素粒子物理学特論 I

― 群、Lie代数、表現 ―

1. 導入

やること：場の理論で用いる数学

「群」,「Lie代数」,「表現」

対称性 $\supset$ 連続対称性
無限小変換

↓ ↓

$\boxed{\text{群}}$ $\xrightarrow{\text{1での微分}}$ $\boxed{\text{Lie代数}}$

数学的構造

抽象化：数学の話（群とか）だけから言えること

↓

同じ数学が出てくる別のところにも適用できる！

例：水素原子：

回転対称性 SO(3) ⇒ 別のSO(3)の対称性がある系にも言える

全角運動量 j は整数 or 半整数

→ 縮退度

予定

- 線型代数の復習
- 群と表現
- Lie代数
- Lie代数の表現

2. 線型代数の復習

☆ ベクトル空間の抽象的な定義

ベクトル

- 矢印
- Minkowski 時空のベクトル
- 量子力学の状態
- $\begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \\ \bullet \end{pmatrix}$

たし算とスカラー倍がある.

↓ (それ以外忘れる)

抽象化

▨ $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ (書く量を減らすため)

Def. $\mathbb{K}$ ベクトル空間 V ($\mathbb{K}$-vector space)

V : 集合

次の構造がある

I. 足し算

$$+ : V \times V \to V$$
$$\quad\; v \;\;\; u \;\; \mapsto v + u$$

(1) $(v+w)+u = v+(w+u)$

(2) $v+u = u+v$

(3) $0 \in V$ s.t. ${}^{\forall} v \in V$ (ゼロ元)

$0+v=v$

(4) ${}^{\forall} v \in V \Rightarrow {}^{\exists}(-v) \in V$

$v+(-v)=0$

Ⅱ $\Bbbk$倍

$a, b, c, \cdots \in \Bbbk, \quad v, u, w, \cdots \in V$

(5) $(a+b)v = av+bv$

(6) $a(v+w) = av+aw$

(7) $(ab)v = a(bv)$

(8) $1 \cdot v = v$

☆基底

▨ 線型独立

Def. $\{v_1, \cdots, v_n\} \subset V$ が「線型独立」

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} a_1, \cdots, a_n \in \Bbbk \text{ が } \sum_{i=1}^{n} a_i v_1 = 0 \\ \Updownarrow \\ a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0 \end{array} \right)$$

次元

Def. V が「無限次元」

$\Leftrightarrow \left({}^\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \Rightarrow {}^\exists \{v_1, \cdots, v_n\} \subset V \right.$ が線型独立 $\left. \right)$

Def. V が「有限次元」$\Leftrightarrow$ 無限次元でない.

<u>Thm</u> ◦ V が有限次元のとき ${}^\exists \{e_1, \cdots, e_n\} \subset V$

「基底」(basis)

s.t. ${}^\forall v \in V$, ${}^\exists v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{k}$ 一意

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$$

◦ 上の n は基底のとり方によらない

$n = \dim V$ V の次元 (dimension)

無限次元 V : 次の性質を満たすもののみ考える

◦ 「極限」の構造がある

◦ $V \ni {}^\exists e_1, e_2, \cdots$ 無限列 「基底」

s.t. ${}^\forall v \in V$ が $v = \sum_{i=1}^{\infty} v_i e_i$ と書ける.

※ 有限次元の場合　$e_1, \cdots, e_n$ 基底

$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$　これを　$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

※ 基底のとり方によること、よらないことに注意する

☆ ベクトル空間をいろいろ作る

▨ 直和

V, W : $\mathbb{K}$ ベクトル空間

直和　$V \oplus W := \{ v + w \mid v \in V,\ w \in W \}$

形式的な和

$v_1 + w_1,\ v_2 + w_2 \in V \oplus W$

$$(v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) := (\underset{\overset{\cap}{V}}{v_1 + v_2}) + (\underset{\overset{\cap}{W}}{w_1 + w_2})$$

$a \in \mathbb{K}$, $v + w \in V \oplus W$

$$a(v + w) := \underset{\overset{\cap}{V}}{av} + \underset{\overset{\cap}{W}}{aw}$$

Ex. $\dim V \oplus W$ を $\dim V$ と $\dim W$ で表せ

▨ テンソル積

V の基底 e_i : $i=1,2,\cdots,\dim V$

W 〃 f_j : $j=1,2,\cdots,\dim W$

$$V\otimes W := \left\{ \sum_{i,j} a_{ij}\, \underbrace{e_i\otimes f_j}_{\text{線型独立とする}} \;\middle|\; a_{ij}\in\mathbb{K} \right\}$$

例：

粒子 1 の量子力学のHilbert空間 V_1

〃 2 〃 V_2

⇒ 粒子1,2両方 〃 $V_1\otimes V_2$

※ 定義が基底によっているように見えるが
実はよらない。

▨ 部分ベクトル空間

V : $\mathbb{K}$ ベクトル空間

$V \supset W$ 和, $\mathbb{K}$倍で閉じている

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ WはVの「部分ベクトル空間」
(vector sub-space)

▨ 商ベクトル空間

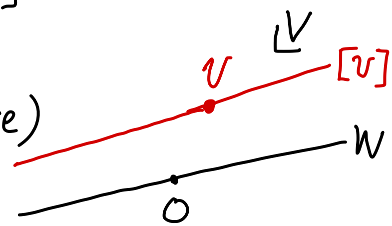
$V \supset W$: 部分ベクトル空間

$\forall$ $v \in V$ に対して $[v] \subset V$

$$[v] := \{ u \in V \mid v - u \in W \}$$

「同値類」

$$V/W := \{ [v] \mid v \in V \}$$



◦言葉

商ベクトル空間 (quotient vector space)

(Vの中でWの元は0と思う)

$[v] \xleftarrow{\text{同値類 (equivalence class)}} v$

$[v] \xrightarrow{\text{代表元 (representative)}} v$

◦構造

$v, w \in V$, $a \in \mathbb{K}$

たし算

$$[v] + [u] := [v + u]$$

$\mathbb{K}$倍

$$a[v] := [av]$$

<u>Ex.</u> たし算と$\mathbb{K}$倍が代表元のとり方によらないことを示せ.

☆ 線型写像

V, W : $\mathbb{K}$ ベクトル空間

▨ 定義 :

$A : V \to W$ が線型 (linear)

$v, v_1, v_2 \in V$, $a \in \mathbb{K}$

- $A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2$
- $A a v = a A v$

▨ 基底をとると行列で表せる

$A : V \to W$ linear

$\{e_i\}$: V の基底

$\{f_i\}$: W 〃

$$Ae_i \in W \Rightarrow Ae_i = \sum_j A_{ji} f_j$$

$A_{ji} \in \mathbb{K}$ 「(Aの)成分」(components)

Ex.

$v = \sum_i v_i e_i$, $Av = \sum_j w_j f_j$ のとき、

w_j を v_i, A_{ji} を用いて表せ

▨ 記号など

- $V \to W$ linear 全体 $=: \mathrm{Hom}(V, W)$

※ $\mathrm{Hom}(V, W)$ はベクトル空間になっている

Ex. ・足し算と $\mathbb{K}$ 倍を定義せよ

・$\dim \mathrm{Hom}(V, W)$ を $\dim V$ と $\dim W$ で表せ

- $\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V, V)$, $\mathrm{End}(\mathbb{K}^n) =: \mathrm{End}(n, \mathbb{K})$

この中で足し算, かけ算, $\mathbb{K}$ 倍がある (代数, 環)

- $GL(V) := \{A \in \mathrm{End}(V), 全単射 (逆がある)\}$

・かけ算, 割り算がある $\Rightarrow$ 群 $GL(\mathbb{K}^n) =: GL(n, \mathbb{K})$

- $\bar{V} := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ 「双対空間」

?

(数学では V^* と書かれることが多い)

物理で出てくる例

- ケット $\leftrightarrow$ ブラ
- 反変ベクトル $\leftrightarrow$ 共変ベクトル

- $A : V \to W$, $B : X \to Y$ $\Rightarrow$ $A \oplus B : V \oplus X \to W \oplus Y$, $A \otimes B : V \otimes X \to W \otimes Y$

Ex. いい感じの定義を与えよ.

☆ エルミート内積

▨

V : $\mathbb{C}$ ベクトル空間

定義 :

$\langle \ | \ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ が「エルミート内積」
(Hermitian inner product)

$a, b, c, \cdots \in \mathbb{C}$

$v, w, u, \cdots \in V$

(1) $\langle v | aw + bu \rangle = a \langle v | w \rangle + b \langle v | u \rangle$

(2) $\langle av + bu | w \rangle = a^* \langle v | w \rangle + b^* \langle u | w \rangle$

(3) $\langle v | w \rangle = \langle w | v \rangle^*$

(4) $\langle v | v \rangle \geq 0$, 等号は $v = 0$ のときのみ.
正定値 (positive definite)

Ex. $\mathbb{C}^n \ni v = (v_1, \cdots, v_n)$, $w = (w_1, \cdots, w_n)$

$\langle v | w \rangle := \sum_{i=1}^{n} v_i^* w_i$ は エルミート内積

以下しばらく V, W は エルミート内積付き $\mathbb{C}$ ベクトル空間

▨ 正規直交基底 (orthonormal basis)

V の基底 $\{e_i\}$, $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$

■ エルミート共役 (Hermitian conjugate)

$A : V \longrightarrow W$ linear

$\Rightarrow A^{\dagger} : W \to W$ を次で定義

$\forall v \in V, \quad \forall w \in W$

$$\langle w | Av \rangle_W = \langle A^{\dagger} w | v \rangle_V$$

※ 正規直交基底をとると、行列のエルミート共役

■ ユニタリー変換 (unitary transformation)

$U \in \mathrm{End}(V)$ s.t.

$\forall w, v \in V$

$$\langle Uw | Uv \rangle = \langle w | v \rangle$$

$$(\Leftrightarrow U^{\dagger} U = \mathrm{id}_V)$$

↑ V上恒等写象

$$U(V) := \{ U \in \mathrm{End}(V) \mid U \text{はユニタリー} \}$$

$$\subset GL(V)$$

※ 正規直交基底をとって考えると ユニタリー行列.

