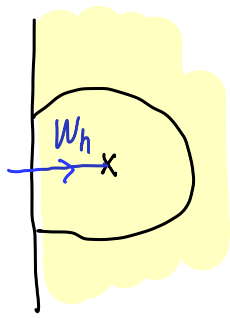

$=$




$= \frac{1}{N} \sum_{g \in G}$




$=$




$=$ (右辺)

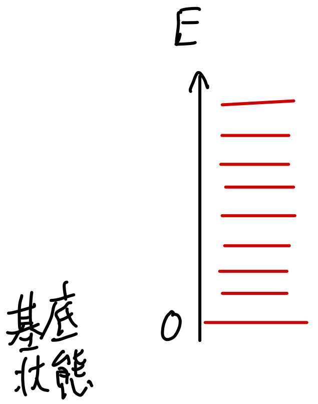
## ☆ 応用：相構造について.

### □ 言葉

2次元時空 → 空間は1次元

$S^1$を考える　長さLは有限だが大きい.

⇒ $\hat{H}$は離散スペクトルを持つ（と仮定）

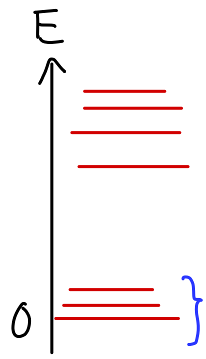



Lを大きくすると好きなだけ詰まっていく

$\boxed{\text{Gapless}}$　例：CFT

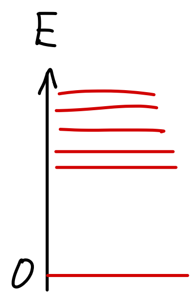
massless particle, ...

Gapped ⟺ (Gapless でない)




Lをいくら大きくしても有限のすきま.

Lを大きくするといくらでも詰まる「真空」

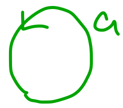



真空が唯一 : $\boxed{\text{trivially gapped}}$

真空がたくさんある : $\boxed{\text{真空の縮退}}$

## 定理

2次元QFT, ∃(トポロジカル欠陥 $a$ で量子次元 $d_a \notin \mathbb{Z}$)




$= d_a$

$\Downarrow$

trivially gapped ではありえない.

(例: さっきの双対性欠陥で $\sqrt{N} \notin \mathbb{Z}$ の場合)

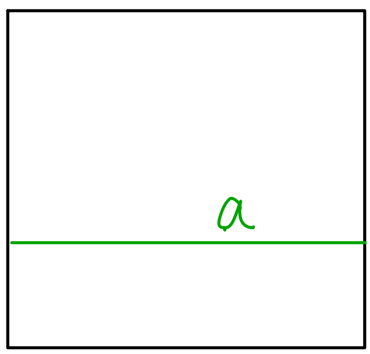
<u>証明</u>

trivially gapped を仮定

真空 $|0\rangle$,

(宇宙項を足して $\hat{H}|0\rangle = 0$ とする)

$T^2$ $\uparrow A$




$\rightarrow B$

(サイズ) $\gg 1/(\mathrm{gap})$

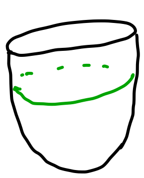
分配関数 $Z$
次の二通りの方法で計算

① $A$ を Euclidean time と思う

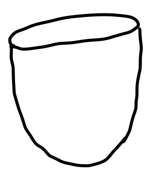
$$Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta \hat{H}}\, \hat{a} = \langle 0|\hat{a}|0\rangle = d_a$$

$\hat{a}|0\rangle = d_a|0\rangle$ の証明

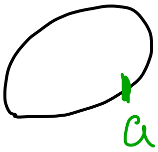
サイズ $\gg 1/(\mathrm{gap})$



$= d_a$



② B を Euclidean time と思う.




の Hilbert 空間 $\mathcal{H}'$, Hamiltonian $\hat{H}'$

$\hat{H}'$ の固有値 0 の固有空間 $V \subset \mathcal{H}'$

$$Z = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}'}\, e^{-\beta' \mathcal{H}'} = \dim V \in \mathbb{Z}$$

①, ② $\Rightarrow$ $d_a = \dim V$

$d_a \notin \mathbb{Z}$ に矛盾