混合大域 アノマリー と 境界 状態

山口哲(大阪大学)

沼澤宙朗氏との共同研究に基づく
(大阪大学, McGill 大学) arXiv:1712.09361 [hep-th]

３次元 SPT 相

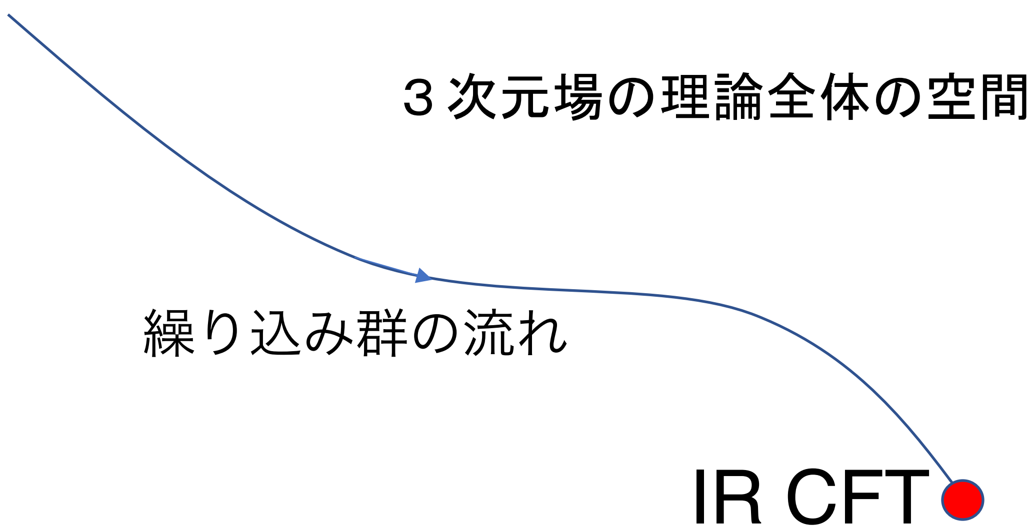
動機

２次元CFTの’t Hooft アノマリー

興味深い関係

２次元境界付きCFT

繰り込み群の流れ



(空っぽかもしれない)

これをもう少し詳しく

→ SPT相

SPT相

(symmetry protected topological)

(私の印象)

この“空っぽの理論”は

本当に 空っぽですか? と問うている

粒子はない。無質量の励起もない。自発的対称性の破れもない。
しかし非自明な「相構造」がある。

例: ３次元質量ある自由 Dirac場の理論

$$S=\int d^3x\,\left(i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi+m\bar{\psi}\psi\ -\frac{1}{\Lambda}\bar{\psi}\partial^2\psi\quad\right)$$

異なる!

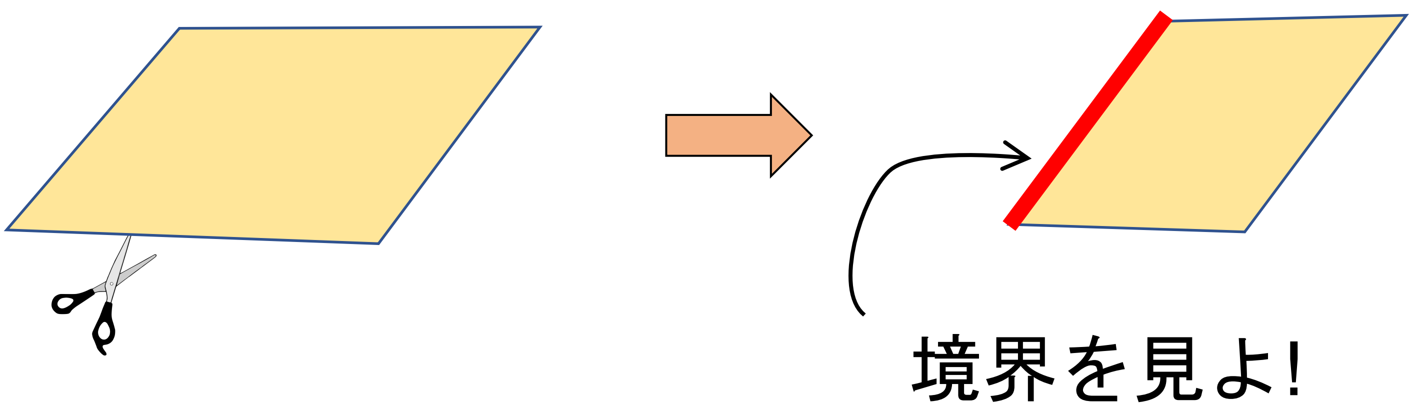
$$S=\int d^3x\,\left(i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi-m\bar{\psi}\psi\ -\frac{1}{\Lambda}\bar{\psi}\partial^2\psi\quad\right)$$

$m>0$

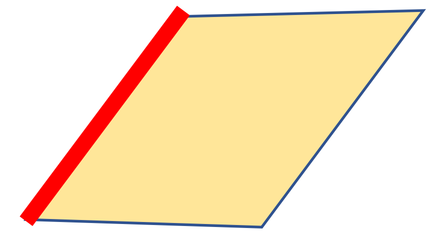
正則化の残り滓
例： Pauli-Villars
格子でのWilson項

どうやって見分ける?