※ $U(\mathbb{C}^n) =: U(n)$

↑ さっきの内積

☆ 対称内積

V : $\mathbb{K}$ ベクトル空間

対称内積

$(\, , \,) : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$

(1) $(v, aw+bu) = a(v,w) + b(v,u)$

(2) $(av+bu, w) = a(v,w) + b(u,w)$

(3) $(v, w) = (w, v)$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合

(4) $(v, v) \geq 0$, 等号は $v=0$ のときのみ

「正定値」(positive definite)

▨ 言葉

「転置」, 「対称」, 「反対称」, 「直交」

(transpose) (symmetric) (anti-symmetric) (orthogonal)

3. 群

☆定義など

▨ 群

〜 かけ算，割り算がある．

Def. 群　G：集合

かけ算 $\cdot \quad G \times G \to G$

(1), (2), (3) を満たす $\quad g \quad h \to gh$

(1) $\forall g, h, k \in G$
$(gh)k = g(hk)$ （結合則 (associativity)）

(2) $\exists 1 \in G$ s.t. $\forall g \in G \quad g1 = 1g = g$
（単位元 (identity element)）

(3) $\forall g \in G \Rightarrow \exists g^{-1} \in G$ s.t. $gg^{-1} = g^{-1}g = 1$
（逆元 (inverse)）

---

(4) $gh = hg$ を満たすとき．「アーベル群」(Abelian group)
満たさないとき「非アーベル群」(Non-Abelian group)

▨ 例

- $\mathbb{Z}_2 := \{1, a\}$　　$a \cdot a = 1$

- $\mathbb{Z}_N := \{1, a, a^2, a^3, \cdots, a^{N-1}\}$, $a^N = 1$

- V : $\mathbb{K}$-ベクトル空間

  $GL(V) = \{A : V \to V$ linear , 可逆 $\}$

  合成 (composition) で群　　一般線型群 (general linear group)

  $GL(\mathbb{R}^n) =: GL(n, \mathbb{R})$

  $GL(\mathbb{C}^n) =: GL(n, \mathbb{C})$　　...

- $SL(n, \mathbb{K}) := \{A \in GL(n, \mathbb{K}) \mid \det A = 1\}$

  特殊線型群 (special linear group)

- V : $\mathbb{C}$ベクトル空間、エルミート内積付き

  $U(V) = \{A : V \to V$, ユニタリー $\}$

  $U(\mathbb{C}^n) =: U(n)$　　ユニタリー群 (unitary group)

- $SU(n) := \{A \in U(n), \det A = 1\}$

  特殊ユニタリー群 (special unitary group)

- V : $\mathbb{R}$ベクトル空間, 正定値内積付き

  $O(V) := \{A : V \to V$, 直交 $\}$　直交群 (orthogonal group)

- $\mathbb{R}^n$, （正定値とは限らない）対称内積

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in$$

$$(v, w) := v_1 w_1 + \cdots + v_p w_p - v_{p+1} w_{p+1} - \cdots - v_n w_n$$

$$(q := n-p)$$

$$O(p, q) := \{ A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid (Av, Aw) = (v, w) \quad {}^\forall v, w \in \mathbb{R}^n \}$$

※ $O(p,q) = O(q,p)$

例：Lorentz 群 $O(3,1)$

本義 Lorentz 群 $SO(3,1)_+ \subset O(3,1)$
(proper)　　恒等変換と連続的につながっている部分

- Sp 群

- $\mathbb{K}$-ベクトル空間上のシンプレクティック形式 ω
(symplectic)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
$\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ 　$a, b \in \mathbb{K}$, $u, v, w \in V$

(1) $\omega(u, av + bw) = a\omega(u, v) + b\omega(u, w)$

(2) $\omega(u, v) = -\omega(v, u)$

(3) ${}^\forall u \in V \Rightarrow {}^\exists v \in V$ s.t. $\omega(u, v) \neq 0$
(非退化 (non-degenerate))

basis を取る e_i

$$\omega_{ij} := \omega(e_i, e_j)$$

反対称行列
$\det \omega \neq 0$

$$v = \sum_i v^i e_i$$

$$w = \sum_i w^i e_i$$

$$\omega(v, w) = \sum_{i,j} \omega_{ij} v^i w^j$$

- 例：$V = \mathbb{K}^{2k}$

$$\omega = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -1_k \\ \hline 1_k & 0 \end{array}\right)$$

- $Sp(V) := \{ A \in GL(V) \mid {}^\forall u, v \in V,\ \omega(Au, Av) = \omega(u, v) \}$

(cf. 正準変換)

$$\underset{\uparrow \text{上の}\omega}{Sp(\mathbb{K}^{2k})} =: Sp(2k, \mathbb{K})$$

$$USp(2k) := U(2k) \cap Sp(2k, \mathbb{C})$$

※ $USp(2k)$ を $Sp(k)$ と書いたり $Sp(2k)$ と書いたりしている文献もある。

▨ 直積

G_1, G_2 : 群

$\Rightarrow$ $G_1 \times G_2 := \{(g_1, g_2) \mid g_1 \in G_1,\ g_2 \in G_2\}$

積 : $(g_1, g_2), (h_1, h_2) \in G_1 \times G_2$

$$(g_1, g_2)(h_1, h_2) := (\underset{\uparrow\ G_1\text{の積}}{g_1 h_1},\ \underset{\uparrow\ G_2\text{の積}}{g_2 h_2})$$

$\Rightarrow$ 群

<u>Ex</u> $G_1 \times G_2$ の単位元, 逆元はどうなるか?

☆ 部分群、商空間

▨ 群 $G \supset H$ が部分群

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ H が G の積で群

（$1 \in H$, 積, 逆元について閉じている）

▨ $G \supset H$ ：部分群

$g, g' \in G$ 　 $g \sim g' \overset{def}{\Longleftrightarrow} g' = gh, \ {}^{\exists} h \in H$

（同値関係） （$\Leftrightarrow g^{-1}g' \in H$ ）

$$G/H := G/\sim := \{ [g] \mid g \in G \}$$

「商空間」 $[g] := \{ g' \in G \mid g \sim g' \}$ （同値類）

"quotient space"

※ 一般には群ではない.

※ 集合の同値類

- 集合 A , 関係 $\sim$: ${}^{\forall} a, b \in A$

  $a \sim b$ 又は $a \nsim b$

  どちらかが必ず成り立つ.

- $\sim$ が 同値関係

$\Leftrightarrow$ (1), (2), (3) を満たす.

(1) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$

(2) $a \sim a$

(3) $a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c$

• $\sim$ が A の同値関係

$[a] := \{ b \in A \mid a \sim b \}$ 同値類

$A/\sim := \{ [a] \mid a \in A \}$ 商集合

Ex. 上で挙げた $G \supset H$ 部分群を用いた関係 $\sim$ が同値関係であることを示せ

※ G/H は大域的対称性の自発的破れの話に出てくる.

※ $H \backslash G$: $g \sim hg$ の同値関係で同様に定義

・ $G \supset H$ が正規部分群（不変部分群）

$\Longleftrightarrow$ $^\forall g \in G,\ ^\forall h \in H \Rightarrow ghg^{-1} \in H$

・ Thm. このとき G/H は群　　$\dfrac{G}{H}$

積 $[g][g'] := [gg']$

Ex. 代表元のとり方によらないことを示せ

✡ 準同型，同型

・ G, H : 群

写像 (map)　$f : G \to H$ が「準同型（写像）」(homomorphism)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$　$^\forall g, h,\ f(gh) = f(g)f(h)$

・　f が同型 (isomorphism) $\Longleftrightarrow$ 準同型 かつ 全単射

・　このとき $G \simeq H$　G と H は同型 (isomorphic)

これから主に同型な群に共通する性質を見ていく.
積の構造以外のものを忘れる. (抽象化)

※ 群の同型類 (同型は同じと思う) を単に群と呼ぶこともある.

例:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbb{Z}_2 := \{1, a\} & , a\cdot a = 1 \\ \mathbb{Z}_2' := \{1, b\} & , b\cdot b = 1 \\ \mathbb{Z}_2'' := \{1, c\} & , c\cdot c = 1 \\ \mathbb{Z}_2''' := \{1, -1\} \subset \mathbb{Z} & \end{array}\right\} \text{(全部同型)}$$

$$U(1) \simeq SO(2)$$

$$SO(2) \ni \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \rightleftarrows e^{i\theta} \in U(1$$

4. 群の表現

☆ 定義など

G : 群 , V : $\mathbb{C}$ ベクトル空間

$\rho : G \to GL(V)$ 準同型

(V, ρ) を「G の表現」(representation)

V を「表現」or「表現空間」or「多重項」(multiplet)

- $\dim V$: 表現の次元

- ρ が単射のとき、「忠実」(faithful) な表現 (情報を失わない)

例 : $\rho(g) = 1$ for $^\forall g \in G$ 自明な表現 (trivial representation, singlet)

Ex. V を基底をとることで (表現) ⇒ (G の元を行列で表すこと) であることを示せ

▨ 同値

$(V, \rho), (V', \rho')$: Gの表現

$f: V \to V'$ linear が G準同型

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\left(\forall g \in G,\ \forall v \in V \quad f(\underbrace{\rho(g)v}_{\in V}) = \rho'(g) f(v) \right)$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ \rho(g)\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \rho'(g) \\ V & \xrightarrow{f} & V' \end{array}$$

fが全単射のとき (f: G同型)

(V, ρ) と (V', ρ') は「同値な 表現」

$$(V, \rho) \simeq (V', \rho')$$

※ 同値な表現に共通の性質に注目したい.
(抽象化)

同値な表現は区別しない(「同じ」と言ってしまう)ことも多い.

▨ ユニタリー表現

V : $\mathbb{C}$ベクトル空間, エルミート内積付き.

$\rho : G \to U(V)$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (V, ρ) : ユニタリー表現

☆ 表現の作り方

(V, ρ), (V', ρ') : 群 G の表現

▨ 定義 $(V, \rho) \oplus (V', \rho') := (V \oplus V', \rho \oplus \rho')$

「表現の直和」

ベクトル空間の直和

$$\rho \oplus \rho' (g) := \rho(g) \oplus \rho'(g)$$

線型写像の直和

▨ 定義 $(V, \rho) \otimes (V', \rho') := (V \otimes V', \rho \otimes \rho')$

ベクトル空間のテンソル積

$$\rho \otimes \rho'(g) = \rho(g) \otimes \rho'(g)$$

$$\left(\Leftrightarrow \quad v \otimes v' \in V \otimes V' \to \rho \otimes \rho'(g)\, v \otimes v' := \rho(g) v \otimes \rho'(g) v' \right)$$

線型に一意的に $V \otimes V'$ に広げられる

▨ 例: $SU(n) = \{ n \times n$ ユニタリー行列, $\det = 1 \}$

$SU(n) \ni g$

基本表現 $(\mathbb{C}^n, id) = \Box \quad id(g) = g$

$$\mathbb{C} \ni v = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \sum_a v^a e_a \qquad a = 1, \cdots, n$$

$$e_a := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} < a \qquad (gv)^a = \sum_b g^a{}_b v^b$$

$$\left(\Leftrightarrow \ g e_a = \sum_b e_b \, g^b{}_a \right)$$

- 直和 $\square \oplus \square$

表現空間 $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{2n} = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \middle| \ v_1, v_2 \in \mathbb{C}^n \right\}$

作用 $id \oplus id(g) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} g \ v_1 \\ g \ v_2 \end{pmatrix}$ $\quad \Leftrightarrow id \oplus id(g) = \left(\begin{array}{c|c} g & 0 \\ \hline 0 & g \end{array} \right)$

- テンソル積 $\square \otimes \square$

表現空間 $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n = \left\{ T = \sum_{a,b} T^{ab} e_a \otimes e_b \ \middle| \ T^{ab} \in \mathbb{C} \right\}$

$$(id \otimes id(g) T)^{ab} = \sum_{c,d} g^a{}_c \, g^b{}_d \, T^{cd}$$

▨ 双対表現 (反傾表現)

(V, ρ) : Gの表現

$\Downarrow$

$\bar{V} = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C}) \quad \left(:= \{ f : V \to \mathbb{C} \}, \text{ linear} \right)$