どうやって見分ける?



例: ３次元質量ある自由 Dirac場の理論



$$S = \int d^3x \left(i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{\Lambda}\bar{\psi}\partial^2\psi \right)$$

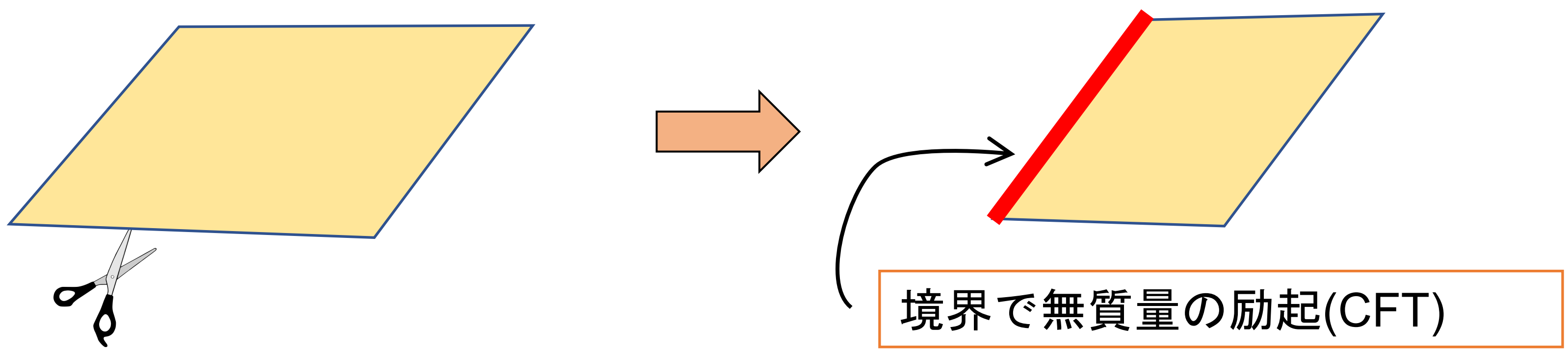
➡ 境界にWeylフェルミオン

(空っぽではない2次元 CFT)

$$S = \int d^3x \left(i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{\Lambda}\bar{\psi}\partial^2\psi \right)$$

➡ 空っぽ

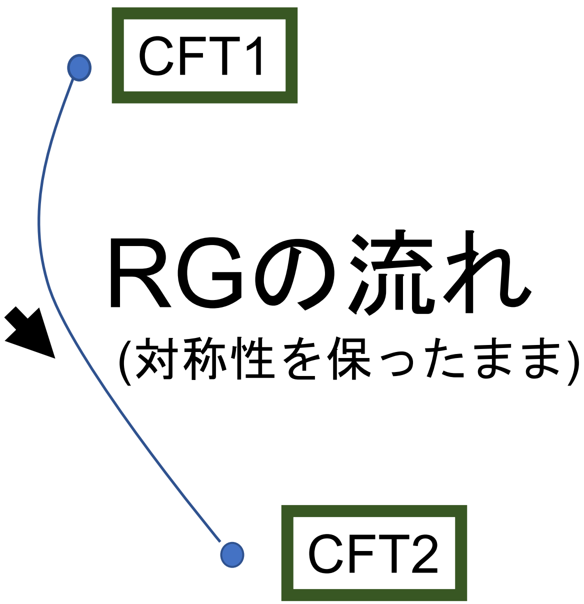
見分け方の一つ



３次元SPT相 〜 **２次元CFTの“分類”**

“分類”

(小さな摂動では変わらない)



⟺

$\boxed{\text{CFT1}} \sim \boxed{\text{CFT2}}$

同じ類

“RG不変量”

’t Hooft アノマリーはRG不変量

大域的対称性をゲージ化しよう
とした場合の障害

(背景ゲージ場の中でゲージ不変ではない)

例: 2次元 Weyl フェルミオン (SPT相の境界に現れる)

$$S = \int d^2x i\bar{\psi}_+(\partial_0 - \partial_1)\psi_+$$

摂動で「空っぽ」にはなれない。

理由：U(1) 対称性

$$\psi_+ \longrightarrow e^{i\alpha}\psi_+$$

がアノマリーをもつ(ゲージ場背景中で).

３次元SPT相

〜 ２次元CFTのアノマリーの分類

アノマリーが無い場合　　　空っぽと同じ類

CFTは “gappable”

(アノマリーがない)

３次元SPT相

動機

説明した

２次元CFTの’t Hooftアノマリー

興味深い関係!

２次元境界付きCFT

２次元境界付きCFT

[Ishibashi], [Ishibashi-Onogi], [Cardy]

$$|B\rangle_C$$

境界状態で記述される

対称性を壊さずに境界を導入できるなら

$\exists |B\rangle_C$ 対称性で不変

$\Longleftrightarrow$ CFT は “Edgeable”

Gappable
(アノマリーがない)

Edgeable
(対称性を保つ境界状態が存在)

等価（？）

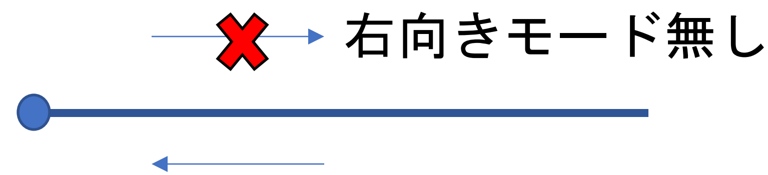
[Han, Tiwari, Hsieh, Ryu 17]

例：

2次元 Weyl fermion

- Gappableでない(アノマリーがある)
- Edgeableでない(境界を入れれない)

反射出来ない



2次元 Dirac fermion

- Gappable(アノマリーなし、質量入れれる)
- Edgeable(境界入れれる)

Gappable = edgeable 成立

調べたいこと

?