$\bar{\rho} : G \longrightarrow GL(\bar{V})$

を次で定義

$$
\begin{array}{rcl}
{}^{\forall} g \in G, \quad \bar{\rho}(g) : \bar{V} & \to & \bar{V} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
f & \mapsto & \bar{\rho}(g) f
\end{array}
$$

$\bar{\rho}(g) f$ を $(\bar{\rho}(g) f)(v) := f(\rho(g^{-1}) v)$

別の言い方

基底をとる $\Rightarrow V \cong \mathbb{C}^n \quad n = \dim V$

$\ni \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \end{pmatrix}$ n 成分たてベクトル

$\bar{V} \ni 1 \times n$ 行列 $= \underbrace{(\circ \circ \cdots \circ)}_{f}$ n 成分横ベクトル

$\rho(g) : n \times n$ 行列

$\bar{\rho}(g) f := f \rho(g^{-1})$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \bar{\rho}(g) \bar{\rho}(h) f &= f \rho(h^{-1}) \rho(g^{-1}) \\
&= f \rho(h^{-1} g^{-1}) \\
&= f \rho((gh)^{-1}) \\
&= \bar{\rho}(gh) f \qquad \Rightarrow \bar{\rho} \text{ は hom}
\end{aligned}
$$

$(\bar{V}, \bar{\rho})$: 双対表現 (dual representation)

- ユニタリー表現の場合

正規直交基底 $\Rightarrow$ $\rho(g)$：ユニタリー行列

$$\bar{V} \ni (f_1, \cdots, f_n) = f$$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = f^T$$

$$\begin{aligned}
(\bar{\rho}(g) f)^T &= (f \rho(g^{-1}))^T \\
&= (\rho(g)^{-1})^T f^T \\
&= \rho(g)^* f^T
\end{aligned}$$

成分ごとに複素共役

$\Rightarrow$「複素共役表現」

例：$SU(n)$ $\Box$

$$\Rightarrow \bar{\Box} = (\overline{\mathbb{C}^n}, \bar{f})$$

$$\bar{f}(g) = g^*$$

成分ごとに複素共役

※ 事実

$SU(2)$: $\bar{\Box} \simeq \Box$

$SU(n), n \geq 3$: $\bar{\Box} \not\simeq \Box$

▨ 一般の複素共役表現

(V, ρ) : Gの表現

$\rightarrow$ (V, ρ^*) , $\rho^*(g) = (\rho(g))^*$

はGの表現

基底を1つとって
成分ごとに複素共役

※ $(V, \rho) \simeq (V, \rho')$

$\Rightarrow (V, \rho^*) \simeq (V, \rho'^*)$

Ex. 証明せよ.

▨

$(V, \rho) \simeq (V, \rho^*) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 広義実表現

(一般的な言葉じゃないかも)

$\left(\begin{array}{c} \exists \text{基底} \\ \text{s.t } \rho(g) \text{の成分が} \\ \text{すべて実} \end{array} \right) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 実表現 (real rep.)

▨

$(V, \rho), (V', \rho')$ Gの表現

$\Rightarrow (\mathrm{Hom}(V, V'), \rho' \otimes \bar{\rho})$ もGの表現

$A \in \mathrm{Hom}(V, V') \overset{\text{canonicalに}}{\simeq} V' \otimes \bar{V}$

$\rho' \otimes \bar{\rho}(g) A := \rho'(g) A \rho(g^{-1})$

特に

$$(\mathrm{End}(V),\ \rho\otimes\overline{\rho})$$

$$\rho\otimes\overline{\rho}(g)A := \rho(g)A\rho(g^{-1})$$

☆ 既約表現

▨ 定義

(V, ρ)：群 G の表現

- $V \supset W$ 部分ベクトル空間が「不変部分空間」
  $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\forall}g \in G$, ${}^{\forall}w \in W \Rightarrow \rho(g)w \in W$

- 例：$\left.\begin{matrix}\{0\} \subset V \\ V \subset V\end{matrix}\right)$ は不変部分空間
  「自明な不変部分空間」

- $W \subset V$ が不変部分空間
  $\Rightarrow (W, \rho_W)$ $\quad (\rho_W(g) := \rho(g)|_W)$
  が G の表現「部分表現」(sub-representation)
  $\Rightarrow (V/W, \rho_{V/W})$ $\quad (\rho_{V/W}(g)[v] := [\rho(g)v])$
  が G の表現「商表現」(quotient representation)
  Ex. 代表元のとり方によらないことを示せ

- 行列に書いたときに
  $\rho(g) = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$ $\quad \begin{pmatrix} * \\ \hline 0 \end{pmatrix} \in W$ となる基底

• $W \subset V$ が「不変直和因子」

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ($^\exists U \subset V$ s.t. W, U 不変部分空間
$V = W \oplus U$)

基底をとって $\begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix} \in W$, $\begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix} \in U$

$\Rightarrow \rho(g) = \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$ (ブロック対角)

▨ 定義: (V, ρ) が既約表現 (irreducible representation)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (不変部分空間が $\{0\}$, V 以外にない)

• 可約表現 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 既約ではない表現

• (V, ρ) が完全可約

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $(V, \rho) = (V_1, \rho_1) \oplus \cdots \oplus (V_n, \rho_n)$

$(n \geq 1)$

(V_i, ρ_i) は既約

※ 1次元表現は必ず既約

※ 既約表現は完全可約

※ 可約表現は完全可約とは限らない

※ 完全可約 $\Longleftrightarrow$ $^\forall$不変部分空間が不変直和因子

▨ 定理：ユニタリー表現は完全可約

証明 (V, ρ) ユニタリー表現

$V \supset {}^\forall W$ 不変部分空間

$$W^\perp := \{ v \in V \mid {}^\forall w \in W,\ \langle v | w \rangle = 0 \}$$

① $V = W \oplus W^\perp$

② $W^\perp$ は不変部分空間

② の証明

${}^\forall v \in W^\perp,\ {}^\forall g \in G,\ {}^\forall w \in W$

$$\langle \rho(g) v | w \rangle = \langle \rho(g^{-1}) \rho(g) v | \rho(g^{-1}) w \rangle$$

($\rho(g^{-1})$はユニタリー)

$$= \langle v | \underbrace{\rho(g^{-1}) w}_{\in W} \rangle$$

$$= 0$$

$\Rightarrow \rho(g) v \in W^\perp$ ▨

▨ Schurの補題

(V, ρ), (V', ρ') : Gの既約表現

$f : V \longrightarrow V'$: G準同型

$\Rightarrow$ ① $(V, \rho) \simeq (V', \rho')$ のとき

($\Leftrightarrow {}^{\exists} h : V \to V'$: G同型)

${}^{\exists} a \in \mathbb{C}$, $f = ah$

② $(V, \rho) \not\simeq (V', \rho')$ のとき.

$f = 0$

系 : $f : V \to V$: G準同型

$\Rightarrow f = a\, \mathrm{id}_V$, $a \in \mathbb{C}$

恒等変換

☆量子力学との関係

群 G

量子力学（場の理論）に G 対称性があるとき

$\Rightarrow$ (V, ρ) : G のユニタリー表現
（※厳密には射影表現，（この講義では説明しない））

V : Hilbert空間
$\rho(g)$: 変換の演算子
（特に場の理論で）最初から分っているわけではない．

▨ ユニタリー表現 $\Rightarrow$ 既約表現に分解

$$V = \bigoplus_a V_a$$

（どんな V_a がありうるか？は数学の問題）
この講義でやる．

▨ Hamiltonian H と可換 $\Leftrightarrow$ $\forall g \in G$, $H\rho(g) = \rho(g)H$

- エネルギー E の固有空間（$V_E \subset V$: $\forall |v\rangle \in V_E$
  $H|v\rangle = E|v\rangle$）

$\Rightarrow$ (V_E, ρ_{V_E}) は部分表現（Ex. 示せ）

多くの場合．V_E は有限次元

▨ 演算子 A_i （"すべての演算子"の基底）

変換 $\rho(g)^{-1} A_i \rho(g) = A'_i = \sum_j R_i{}^j(g) A_j = (R(g)A)_i$

↑ c数成分の行列

$$\rho(g_2)^{-1}\rho(g_1)^{-1}A_i\rho(g_1)\rho(g_2) = \sum_j R_i{}^j(g_1)\rho(g_2)^{-1}A_j\rho(g_2)$$

$$= \sum_{j,k} R_i{}^j(g_1)R_j{}^k(g_2)A_k$$

$$= (R(g_1)R(g_2)A)_i$$

$$= \rho(g_1g_2)^{-1}A_i\rho(g_1g_2)$$

$$= (R(g_1g_2)A)_i$$

$$\Rightarrow \quad R(g_1)R(g_2) = R(g_1g_2)$$

$\Rightarrow$ R は G の表現!!

例: 球対称ポテンシャル中の粒子

$G = SO(3)$ 対称性

$$\rho(g)^{-1}x_i\rho(g) = R_i{}^j(g)x_j$$

ベクトル表現(定義表現)

5. Lie代数の導入

☆ 群の難しさ

かけ算の構造しかない！

例：$SO(3)$　3次元の回転　良く知っているはず！？

(y軸まわり45°回転)・(x軸まわり30°回転)

= (?軸まわり?°回転)

⋮

無限個の積のルールの集まり.

群の分類，表現の分類 ⇒ 難しい！

(比較：ベクトル空間　線型性

→ 基底の性質が分かれば全部分かる.)

便利な道具：Lie代数

☆ Lie群とLie代数

▨ Lie群 G

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ ・Gは群で多様体

・積、逆元の写像は何回でも微分可能

(だいたい)
・任意の元のまわりで座標がとれる⇒「次元」
・微分という概念がある

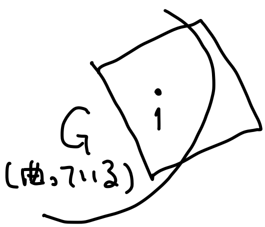
※これまで挙げた群の例はすべてLie群

▨ Lie代数

(Lie代数)

Lie群 G ⇒ $\mathfrak{g}$:= (Gの1における接空間)

↑
(ベクトル空間として)

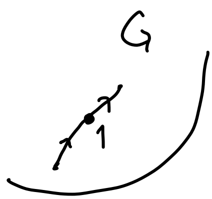


← "接する平らな空間" =: 接空間

少し式で書く.

$f : (-1, 1) \longrightarrow G$, $f(0) = 1$

(開区間)



1 のまわりで座標 x^i , $i=1,\cdots,\dim G$

$x^i=0 \Leftrightarrow 1$

$f(t)$ の座標 $x^i(t)$

$\frac{d}{dt}f(t) \Longrightarrow \frac{dx^i(t)}{dt}$ "速度" → ベクトル

ベクトル空間の構造!!

$\mathfrak{g} \underset{\uparrow}{:=} \left\{ \frac{d}{dt}f(t) \mid \text{いろんな} f \right\}$

ベクトル空間として

ε : 小さいとき

$G \ni f(\varepsilon) \simeq 1+\varepsilon X$, $X \in \mathfrak{g}$

Lie代数 $\mathfrak{g}$ 〜 無限小変換

$$\boxed{\text{Gの中で1の近くは}\ \mathfrak{g}\ \text{を考えれば分かるかもしれないけど}\cdots}$$

▨ Gの積 ⇒ Lie代数の?