Gappable
(アノマリーがない)

Edgeable
(対称性を保つ境界状態が存在)

WZWモデル、中心対称性とdiffeoを保つ

結果

Gappable
(アノマリーがない)

Edgeable
(“**対称性**”を保つ境界状態が存在)

成立。しかし対応の「変形」が必要。

WZW model

(non-chiral) Wess-Zumino-Witten model

場: $g(x) \in SU(N)$

作用: $S = \frac{k}{8\pi}\int_{\Sigma_2} d^2x \mathrm{tr}(\partial_\mu g \partial^\mu g^{-1}) + \frac{k}{12\pi}\int_{M_3} \mathrm{tr}(g^{-1}dg)^3$

$\partial M_3 = \Sigma_2$

パラメーター: $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ “Level” $k \sim \frac{1}{\hbar}$

$$SU(N)_k$$

※Chern-Simons理論の境界に現れるchiral WZW model とは異なることに注意。

WZW model はaffine Lie 代数の対称性をもつ

⇓

解ける

highest weight states $|\hat{\lambda}, \hat{\lambda}\rangle$ (対角な理論)

$$\hat{\lambda} = [\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{N-1}] \qquad \lambda_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

Affine Dynkin ラベル

Level: $k = \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{N-1}$

(non-chiral) WZW model

$$S = \frac{k}{8\pi}\int_{\Sigma_2} d^2x \mathrm{tr}(\partial_\mu g \partial^\mu g^{-1}) + \frac{k}{12\pi}\int_{M_3} \mathrm{tr}(g^{-1}dg)^3$$

$$SU(N)_k$$

$$g(x) \in SU(N) \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

注目する対称性

- 中心 $\quad g(x) \to hg(x), \quad h \in \mathbb{Z}_N \subset SU(N)$
- diffeo

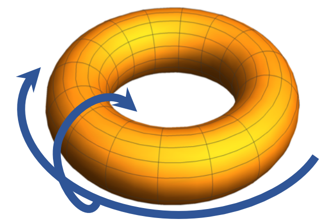
摂動論的アノマリーはない

大域アノマリー (large ゲージ変換に対するアノマリー)

[Gepner, Witten 86]

WZW model on

- トーラス
- $\mathbb{Z}_N$ ゲージ場



Holonomy (Wilson line)

Large diffeo(modular変換)で不変か？

計量

Coordinates (x, y) $\quad x \sim x + 2\pi, \quad y \sim y + 2\pi$

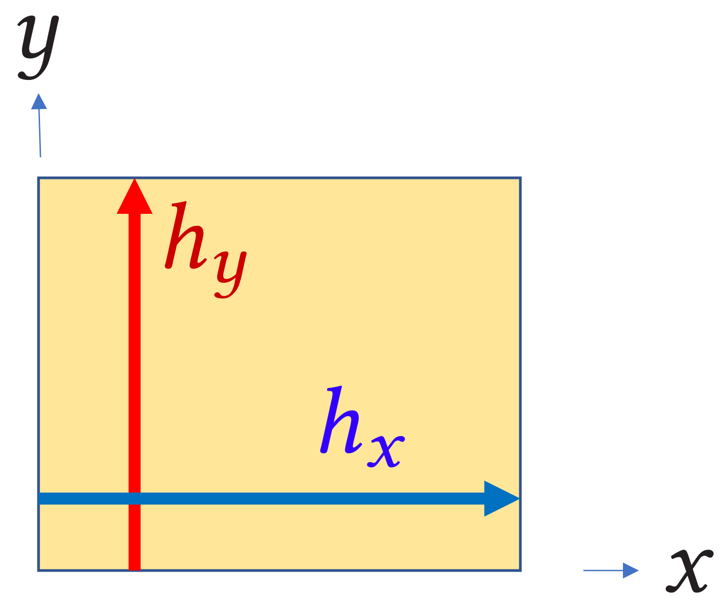
$$ds^2 = |dx + \tau dy|^2$$

$\tau = \tau_1 + i\tau_2$ modular parameter

ゲージ場

$$h_x, h_y \in \mathbb{Z}_N$$

(Wilson line)

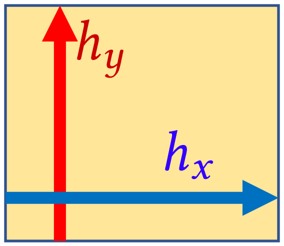


分配関数

$$Z(\tau, h_x, h_y)$$

Large diffeo (modular 変換)

$$x \sim x + 2\pi, \quad y \sim y + 2\pi \qquad ds^2 = |dx + \tau dy|^2$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$$

※これは恒等変換に連続変形ではつながらない

背景場

$$(\tau, h_x, h_y) \to (\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, h'_x = h_x^d h_y^c, h'_y = h_x^b h_y^a)$$

アノマリー?

$$Z(\tau, h_x, h_y) \overset{?}{=} Z(\tau', h'_x, h'_y)$$

事実:

[Gepner, Witten 86], [Freed, Vafa 87],…
[Sule, Chen, Ryu 13], [Furuya and Oshikawa 15],…
[Numasawa, SY 17],
[Di Francesco, Mathieu, Sénéchal “CFT” book]

N: odd

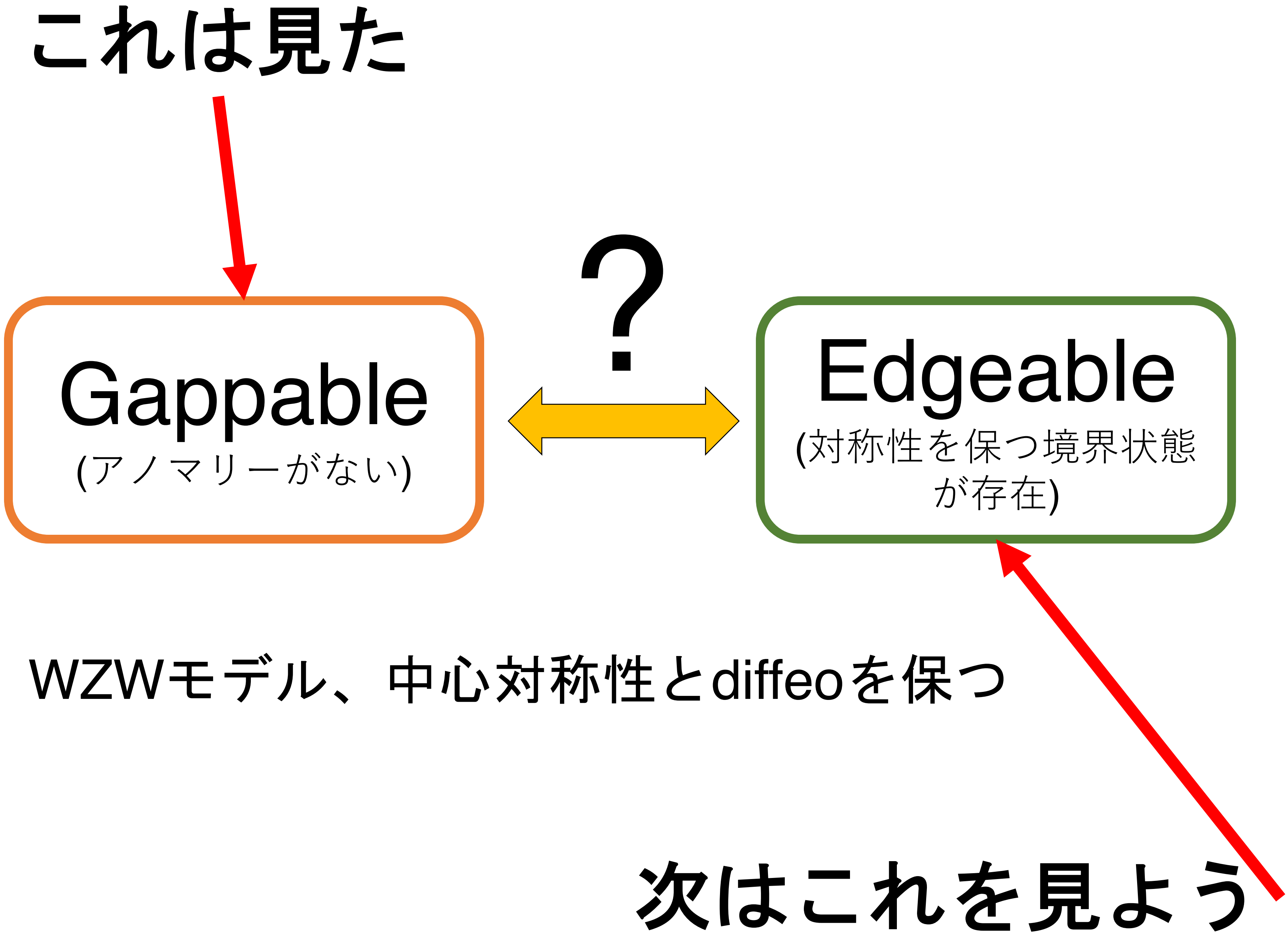
アノマリー無し (gappable)

N: even

k:even

k:odd

アノマリー有り(ungappable)


これは見た
Gappable
(アノマリーがない)
?
Edgeable
(対称性を保つ境界状態が存在)
WZWモデル、中心対称性とdiffeoを保つ
次はこれを見よう