$f(t)$: 上で定義したようなもの

- $\forall g \in G$ $F(t):=gf(t)$ ⇒ $F(0)=g$
  $\frac{d}{dt}F(0)$ は g での接ベクトル

$F(\varepsilon) = g(1+\varepsilon X) \quad X \in \mathfrak{g}$

$g^{-1}F(\varepsilon) = 1 + \varepsilon X$

gでの接空間 $\longleftrightarrow$ 1での接空間

↑ これも分かる. ↑ これが分かれば

- $f(\varepsilon) \in G \Rightarrow f(\varepsilon)^N \in G$

$$X \in G \Rightarrow e^{tX} := \lim_{N\to\infty} \underbrace{f\left(\frac{t}{N}\right)^N}_{\simeq \left(1+\frac{tX}{N}\right)^N}$$

t:有限

⇝ tについて Taylor展開

$$e^{tX} = 1 + tX + \frac{1}{2}t^2X^2 + \cdots$$

↑ こいつらは $\mathfrak{g}$の元ではないかもしれない

積

$$e^{tX}e^{tY} = e^{tZ} \quad {}^{\exists}Z \in \mathfrak{g}$$

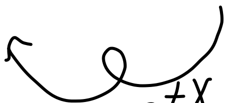
↳ Lie代数の構造?

⇓ Baker-Campbell-Hausdorff の公式

$$Z = \underbrace{X + Y + \frac{1}{2}t[X,Y] + \frac{1}{12}t^2\left([X,[X,Y]] - [Y,[X,Y]]\right) + \cdots}_{\text{カッコ積 } [\,,\,]\text{、線型結合だけで書けている 積は含んでいない}}$$

Lie群 G $\longrightarrow$ Lie代数 $\mathfrak{g}$

(1での接空間)　　ベクトル空間, $[\ ,\ ]$



e^{tX} : だいたい

について

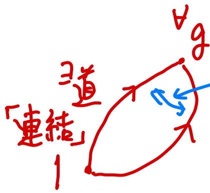
群 多 : 1

$G_1 \longrightarrow \mathfrak{g}$　Lie代数

$G_2 \nearrow$

$\cdots$　$\updownarrow$

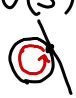
$\exists \tilde{G}$: 単連結が存在して唯一



例

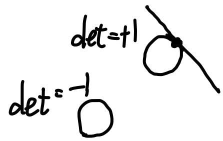
単連結　$SU(2) \longleftrightarrow su(2)$　Lie代数

連結だが
単連結でない　$SO(3) \nearrow$　　$\nwarrow$



連結でない

連結でない　$O(3)$



☆ 定義

$\mathbb{K}$ Lie代数 $\mathfrak{g}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$

I. $\mathfrak{g}$ は $\mathbb{K}$ ベクトル空間

II. $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$
が次を満たす
$X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, $a, b, c \in \mathbb{K}$

① $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$

② $[X, Y] = -[Y, X]$

③ $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$
("Jacobi 恒等式")

※抽象的な $\mathbb{K}$ ベクトル空間, $[\ ,\ ]$ の構造にのみ注目する.

$\dim \mathfrak{g}$: $\mathfrak{g}$ の次元 $=$ $\mathfrak{g}$ の $\mathbb{K}$-ベクトル空間としての次元

※この講義では有限次元Lie代数のみ取りあつかう.

例1:　V : $\mathbb{K}$・ベクトル空間

$$\mathrm{End}(V) := \{ X : V \to V \text{, linear} \} \quad = \mathfrak{gl}(V)$$

Lie代数として.

$$[X, Y] = XY - YX$$

記号　$\mathfrak{gl}(N, \mathbb{K}) := \mathrm{End}(\mathbb{K}^N)$

例2:　$\mathfrak{g} = \mathbb{K}^n$, ${}^\forall X, Y \in \mathfrak{g}$　$[X, Y] = 0$

"Abelian Lie代数"

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$のとき.　$\mathfrak{u}(1)^n$

$\mathbb{R}$ Lie代数

例3:　$\mathfrak{su}(N) := \{ X \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^N) \mid X^\dagger = -X, \ \mathrm{tr} X = 0 \}$

$$[X, Y] = XY - YX$$

Ex. ・$\mathfrak{su}(N)$が$[\,,\,]$で閉じていることを示せ

・$\dim \mathfrak{su}(N) = ?$

例4:　$\mathfrak{so}(N) := \{ X \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^N) \mid X^T = -X \}$

Ex. 上と同じ

例5:　$\mathfrak{usp}(2k) = \{ X \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2k}) \mid X^\dagger = -X, \ XJ + JX^T = 0 \}$

ただし　$J = \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{0}}^{k}\ \overbrace{\hphantom{-1}}^{k} & \\ \left(\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}k \\ \}k \end{array} \end{array}$

例6：Heisenberg 代数

$\mathfrak{g} = \langle p, q, z \rangle$, $[p, q] = z$, 他は可換

▨ 形式的 exp → 単連結 Lie 群

$$\mathfrak{su}(N) \longrightarrow SU(N)$$
$$\mathfrak{so}(N) \longrightarrow Spin(N) \quad (SO(N)\text{でないことに注意})$$
$$\mathfrak{usp}(2k) \longrightarrow USp(2k)$$

▨ 基底をとる

T_a , $a = 1, \cdots, \dim \mathfrak{g}$ $\Rightarrow$ $X = \underset{\in \mathbb{K}}{X^a} T_a$

$[T_a, T_b] \in \mathfrak{g}$

⇒ 基底の線型結合で表せる

$[T_a, T_b] = f_{ab}{}^c T_c$

$f_{ab}{}^c$ ：構造定数（基底のとり方による）

（⇒ $\mathfrak{g}$の構造を有限個の数で表せる. cf 群の構造）

例：$\mathfrak{su}(2)$

T_a : $a = 1, 2, 3$

$$T_1 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow [T_a, T_b] = \varepsilon_{abc} T_c$ 完全反対称, $\varepsilon_{123} = 1$

※ 物理でよく使われる convention とは i 倍異なることに注意.

☆ 複素化、実構造

▨ $\mathfrak{g}$: $\mathbb{R}$ Lie代数

$\Rightarrow$ $\mathbb{C}$ Lie代数 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} := \bigoplus_a \mathbb{C} T_a$ 　 T_a : $\mathfrak{g}$ のbasis

$\mathfrak{g}$ の複素化

例 : $\mathfrak{su}(2)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) := \{ 2\times 2$ 複素行列, traceless $\}$

$\mathfrak{su}(2) = \bigoplus_{a=1,2,3} \mathbb{R} T_a$ 　 $= \bigoplus_{a=1,2,3} \mathbb{C} T_a$

$\mathfrak{sl}_2$ と略記

$\mathfrak{so}(2,1)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}_2$ 　 (複素化すると同じになる $\mathbb{R}$ Lie代数がある)

$SO(2,1)$ のLie代数

▨ $\tilde{\mathfrak{g}}$: $\mathbb{C}$ Lie代数 の実構造とは

$\dagger : \tilde{\mathfrak{g}} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ で次をみたすもの

$a, b \in \mathbb{C}$, $X, Y \in \tilde{\mathfrak{g}}$

- $(X^{\dagger})^{\dagger} = X$
- $(aX + bY)^{\dagger} = a^* X^{\dagger} + b^* Y^{\dagger}$
- $[X, Y]^{\dagger} = -[X^{\dagger}, Y^{\dagger}]$

※ 行列のエルミート共役を抽象化したもの

※ 一般に実構造はいろいろある.

$\dagger$: $\tilde{\mathfrak{g}}$ の実構造

$\Rightarrow$ $\mathfrak{g} := \{ X \in \tilde{\mathfrak{g}} \mid X^\dagger = -X \} = \mathrm{Im}\, \tilde{\mathfrak{g}}$

は $\mathbb{R}$ Lie代数「実形」 "real form"

↑ たぶんここだけの記号

$\mathbb{R}$ Lie代数

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\text{複素化}} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \dagger \quad (T_a^\dagger = -T_a)$$

$$\langle T_a \rangle \xleftarrow{\mathrm{Im}}$$

1 : 1

- $\mathfrak{g}$ を考えるかわりに $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \dagger)$ を考えてもよい
- $\dagger$ によらないことは $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の様々な実形に共通

例 : $\mathfrak{sl}_2 = \langle T_a \ . \ a = 1, 2, 3 \rangle$ $\quad [T_a, T_b] = \varepsilon_{abc} T_c$

ε_{abc} : 完全反対称

$\varepsilon_{123} = 1$

i) 実構造その1

$$T_a^\dagger = -T_a \longrightarrow \mathrm{Im}\, \mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{su}(2)$$

ii) 実構造その2

$$T_1^\dagger = T_1, \quad T_2^\dagger = T_2, \quad T_3^\dagger = -T_3$$

$$\rightarrow \mathrm{Im}\, \mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{so}(2, 1)$$

☆言葉

$\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$: Lie代数

▨ map $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ が準同型 (homomorphism)

$\Leftrightarrow$ ・線型, ${}^\forall X, Y \in \mathfrak{g}$, $f([X, Y]) = [f(X), f(Y)]$

▨ f : 準同型, 全単射 $\Rightarrow$

・fを「同型(写像)」(isomorphism)

・$\mathfrak{g}$と$\mathfrak{h}$は「同型」(isomorphic)

※同型なLie代数に共通の性質に注目する.

▨ 直和

$\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$: ベクトル空間として直和

$$\underset{\mathfrak{g}}{X_1} + \underset{\mathfrak{h}}{X_2},\ \underset{\mathfrak{g}}{Y_1} + \underset{\mathfrak{h}}{Y_2} \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$$

$$\Rightarrow [X_1 + X_2, Y_1 + Y_2] = [X_1, Y_1] + [X_2, Y_2]$$

☆ 表現

$\mathfrak{g}$: Lie代数,

$$\boxed{\begin{array}{l} V : \mathbb{C}\text{ベクトル空間},\quad \rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)\ \text{準同型} \\ \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\quad (V, \rho)\ \text{を}\ \mathfrak{g}\ \text{の表現} \end{array}}$$

- $\dim V$ を表現の次元
- V を「表現空間」「$\mathfrak{g}$ 加群」「多重項」…
- ρ が単射 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 「忠実な表現」(faithful)
- 基底 T_a に対して $\rho(T_a) \in \mathrm{End}(V)$ s.t.

$$[\rho(T_a), \rho(T_b)] = f_{ab}{}^{c}\, \rho(T_c)$$

なる $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ linear が決まって (V, ρ) が表現

▨ $(V, \rho), (V', \rho')$: $\mathfrak{g}$の表現

- $f: V \to V'$ linear, s.t. $^\forall X \in \mathfrak{g}$
  $$f\rho(X) = \rho'(X)f$$
  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ fは$\mathfrak{g}$準同型

- fが$\mathfrak{g}$準同型かつ全単射のとき
  f : $\mathfrak{g}$同型
  $(V, \rho), (V', \rho')$は同値な表現

※同値な表現に共通の性質を考えたい

例1: $^\forall X \in \mathfrak{g}$, $\rho(X) = 0$
(V, ρ)は表現（自明な表現）

例2: $\mathfrak{su}(n)$の基本表現 $V = \mathbb{C}^n$
（そのまま行列で表す）

▨ Adjoint 表現（重要）

$V = \mathfrak{g}$

$\mathrm{ad}(X)Y := [X, Y]$ ⇒ $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$: Adjoint表現
（他にVを持ってくる必要がない）

Ex. Adj表現が表現であることを示せ.

▨ ユニタリー表現

V: $\mathbb{C}$ ベクトル空間, エルミート内積付き

(V, ρ): 表現 s.t. $\forall X \in \mathfrak{g}$, $\rho(X)^\dagger = -\rho(X)$

☆ 表現の作り方

(V,ρ), (V_1,ρ_1), (V_2,ρ_2) : $\mathfrak{g}$の表現

▨ 直和

$$(V_1,\rho_1)\oplus(V_2,\rho_2) = (V_1\oplus V_2,\ \rho_1\oplus\rho_2)$$

$$\rho_1\oplus\rho_2(X) := \rho_1(X)\oplus\rho_2(X)$$

▨ テンソル積

$$(V_1,\rho_1)\otimes(V_2,\rho_2) = (V_1\otimes V_2,\ \rho_1\otimes\rho_2)$$

$$\rho_1\otimes\rho_2\ (X) := \rho_1(X)\otimes 1 + 1\otimes\rho_2(X)$$

<u>Ex.</u> 表現になっていることを確かめよ.

例　$su(n)$　$(\mathbb{C}^n, id)$ 基本表現　$\square$

$id(X) = X$

$$\square\otimes\square = (\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^n,\ id\otimes id)$$

$$V\otimes V \ni \sum w^{ij}\, e_i\otimes e_j = w$$

$$(id\otimes id(X)\,w)^{ij} = X^i{}_k w^{kj} + X^j{}_k w^{ik}$$

▨ 双対表現

$(\bar{V}, \bar{\rho})$

$\bar{\rho}(X) = -\rho(X)^T$

▨ 複素共役表現 （$\mathbb{R}$ Lie代数の場合）

(V, ρ)

$\rho^*(X) = \rho(X)^*$ （成分ごとに複素共役）

※ ユニタリー表現の場合は双対表現と同値

☆ 既約表現

(V, ρ) : $\mathfrak{g}$ の表現

▨ 不変部分空間 $W \subset V$

$\forall X \in \mathfrak{g}, \ \forall w \in W \Rightarrow \rho(X) w \in W$

$\Rightarrow$ 部分表現 (W, ρ_W)

商表現 $(V/W, \rho_{V/W})$

▨ ・$\{0\}$, V 以外に部分表現がない

$\Rightarrow$「既約表現」

・既約でない表現 = 可約表現

・完全可約 : 1つ以上の既約表現に分解できる.

☆ 例：$\mathfrak{sl}_2$ の有限次元表現

$$\mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \mathfrak{su}(2)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(2,1)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{su}(1,1)^{\mathbb{C}}$$

$$\left(\text{basis} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

$(2J_3)$

$$\left(\begin{array}{l} [H,E] = 2E,\ [H,F] = -2F \\ [E,F] = H \end{array} \right)$$

(V,ρ)：有限次元表現（内積は考えない）

⇒ 分類したい．

Lemma ：$\rho(H)$ は対角化できる．（証明略）

Re が最大の固有値 λ，固有ベクトルの1つ $|\lambda\rangle$

$$\rho(H)|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \rho(E)|\lambda\rangle = 0 \quad (\because \ \rho(H)\rho(E)|\lambda\rangle = (\lambda+2)\rho(E)|\lambda\rangle$$

$$= 0$$

Re λ は最大だったので
$\lambda+2$ は固有値では
ない

$$|\lambda\rangle,\ \rho(F)|\lambda\rangle,\ \rho(F)^2|\lambda\rangle,\ \cdots$$

有限次元なのでどこかで 0
になるはず！？

有用な考え方

$\tilde{V}_\lambda := \langle \ |\lambda-2n\rangle, \ n=0,1,2,\cdots \ \rangle$ （無限次元）

$$\tilde{\rho}_\lambda(H)|\lambda-2n\rangle = (\lambda-2n)|\lambda-2n\rangle$$

$$\tilde{\rho}_\lambda(E)|\lambda\rangle = 0$$

$$\tilde{\rho}_\lambda(F)|\lambda-2n\rangle = |\lambda-2n-2\rangle$$

$\Rightarrow \tilde{\rho}(E)|\lambda-2n-2\rangle = a_n|\lambda-2n\rangle$

$(\tilde{V}_\lambda, \tilde{\rho}_\lambda)$ は $\mathfrak{sl}_2$ の無限次元表現

（$\tilde{V}_\lambda$ を）「Verma 加群」

$(\tilde{V}_\lambda, \tilde{\rho}_\lambda)$ から有限次元表現を作れるか？

① 有限次元部分表現があれば…

⇒ 無理 （Ex. 証明せよ（ヒント 背理法を用いよ））

② 無限次元部分表現 W → 商表現が有限次元になりうる.

$$\begin{tikzcd}
|\lambda\rangle \arrow[r, bend right, "\tilde{\rho}_\lambda(F)"'] & |\lambda-2\rangle \arrow[l, bend right, "\tilde{\rho}_\lambda(E)"'] \arrow[r, bend right, "\tilde{\rho}_\lambda(F)"'] & |\lambda-4\rangle \arrow[l, bend right, "\tilde{\rho}_\lambda(E)"'] & \cdots \arrow[r, bend right, "\tilde{\rho}_\lambda(E)"'] & |\lambda-2n\rangle \arrow[l, bend right, "\tilde{\rho}_\lambda(E)"']
\end{tikzcd}$$

← 戻れない可能性

これがとぎれることはない

$$\tilde{\rho}_\lambda(E)|\lambda-2n-2\rangle \overset{?}{=} 0 \qquad \text{"singular vector"}$$

$$\tilde{\rho}_\lambda(E)|\lambda-2n-2\rangle = \tilde{\rho}_\lambda(E)\tilde{\rho}_\lambda(F)|\lambda-2n\rangle$$

$=: a_n|\lambda-2n\rangle$

$$= \left(\tilde{\rho}_\lambda(H) + \tilde{\rho}_\lambda(F)\tilde{\rho}_\lambda(E)\right)|\lambda-2n\rangle$$

$$= (\lambda-2n+a_{n-1})|\lambda-2n\rangle$$

$$a_n = \lambda-2n+a_{n-1}, \quad a_{-1}=0$$

$$= (\lambda-2n)+(\lambda-2n+2)+\cdots+\lambda$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)(2\lambda-2n)$$

$\Rightarrow$ $\lambda\,(\in n) = 0, 1, 2, \cdots$ のときのみ

$\exists W \subset \tilde{V}_\lambda$ 不変部分空間

このとき $W = \langle\, |-\lambda-2k\rangle,\ k=1,2,3,\cdots \,\rangle$

$V_\lambda := \tilde{V}_\lambda / W$, ρ_λ : $\rho_\lambda(X)[|\psi\rangle] = [\tilde{\rho}_\lambda(X)|\psi\rangle]$

Wの元を0と思う

$(V_\lambda, \rho_\lambda)$ は有限次元 既約表現

$f : V_\lambda \to V$ $\mathfrak{g}$-hom, 単射, (V, ρ):有限次元表現

$$f(|\lambda-2n\rangle) = \rho(F)^n |\lambda\rangle$$

$$(V_\lambda, \rho_\lambda) \underset{\text{同値}}{\simeq} (\mathrm{Im} f, \rho|_{\mathrm{Im} f})$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Im} f$ 以外で最大の固有値をとって、くりかえす.

結論 : ・$\mathfrak{sl}_2$の有限次元既約表現は

$(V_\lambda, \rho_\lambda)$, $\lambda = 0, 1, 2, \cdots$

に同値

・$\mathfrak{sl}_2$の有限次元表現は完全可約

(※ $su(2)$のスピンj表現 $\simeq$ (V_{2j}, ρ_{2j}))

6. 単純Lie代数の分類

☆ イデアル

$\mathfrak{g}$: Lie代数

▨ $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ が部分代数 (sub algebra)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathfrak{h}$ 部分ベクトル空間, $[\ ,\ ]$ について閉じている

▨ $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ が「不変部分代数」「イデアル」(ideal)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $^{\forall}X \in \mathfrak{g},\ ^{\forall}Y \in \mathfrak{h} \Rightarrow [X, Y] \in \mathfrak{h}$

(Adjoint表現の不変部分空間)

▨ $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ がイデアル

$\Rightarrow$ $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ はLie代数

Ex. $[\ ,\ ]$ を定義せよ.

$\mathfrak{g}$が半単純 $\overset{def}{\iff}$ Abelianなイデアルを持たない

$\mathfrak{g}$が単純 $\overset{def}{\iff}$ $\mathfrak{g}$はAbelianでなく、かつ
$\{0\}$, $\mathfrak{g}$ 以外にイデアルを持たない.

☆ 目標

複素単純Lie代数の分類

答え

A_r : $r=1,2,3,\cdots$ $(=\mathfrak{su}(r+1)^{\mathbb{C}})$

B_r : $r=2,3,4,\cdots$ $(=\mathfrak{so}(2r+1)^{\mathbb{C}})$

C_r : $r=3,4,\cdots$ $(=\mathfrak{usp}(2r)^{\mathbb{C}})$

D_r : $r=4,5,\cdots$ $(=\mathfrak{so}(2r)^{\mathbb{C}})$

E_6, E_7, E_8

F_4

G_2

☆ 内積

$\mathfrak{g}$: Lie代数

▨「不変対称内積」$(\, , \,)$:
$\mathfrak{g}$の(正定値とは限らない)対称内積 $(\, , \,)$ であって
$^\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g} \quad ([X, Y], Z) = -(Y, [X, Z])$
を満たすもの. (adjoint表現が反対称)

※ $\mathbb{C}$ Lie代数であっても、エルミート内積ではなく、
対称内積を考える.

- 例: (V, ρ) : $\mathfrak{g}$の表現

$$(X, Y) = \mathrm{Tr}(\rho(X)\rho(Y))$$

(表現による)

Ex. 不変対称内積であることを示せ.