境界付き WZW model

WZW modelの境界状態

[Ishibashi], [Ishibashi-Onogi], [Cardy]

$$|\hat{\lambda}\rangle_C$$

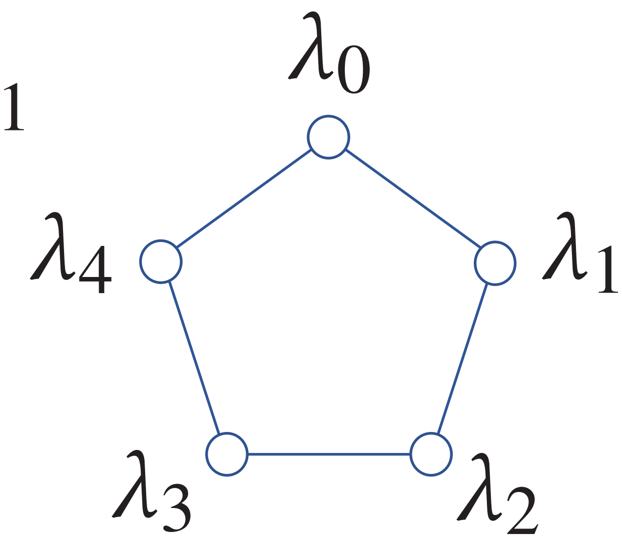
$$\hat{\lambda} = [\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}]$$

Affine Dynkin label

(highest weight stateと同じラベル)

$$\lambda_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

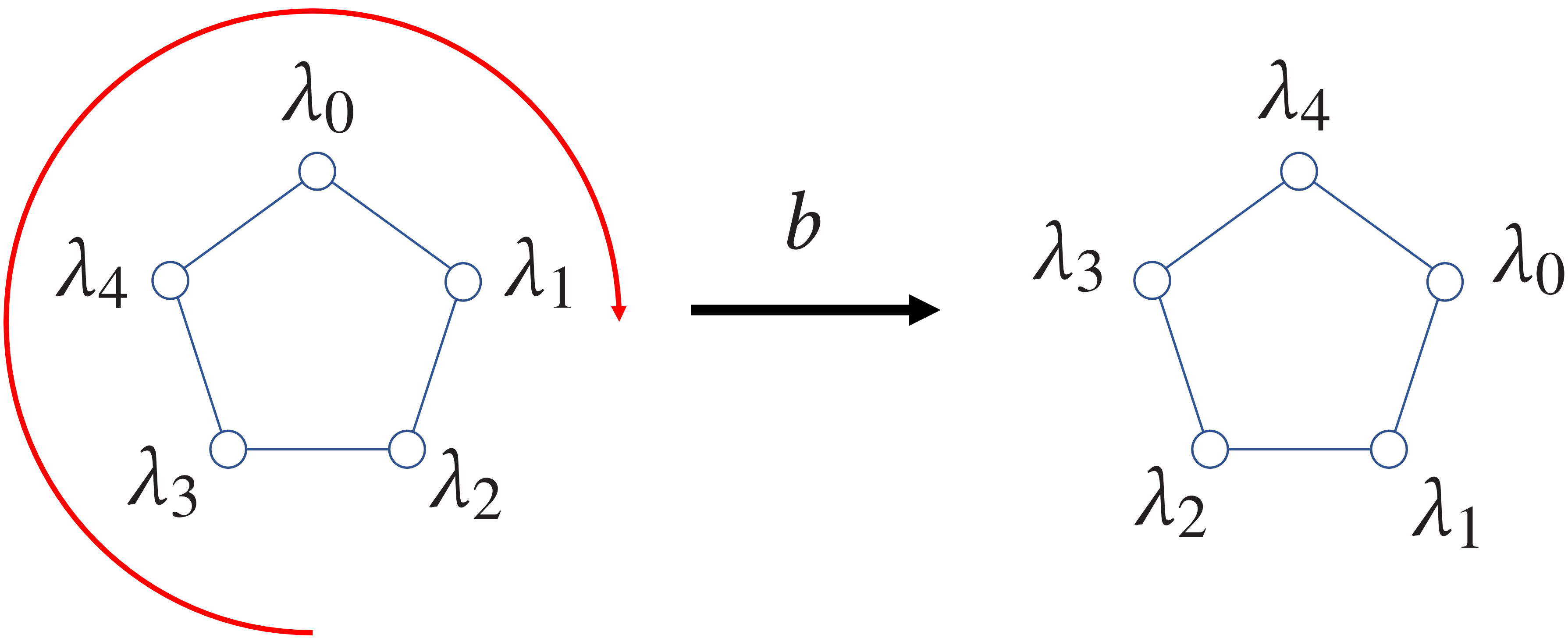
level $k = \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{N-1}$



拡大Dynkin図

中心 $\mathbb{Z}_N$ の境界状態への作用

$b \in \mathbb{Z}_N$　生成子



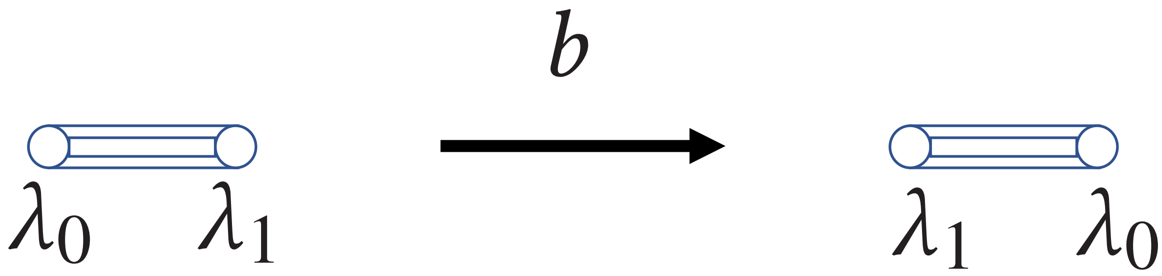
modular変換の境界状態への作用

私には分かりません

(そもそもmodular変換はHilbert空間の元に作用すると思えるのか)