- $g_{ab} := (T_a, T_b) \qquad [T_a, T_b] = f_{ab}{}^c T_c$

$$\Rightarrow \quad f_{abc} := f_{ab}{}^d g_{dc}$$

$$= ([T_a, T_b], T_c)$$

は完全反対称、

▨ $\mathfrak{g}$: $\mathbb{R}$ Lie代数, $(\ ,\ )$: 不変対称内積

- $(\mathfrak{g}, (\ ,\ ))$ がコンパクトLie代数
  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $(\ ,\ )$ が正定値

☆ 様々な定理

▨ 次の2つは同値
(1) $\mathfrak{g}$ は半単純
(2) $(X, Y)_{ad} := \mathrm{Tr}(ad(X)\, ad(Y))$ が非退化
($\det g_{ab} \neq 0$)

▨ 半単純Lie代数はいくつかの単純Lie代数の直和

▨ 単純Lie代数の不変内積 $(\ ,\ )$ は $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$
$(X, Y) = \lambda (X, Y)_{ad}$

▨ 複素単純Lie代数にはコンパクトな実形が"ただ一つ"存在する
(内積の正数倍をのぞいて)

▨ コンパクトLie代数はいくつかの単純Lie代数とAbelian Lie代数の直和

☆ Cartan標準形

$\mathfrak{g}$: 複素単純Lie代数

▨ 定義

$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ が「Cartan部分代数」

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 次の(1),(2),(3)を満たす.

(1) $\mathfrak{h}$ は Abelian部分代数

(2) $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ となる Abelian部分代数 $\mathfrak{k}$ は存在しない

(3) $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$ は同時対角化可能

($\exists$ basis T_a s.t. $\forall H \in \mathfrak{h}$ $\mathrm{ad}(H)$は対角行列)

▨ 定理

$\mathfrak{h}$ のとり方は共役をのぞいて一意.

$$\mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}' = \exp(\mathrm{ad}(X))\,\mathfrak{h}$$

$$(X \in \mathfrak{g})$$

▨ 定義 : $\dim \mathfrak{h}$: $\mathfrak{g}$ のランク (rank)

※ Lie代数 $\mathfrak{g}$ ・次元 $\dim \mathfrak{g}$, ランク $\mathrm{rank}\, \mathfrak{g}$ がある.

ここから先 $\mathfrak{h}$ を1つとってきて固定

▨ ルート

ad($\mathfrak{h}$) の同時固有ベクトル E_α

$$[H, E_\alpha] = \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{C}}}{\alpha(H)}\, E_\alpha \qquad \alpha : \mathfrak{h} \to \mathbb{C} \quad \text{linear}$$

$$\alpha \in \overline{\mathfrak{h}}$$

固有空間 $\mathfrak{g}_\alpha$

定義：上のような $E_\alpha \neq 0$ が存在

$\iff$ α を「ルート」(root)

$$\Delta := (\text{ルート全体}) \subset \overline{\mathfrak{h}}$$

部分ベクトル空間ではない

$$\Rightarrow \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha \ \text{と分解}$$

▨ すぐ分かる性質

- $[E_\alpha, E_\beta] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} \qquad \alpha+\beta \neq 0$

  <u>Ex.</u> 確かめよ.

- $[E_\alpha, E_{-\alpha}] \in \mathfrak{h}$

- $(\ ,\ )$: 不変内積

  $(E_\alpha, E_\beta) = 0 \quad \text{if} \quad \alpha+\beta \neq 0$

  <u>Ex.</u> 確かめよ

▨ 方針

- $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1 \quad \text{if} \quad \alpha \in \Delta$ を示す.

  $\Rightarrow \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \langle E_\alpha, \alpha \in \Delta \rangle$

$\Downarrow$

Cartan 標準形

$H, H' \in \mathfrak{h}$

$[H, H'] = 0$ ← $\mathfrak{h}$ の定義

$[H, E_\alpha] = \alpha(H) E_\alpha$ ← α の定義

$[E_\alpha, E_\beta] = 0 \quad \text{if} \quad \alpha+\beta \notin \Delta, \ \alpha+\beta \neq 0$ ← さっきの事実

$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta} \quad \text{if} \quad \alpha+\beta \neq 0, \ \alpha+\beta \in \Delta$

$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha \neq 0, \ H_\alpha \in \mathfrak{h}$ ← 示す必要あり.

$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{s}_\alpha := \langle E_\alpha, E_{-\alpha}, H_\alpha \rangle \simeq \mathfrak{sl}_2$

$\Rightarrow$ $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$ は $\mathfrak{s}_\alpha \simeq \mathfrak{sl}_2$ の有限次元表現

$\Rightarrow$ 分類がある!!

$\Downarrow$

ありうる Δ の分類 $\Longrightarrow$ $\mathfrak{g}$ の分類

($\overset{\Downarrow}{N_{\alpha,\beta}}$ が Δ だけから決まること)

☆ Δ の構造

$$(X, Y) := C\,(X,Y)_{\mathrm{ad}} = C\,\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y))$$

非退化 $\quad C > 0$ 1つとって固定

(後で便利なようにとるかもしれない)

▨ 補題

① $(E_\alpha, E_\beta) = 0 \quad , \alpha + \beta \neq 0 \quad \left(\overset{①'}{\Rightarrow} \alpha \in \Delta \Rightarrow -\alpha \in \Delta \right)$

② $(H, E_\alpha) = 0 \quad , \alpha \neq 0$

証明① $\forall H' \in \mathfrak{h} \quad ([H', E_\alpha], E_\beta) + (E_\alpha, [H', E_\beta]) = 0$

$$= \underbrace{(\alpha(H') + \beta(H'))}_{\neq 0 \text{ for } \exists H'} (E_\alpha, E_\beta)$$

$\Rightarrow (E_\alpha, E_\beta) = 0$ $\qquad$ ②も同様 ▨

② ⇒ $\mathfrak{h} \perp \mathfrak{g}_\alpha \quad \alpha \neq 0$

⇒ $(\ ,\ )|_{\mathfrak{h}}$ は $\mathfrak{h}$ 上の非退化内積 (g_{IJ})

$\mathfrak{h} \longrightarrow \bar{\mathfrak{h}}$ linear, bijection (g_{IJ}, g^{IJ} で添字の上げ下げ)

$H \longmapsto (H, \cdot)$

$\bar{\mathfrak{h}} \ni \lambda \longmapsfrom H_\lambda \quad {}^\forall H \in \mathfrak{h} \quad (H_\lambda, H) = \lambda(H)$

と決める

$\bar{\mathfrak{h}} \ni \lambda, \lambda' \quad \Rightarrow \quad (\lambda, \lambda') := (H_\lambda, H_{\lambda'})$

補題

④ $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = (E_\alpha, E_{-\alpha}) H_\alpha$

${}^\forall H \in \mathfrak{h}$ に対して

((左辺), H) = ((右辺), H) を示せばよい.

<u>Ex.</u> 証明せよ.

⇒ $(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$ となるように $E_\alpha, E_{-\alpha}$ を

規格化

⑤ $(\alpha,\alpha)\neq 0 \qquad (\alpha,\beta\in\Delta)$

⑥ $\dfrac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} =: C_{\alpha,\beta}$ は 有理数

⑦ $(\alpha,\alpha) > 0$

証明

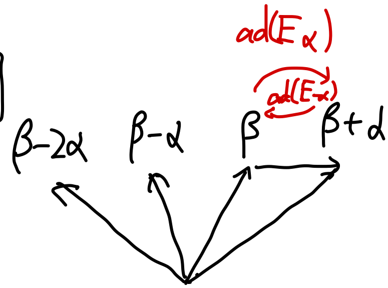
$$V := \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+j\alpha}$$

(V, ad) $\quad \mathfrak{s}_\alpha := \langle H_\alpha, E_\alpha, E_{-\alpha}\rangle \simeq \mathfrak{sl}_2$

の表現

$$\mathrm{ad}(H_\alpha) = [\mathrm{ad}(E_\alpha), \mathrm{ad}(E_{-\alpha})]$$

$$\Rightarrow \operatorname{tr}_V\left(\mathrm{ad}(H_\alpha)\right) = 0$$



$$= \sum_j \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}_{\beta+j\alpha}} (\mathrm{ad}\, H_\alpha) = \sum_j (\beta+j\alpha)(H_\alpha) \dim \mathfrak{g}_{\beta+j\alpha}$$

$$= \sum_j \left(\beta(H_\alpha) + j\alpha(H_\alpha)\right) \dim \mathfrak{g}_{\beta+j\alpha}$$

$$\beta(H_\alpha) \sum_j \dim \mathfrak{g}_{\beta+j\alpha} = \alpha(H_\alpha) \sum_j j \dim \mathfrak{g}_{\beta+j\alpha} \quad \cdots\cdots (*)$$

$\alpha(H_\alpha)$を仮定

$$\Rightarrow \quad 0 = \beta(H_\alpha)\underbrace{\sum_j \dim \mathfrak{g}_{\beta+j\alpha}}_{>0}$$

$\Rightarrow \beta(H_\alpha) = 0$

$\Rightarrow$ H_αはすべての元と可換

$\Rightarrow$ $\mathbb{C}H_\alpha$は$\mathfrak{g}$のイデアル

$\overset{\text{単純}}{\Rightarrow}$ $H_\alpha = 0$

$\alpha \neq 0$に矛盾

$\Rightarrow$ ⑤ $(\alpha, \alpha)\left(= \alpha(H_\alpha)\right) \neq 0$

(*)

$$\Rightarrow C_{\alpha,\beta} = \frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = \frac{\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} = \frac{\sum_j j \dim \mathfrak{g}_\alpha}{\sum_j \dim \mathfrak{g}_\alpha}$$

$\Rightarrow$ ⑥ $C_{\alpha,\beta}$は有理数

$$(\alpha,\alpha) = (H_\alpha, H_\alpha) = C\,\mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}(H_\alpha)\,\mathrm{ad}(H_\alpha)\right)$$

$$= C \sum_{\beta\in\Delta} \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}_\beta}\left[\mathrm{ad}(H_\alpha)\,\mathrm{ad}(H_\alpha)\right]$$

固有値の和

$$= C \sum_{\beta\in\Delta} \underbrace{\beta(H_\alpha)^2}_{(\alpha,\beta)^2} \dim \mathfrak{g}_\beta$$

$$= (\alpha,\alpha)^2\, C \sum_{\beta\in\Delta} C_{\alpha,\beta}^2 \dim \mathfrak{g}_\beta$$

$$(\alpha,\alpha)^{-1} = C \sum_{\beta\in\Delta} C_{\alpha,\beta}^2 \dim \mathfrak{g}_\beta > 0 \quad \text{if } C>0$$

$\Rightarrow$ ⑦

定義: $\mathfrak{s}_\alpha \simeq \mathfrak{sl}_2$ の基底

$$h_\alpha := \frac{2}{(\alpha,\alpha)} H_\alpha, \quad e_\alpha := E_\alpha, \quad f_\alpha := \frac{2}{(\alpha,\alpha)} E_{-\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} [h_\alpha, e_\alpha] &= 2e_\alpha \\ [h_\alpha, f_\alpha] &= -2f_\alpha \\ [e_\alpha, f_\alpha] &= h_\alpha \end{aligned}$$

(前に出した $\mathfrak{sl}_2$ の基底と同じ)

⑧ $\alpha \in \Delta \Rightarrow \dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$

証明

$(e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha)$ を1つとる.