とりあえず $\mathbb{Z}_N$ 不変な境界状態を考えよう

例: SU(2)



$$\mathbb{Z}_2 \text{ 不変} \longleftrightarrow \lambda_0 = \lambda_1$$

$$\longrightarrow k = \lambda_0 + \lambda_1 = 2\lambda_0$$

kが偶数の時のみ $\mathbb{Z}_2$ 不変な境界状態が存在

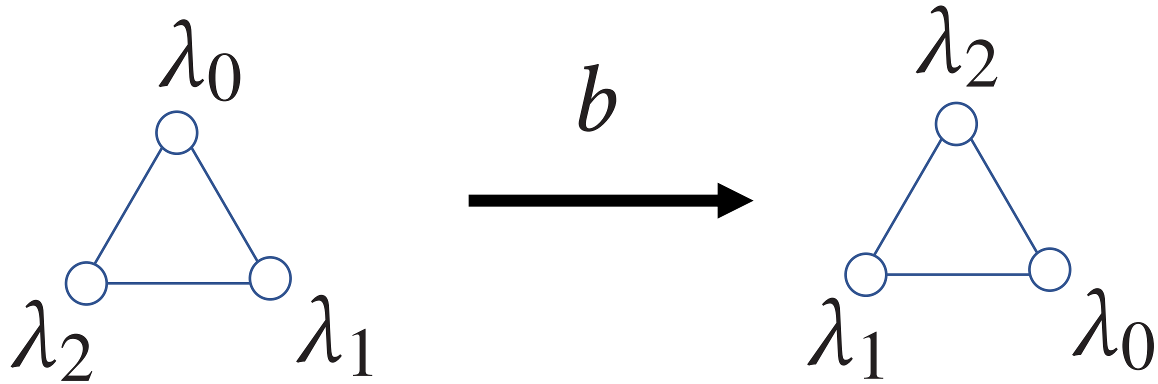
Gappable
(アノマリー無し)

⟺

Edgeable
($\mathbb{Z}_2$ 不変境界状態存在)

成立!

Example: SU(3)



$\mathbb{Z}_3$ 不変 $\longleftrightarrow$ $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$

$\longrightarrow k = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 3\lambda_0$

kが3の倍数のときのみ $\mathbb{Z}_3$ 不変な境界状態存在

Gappable
(アノマリー無し)

$\Longleftrightarrow$

Edgeable
($\mathbb{Z}_3$ 不変境界状態存在)

不成立!

Gappable
(アノマリー無し)

$\Longleftrightarrow$

Edgeable
($\mathbb{Z}_N$不変境界状態存在)

不成立!

for N>2

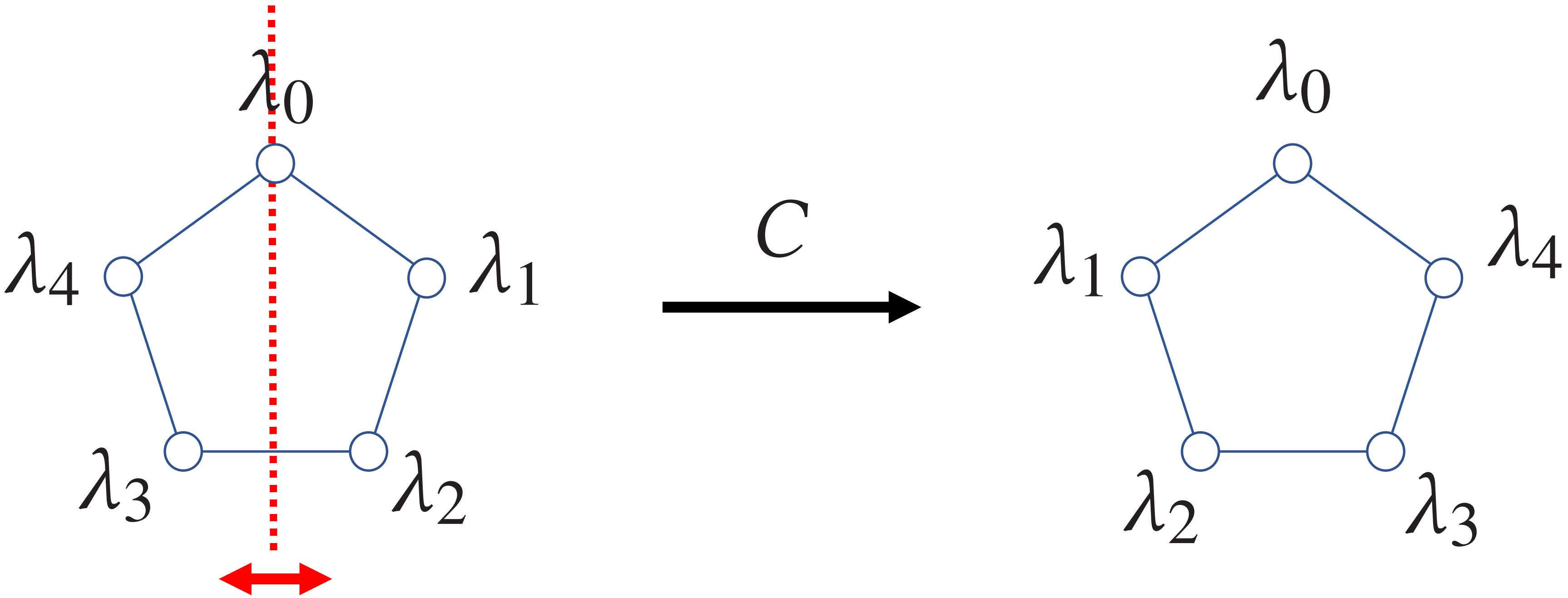
Gappable 理論はedgeableとは限らない

問題：

“edgeability”を変形しgappability⇔edgeability
が成り立つように出来るか？

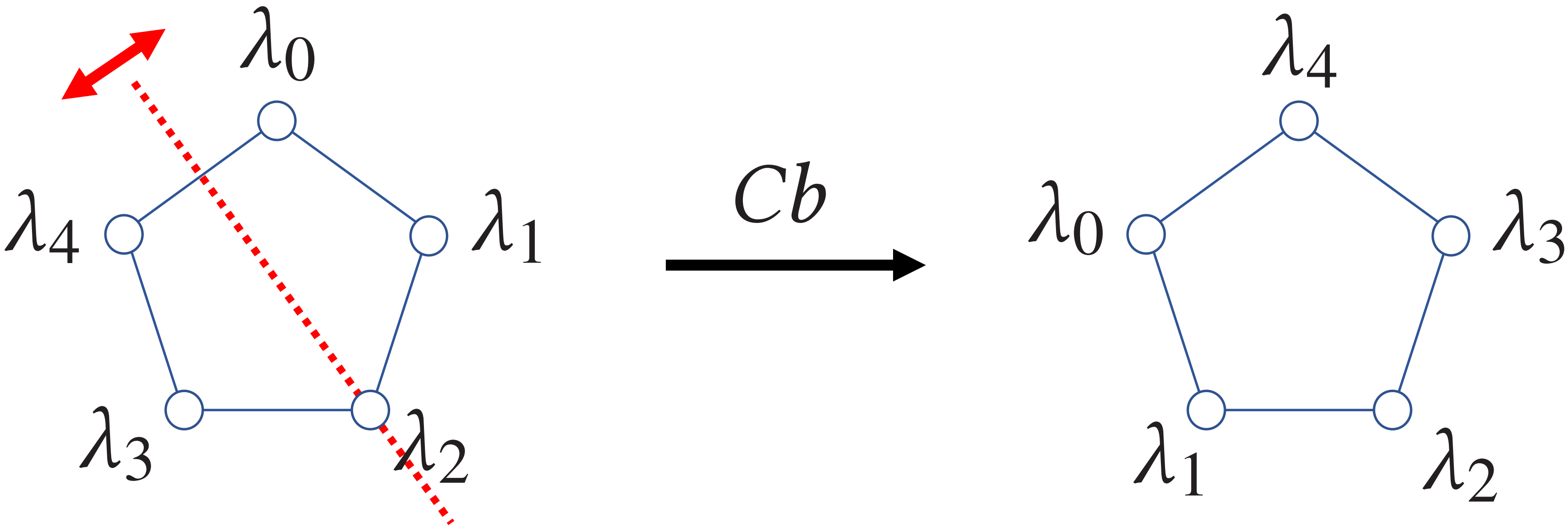
YES

荷電共役



λ_0
λ_4
λ_1
λ_3
λ_2
C
λ_0
λ_1
λ_4
λ_2
λ_3

Cbの作用

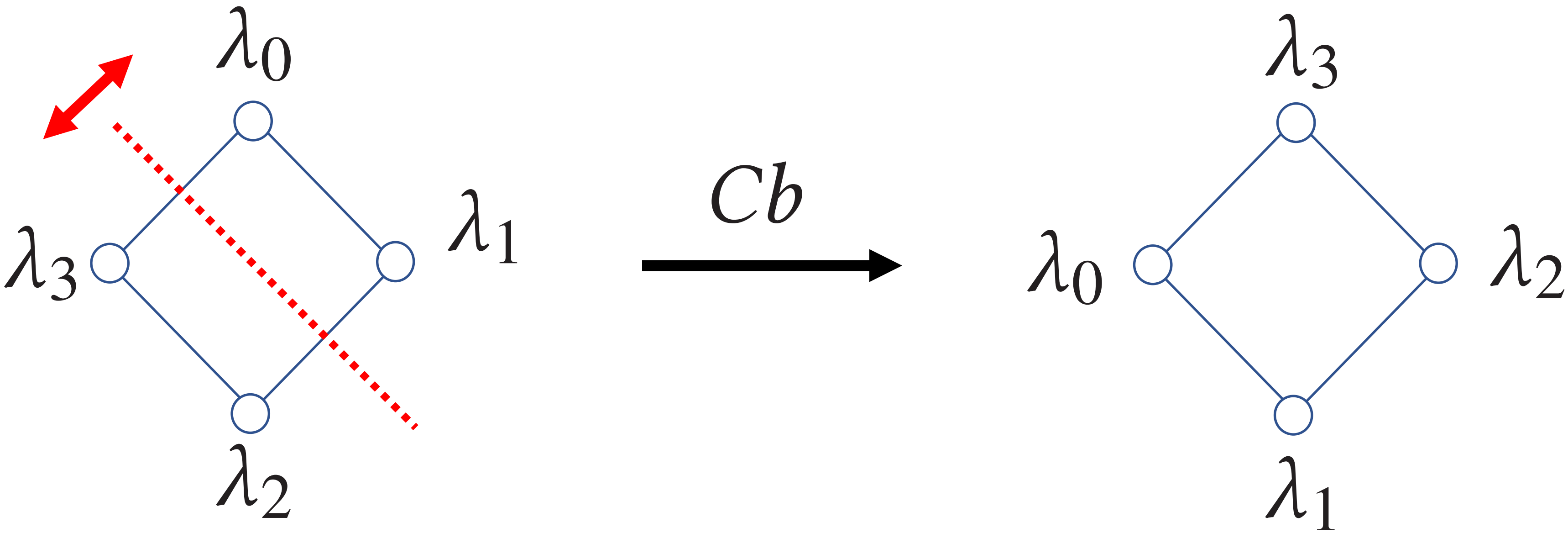


Nが奇数の場合 $\hat{\lambda} = [0; 0, \ldots, k, \ldots, 0]$

$\frac{N-1}{2}$

は任意のkでCb不変

Cbの作用



Nが偶数の場合Cb不変

$$\longrightarrow \quad \lambda_0 = \lambda_{N-1}, \lambda_1 = \lambda_{N-2}, \ldots, \lambda_{N/2-1} = \lambda_{N/2}$$

$k = \lambda_0 + \cdots + \lambda_{N-1} = 2(\lambda_0 + \cdots + \lambda_{N/2-1})$ は偶数

Cb不変な境界状態は存在するか？

N: odd

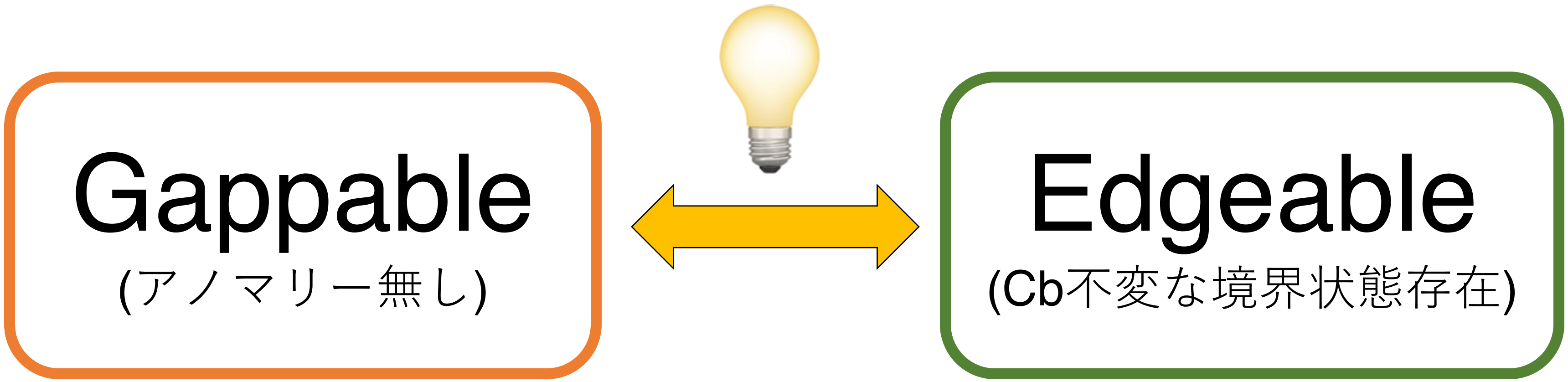
Yes

k:even

N: even

k:odd

No



成立

Summary

SU(N) WZW model