$\dim \mathfrak{g}_{-\alpha} \geq 2$ を仮定

$\Rightarrow \mathfrak{g}_{-\alpha} \ni {}^\exists Y \neq 0$ s.t. $(e_\alpha, Y) = 0$

$$\mathrm{ad}(e_\alpha) Y = [e_\alpha, Y] = (e_\alpha, Y) H_\alpha = 0$$

Yは highest weight state

しかし $\mathrm{ad}(h_\alpha) Y = \left[\frac{2}{(\alpha,\alpha)} H_\alpha, Y\right]$

$$= \frac{2}{(\alpha,\alpha)}(-\alpha(H_\alpha))Y$$

$$= -2Y$$

h_α の固有値が負 $\Rightarrow$ 矛盾 ▨

☆ 単純ルート. Catan行列. Dinkin図

▨ ルートは $\mathbb{R}$ベクトル空間を張っている.

定義 :

$$\overline{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}} := \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}\alpha$$

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} := \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R} H_\alpha$$

$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ と $\overline{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}$ は $\mathbb{R}$ベクトル空間として双対

補題 $(\ ,\ )$ は $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ 上で正定値

∵ $\forall H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$

$$\langle H, H\rangle = \sum_{\beta\in\Delta} \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}_\beta} [\operatorname{ad}(H)\operatorname{ad}(H)]$$ ← 1次元

$$= \sum_{\beta\in\Delta} \beta(H)^2$$

$\beta(H)$は実数 $\Leftarrow$ $H = \sum_{\alpha\in\Delta} a_\alpha H_\alpha$ a_α:実数

$$\beta(H) = \sum_{\alpha\in\Delta} a_\alpha \beta(H_\alpha) = \sum_{\alpha} a_\alpha (\alpha, \beta)$$

▨ 正ルート

$$H_0 \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \quad \text{s.t.} \quad {}^{\forall}\alpha \in \Delta \quad \alpha(H_0) \neq 0$$

H_0 を選んで固定

$$\lambda \in \overline{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}} \Rightarrow \lambda(H_0) \in \mathbb{R}$$ を「高さ」
hight

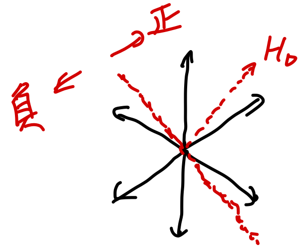
（※ 1方向選んで、そっち方向の座標を「高さ」と呼んでいる）

__定義__

- $\alpha \in \Delta$ が「正ルート」(positive root)
  $\Leftrightarrow \alpha(H_0) > 0$

  「負ルート」(negative root)
  $\Leftrightarrow \alpha(H_0) < 0$

- $\Delta_+ :=$ (正ルート全体)
  $\Delta_- :=$ (負ルート全体)



性質

- $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$
- $\Delta_+ \cap \Delta_- = \emptyset$
- $\alpha \in \Delta_+ \Rightarrow -\alpha \in \Delta_-$
- $\alpha, \beta \in \Delta_+,\ \alpha + \beta \in \Delta \Rightarrow \alpha + \beta \in \Delta_+$

▨ 単純ルート

定義: $\alpha \in \Delta_+$ が $\beta, \gamma \in \Delta_+$ を用いて $\alpha = \beta + \gamma$ と書けないとき

α を「単純ルート」(simple root)

$\Pi :=$ (単純ルート全体)

補題:

- 単純ルートは r 個ある $(\Rightarrow \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\} = \Pi)$
- $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ は $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ の基底になる
- $\alpha, \beta \in \Pi \Rightarrow \alpha - \beta \notin \Delta$

($\because$ $\alpha - \beta \in \Delta$ を仮定

$\underline{\alpha - \beta \in \Delta_+}$ or $\beta - \alpha \in \Delta_+$

こちらの場合 $\alpha - \beta = \gamma \in \Delta_+$

$\alpha = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha \in \Pi$ に矛盾)

$\Downarrow$

$\alpha, \beta \in \Pi$

$\Rightarrow \mathfrak{s}_\alpha := \langle e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha \rangle$ の表現を考える

$$\mathrm{ad}(e_\alpha) E_{-\beta} = [e_\alpha, E_{-\beta}] \in \mathfrak{g}_{\alpha-\beta} = \{0\}$$

$$= 0$$

$E_{-\beta}$ は highest weight state

$$\Rightarrow \quad \mathrm{ad}(h_\alpha) E_{-\beta} = p E_{-\beta} \qquad p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$p = -\beta(h_\alpha) = -\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \qquad \left((\beta,\alpha) \leq 0 \right)$$

同様に

$$\frac{2(\beta,\alpha)}{(\beta,\beta)} = -q, \qquad q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$\left(※ \quad p = 0 \leftrightarrow q = 0 \quad (\leftrightarrow (\beta,\alpha) = 0) \right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4(\alpha,\beta)^2}{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)} = pq$$

α と β のなす角 θ

$$(\alpha,\beta) = \sqrt{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)} \cos\theta$$

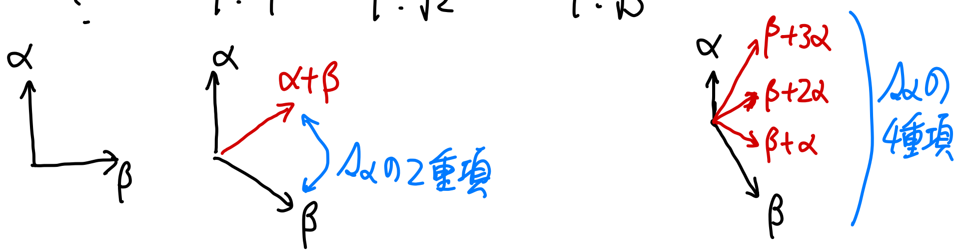
$$4\cos^2\theta = pq \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos\theta = -\frac{\sqrt{pq}}{2}}$$

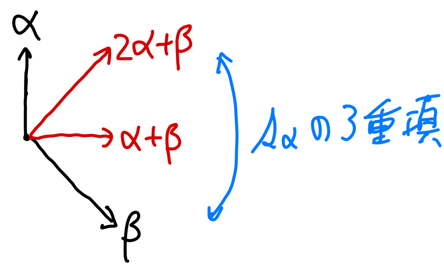
$$\cos\theta = 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \underbrace{-\frac{\sqrt{4}}{2} = -1}_{\alpha = -\beta}, -\frac{\sqrt{5}}{2}, \cdots$$

両方positiveに矛盾

$\cos\theta < -1$

θ	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$
$\cos\theta$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
(p,q)	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$ $(2,1)$	$(1,3)$ $(3,1)$
長さの比	?	$1:1$	$1:\sqrt{2}$	$1:\sqrt{3}$





▨ Cartan行列

$$\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$$

$$A_{ij} := \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}$$

(※ $(\,,\,)$ の定義の factor c によらない)

性質

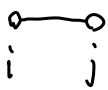
Ⓒ
1. $A_{ij} \in \mathbb{Z}$
2. $A_{ii} = 2$
3. $i \neq j$, $A_{ij} \leq 0$
4. $A_{ij} \neq 0 \Rightarrow A_{ji} \neq 0$
5. $A = BD$ 　　D：正定値対角行列
　　　　　　　B：正定値対称行列

$$B_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$$

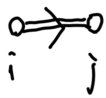
$$D_{ii} = \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)}$$

▨ Dynkin 図 　$A_{ij} \to$ 図

- r 個 ○ を書いて $1 \sim r$ のラベルを付ける
- $i \neq j$ 　$A_{ij} = A_{ji} = -1$ なら 1本線で結ぶ

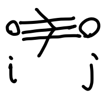


- $i \neq j$ 　$A_{ij} = -2$ なら 2本線で結ぶ．＜を付ける



（長さの比が $\sqrt{2} : 1$
（短い方）＜（長い方））

- $i \neq j$ 　$A_{ij} = -3$，3本 　：



☑ ここまでのまとめ

複素単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ $\longrightarrow$ Cartan 行列 / Dynkin 図 ⓒを満たす

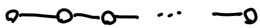
分類のためにやるべきこと.

(1) ⓒを満たす Cartan行列 / Dynkin図 の分類

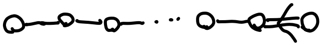
(2) ⓒを満たす Cartan行列 / Dynkin図 $\xrightarrow[(一意)]{}$ 複素単純 Lie代数 $\mathfrak{g}$

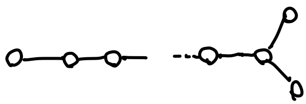
(1)

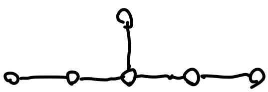
r : rank = (○の数)

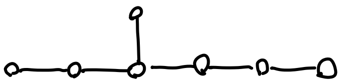
A_r 

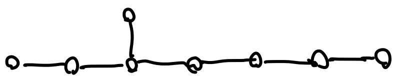
B_r 

C_r 

D_r 

E_6 

E_7 

E_8 

F_4 

G_2 

証明： I. 上に挙げたやつが Ⓒ を満たすこと.

⇒ 1つ1つチェック

II. 上に挙げたやつ以外は Ⓒ を満たさないこと.

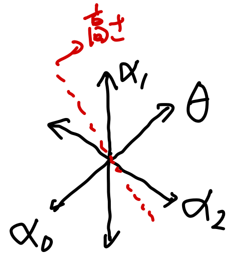
事実：部分図がダメなら、それに何を付け足してもダメ

⇒ ダメなものを列挙 ← 上の分類から作った extended Dynkin図

⇒ 上に挙げたものしかない

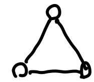
※ extended Dynkin 図

・highest root θ :「高さ」がいちばん高い root



$$\alpha_0 := -\theta$$

$\Downarrow$ $\hat{A}_3$



$$\hat{A}_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} \qquad i, j = 0, \cdots, r$$

$\Rightarrow$ この $\hat{A}_{ij}$ は 0 固有値を持つ

$\Rightarrow$ C の5.を満たさない.