center and large diffeo

’t Hooft anomaly in 2d CFT

New interesting observation!

2d boundary CFT

WZW model, 中心対称性, diffeo

２次元CFTの’t Hooftアノマリー

興味深い関係!

２次元境界付きCFT

Gappable
(アノマリー無し)

⟺

Edgeable
($\mathbb{Z}_N$不変境界状態存在)

不成立!

for N>2

Gappable
(アノマリー無し)

Edgeable
(Cb不変な境界状態存在)

成立

コメント

- この関係は中心が $\mathbb{Z}_N$ の単純単連結コンパクト群で成り立つ。

$$A_n, B_n, C_n, D_{2m+1}, E_6, E_7$$

* E_8, F_4, G_2 の中心は自明

- この関係は中心の部分群に対しても成立

- 直積の群を考えた場合、不成立

さらに一般的な条件の特別な場合?

議論

なぜ荷電共役をいれるとうまくいくのか？

アノマリーの解析ではモジュラー変換と中心の混合アノマリーを考えた。しかし、境界状態の解析ではモジュラー変換を考えていない。

$$C = S^2$$

モジュラー変換の一部

S変換

元のedgeable条件

Gappable
(アノマリー無し)

$\Leftarrow$

Edgeable
($\mathbb{Z}_N$ 不変境界状態存在)

edgeable理論はいつもgappable。
gappable理論はedgeableとは限らない。

２次元SPT相?