(2) Cartan 行列 Dynkin 図 $\Rightarrow$ Lie 代数

e_i, f_i, h_i を用意 $\quad \mathfrak{h} := \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{C} h_i$

$i = 1, \cdots, r$

交換関係

(和はとらない)

$$[h_i, e_j] = A_{ji} e_j, \quad [h_i, f_j] = -A_{ji} f_j$$

$$[e_i, f_i] = h_i$$

$$[e_i, f_j] = 0 \quad (i \neq j)$$

※ $\langle e_i, f_i, h_i \rangle = \mathfrak{s}_i \simeq \mathfrak{sl}_2$

$i \neq j$, f_j は $\mathfrak{s}_i$ の h.w.s.

weight $-A_{ji}$ (≥ 0 整数)

($\mathfrak{g}$, ad) は これの有限次元表現 になるべし

$(i \neq j)$

$$(\mathrm{ad}\, f_i)^{1 - A_{ji}} f_j = 0$$

同様に

$$(\mathrm{ad}\, e_i)^{1 - A_{ji}} e_j = 0$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathbb{C} E_\alpha$$

$\cdots [e_i, [e_j, e_k]] \Rightarrow E_\alpha, \quad \alpha \in \Delta_+$

$\cdots [f_i, [f_j, f_k]] \Rightarrow E_{-\alpha}, \quad -\alpha \in \Delta_-$

$\Rightarrow$

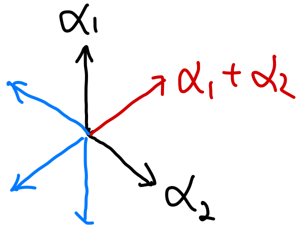
例

A_2  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$E_{\alpha_1} = e_1$
$E_{\alpha_2} = e_2$

$[e_1, e_2] = E_{\alpha_1+\alpha_2} \neq 0$

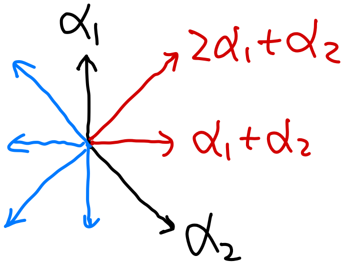
e_1, f_1, h_1
e_2, f_2, h_2



$E_{-\alpha_1} = f_1$
$E_{-\alpha_2} = f_2$
$E_{-\alpha_1-\alpha_2} = [f_1, f_2]$

B_2 

$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$



Ex. G_2のルート図を作れ

$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

7. 単純Lie代数の表現

☆ 概要

分類終わり

ゲージ理論
- ゲージ群 ⇝ コンパクトLie代数 $\mathfrak{g}$
- 物質場 ⇝ $\mathfrak{g}$ のユニタリー表現

これから分類したい

場の「スピン」= Lorentz代数の有限次元表現
(単純Lie代数)
非コンパクト

これからやること

複素単純Lie代数の有限次元表現 …(#)

コンパクトな実形 のユニタリー表現 ⇝ ゲージ理論の物質場の分類

(適当な内積で)

(#)　・既約表現の分類　　（cf. $\mathfrak{sl}_2$ の有限次元表現の分類 （"A_1"））
　　・完全可約であること

☆ ウェイト

$\mathfrak{g}$ ：複素単純Lie代数（⇝ これまで導入したnotation）

(V, ρ) ：有限次元表現

<u>定理</u>：$\mathfrak{h}$ の元は同時対角化できる　（証明略）

同時固有ベクトル $|\lambda\rangle$　　　$\lambda \in \mathfrak{h}^*$

$H \in \mathfrak{h}$　$\rho(H)|\lambda\rangle = \lambda(H)|\lambda\rangle$

λ：「ウェイト」（weight）

$(\alpha \in \Delta)$

$$\rho(H)\rho(E_\alpha)|\lambda\rangle = \rho(E_\alpha)\big(\rho(H)+\alpha(H)\big)|\lambda\rangle$$
$$= \big(\lambda(H)+\alpha(H)\big)\,\rho(E_\alpha)|\lambda\rangle$$
$$= (\lambda+\alpha)(H)\;\rho(E_\alpha)|\lambda\rangle$$

$\Rightarrow$ $\rho(E_\alpha)$ をかけるとウェイトは α 足される

$\rho(E_\alpha)$, $\alpha \in \Delta_+$　（raising operator）

$\rho(E_{-\alpha})$　　:　　（lowering operator）

▨ 基本ウェイト

$\alpha \in \Delta_+$

$\langle e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha =: \alpha^\vee \rangle = s_\alpha \simeq sl_2$

V は s_α の有限次元表現

$$\rho(\alpha^\vee)|\lambda\rangle = \lambda(\alpha^\vee)|\lambda\rangle \Rightarrow \lambda(\alpha^\vee) \in \mathbb{Z}$$

単純コルート $\alpha_i^\vee$ に対して $\lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{Z}$
$=: \lambda_i \quad , i = 1, \cdots, r$

$\omega_i \in \mathfrak{f}^*, i = 1, \cdots, r$ を

$\omega_i(\alpha_j^\vee) = \delta_{ij}$ となるように定義

「基本ウェイト」(fundamental weight)

$$\lambda_i = \lambda(\alpha_i^\vee) \Longleftrightarrow \lambda = \sum_{i=1}^r \lambda_i \omega_i$$

成分表示

$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r]$ 「Dynkinラベル」(Dynkin label)

$(\lambda_i \in \mathbb{Z})$

※ ルートはAdjoint表現のウェイト

特に単純ルート α_j のDynkinラベル $\alpha_j(\alpha_i^\vee) =: A_{ji}$

はCartan行列の成分

☆ 最高ウェイト

高さが最大のウェイト λ

$\lambda(H_0)$

$\left(H_0 \in \mathfrak{h} \text{ は } \alpha_i(H_0) > 0 \right.$ となるようにとってfix $\left.\right)$

$\Rightarrow \quad \rho(e_i)|\lambda\rangle = 0 \quad (\Rightarrow \lambda_i \geq 0)$

$|\lambda\rangle$ に $\rho(f_i)$ をかけていってできるベクトルの張る空間 $V_\lambda \subset V$

定理：・V_λ は不変部分空間（明らか）

・$(V_\lambda, \rho_{V_\lambda})$ は既約表現（sl_2 の表現論から従う）

・(V, ρ) は完全可約

逆に $\quad |\lambda\rangle, \quad \rho_\lambda(H)|\lambda\rangle = \lambda(H)|\lambda\rangle$

$\lambda(\alpha_i^\vee) =: \lambda_i \geq 0$ (dominant weight)

$\rho_\lambda(e_i)|\lambda\rangle = 0 \quad (|\lambda\rangle : \text{h.w.s})$

$\rho_\lambda(f_i)$ をかけていって、sl_2 の有限次元表現になるようにする

$\Rightarrow \quad V_\lambda \qquad (V_\lambda, \rho_\lambda)$ は既約表現

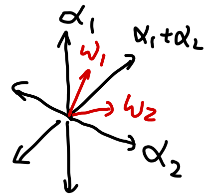
$$\boxed{\begin{array}{c}\text{dominant weight } \lambda \quad (\lambda(\alpha_i^\vee) =: \lambda_i \geq 0) \\ \Big\updownarrow \ 1:1 \\ \text{有限次元既約表現 } (V_\lambda, \rho_\lambda)\end{array}}$$

例

$A_2 = \mathfrak{sl}_3$ （コンパクトな実形 $= \mathfrak{su}(3)$）

o—o

Cartan行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = [2, -1] \\ \alpha_2 = [-1, 2] \end{array}$



h.w.

$\lambda = [1, 0]$ から作れる表現

← α_1 2重項の h.w.s

$[1, 0]$

ウェイトは $-\alpha_1$ ← $\rho_\lambda(f_1)$ ↙

$[-1, 1]$

↗ α_2 2重項の h.w.s

$\xrightarrow{\rho_\lambda(f_2)}$ $[0, -1]$

基本表現.

$\underline{3}$表現, $\mathbf{3}$

$\lambda = [0, 1]$

$[0, 1] \to [1, -1] \to [-1, 0]$

反基本表現

$\bar{3}$表現

$\overline{\mathbf{3}}$

__Ex.__ G_2 の表現を作ってみよ.

☆ テンソル積

$(V_\lambda, \rho_\lambda)$, $(V_{\lambda'}, \rho_{\lambda'})$ irrep

$\Rightarrow$ $V_\lambda \otimes V_{\lambda'}$ = (irrepの直和)に表したい.

最高ウェイト $\lambda+\lambda'$ $\quad |\lambda+\lambda'\rangle = |\lambda\rangle \otimes |\lambda'\rangle$

$= V_{\lambda+\lambda'} \oplus$ (残り)

↑ この中で最も高いウェイトをさがす

⋮

・絶対できる方法

例 : A_2 ($\mathfrak{sl}_3$, コンパクトな実形 $\mathfrak{su}(3)$, 単連結な群 $SU(3)$)

hw $[1, 0]$ → 基本表現

$$V_{[1,0]} \otimes V_{[1,0]} = V_{[2,0]} \oplus \cdots$$

$\alpha_1 = [2, -1]$

$\alpha_2 = [-1, 2]$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & [1,0] \arrow[dl, "-\alpha_1"'] & \\
 & {[-1,1]} \arrow[dr] & & \\
 & & {[0,-1]} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & {[2,0]} \arrow[dl, "-\alpha_1"'] & \\
 & {[0,1]} \arrow[dl, "-\alpha_1"'] \arrow[dr, "-\alpha_2"] & & \\
{[-2,2]} \arrow[dr, "-\alpha_2"'] & & {[1,-1]} \arrow[dl, "-\alpha_1"'] & \\
 & {[-1,0]} \arrow[dr, "-\alpha_2"'] & & \\
 & & {[0,-2]} &
\end{tikzcd}$$

6次元

残り

$$
\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[dr, "-\alpha_2"] & & \\
& {[1,-1]} \arrow[dl] & \\
{[-1,0]} & &
\end{tikzcd}
$$

$$V_{[1,0]} \otimes V_{[1,0]} = V_{[2,0]} \oplus V_{[0,1]}$$

- つぶしは効かないが、うまいやり方はいろいろある.
  (Young図 等)

- 便利な表

  Slansky, Phys. Rept. 79 (1981)
  "Group theory for unified model building"

  Yamatsu, arXiv:1511.08771
  "Finite dimensional Lie algebras and their representation"

- Mathematica パッケージ

  LieART , arXiv:1912.10969

☆ Dynkin 指数

▨ $(\ ,\ )$ の規格化

$\mathfrak{g}$ のルート α の長さは 1 種類 (ADE) (simply laced)

または 2 種類 (BCFG)

長い方のルート α $(\alpha, \alpha) = 2$ となるように $(\ ,\ )$ を決める.
(long root)

$$\Rightarrow \alpha^\vee = \frac{2}{(\alpha,\alpha)} H_\alpha = H_\alpha$$

▨ 定義

(V, ρ) : $\mathfrak{g}$ の有限次元表現

$$\operatorname{tr}_V(\rho(X)\rho(Y)) = \underbrace{I(V,\rho)}_{\text{「Dynkin 指数」 (Dynkin index)}} (X, Y)$$

$I(V,\rho)$ を $I(V)$, $I(\rho)$

$I(V_\lambda, \rho_\lambda)$ を $I(\lambda)$ と書いたりする.

(人によって記号は異なる)

例 : $\mathfrak{sl}_2$ simple root 1つだけ $\alpha_1 \Rightarrow e_1, f_1, h_1$

$\lambda = 1$ 表現 (基本表現)

$$\rho_1(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho_1(f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \rho_1(h_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(h_1, h_1) = 2 \qquad (\text{long coroot})$$

$$\mathrm{tr}\left(\rho_1(h_1)\rho_1(h_1)\right) = 2$$

$$\Rightarrow \quad I(\lambda=1) = 1$$

一般の λ 表現 $(\lambda = 0, 1, 2, \cdots)$

$$\rho_\lambda(h_1) = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda-2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{tr}\left(\rho_\lambda(h_1)\rho_\lambda(h_1)\right) = \lambda^2 + (\lambda-2)^2 + \cdots + (\lambda-2)^2 + \lambda^2$$

$$= \begin{cases} 2\left(\lambda^2 + (\lambda-2)^2 + \cdots + 1^2\right) & \lambda : \text{odd} \\ 2\left(\lambda^2 + (\lambda-2)^2 + \cdots + 2^2\right) & \lambda : \text{even} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad I(\lambda) = \begin{cases} 1^2 + 3^2 + \cdots + \lambda^2 & \lambda : \text{odd} \\ 2^2 + 4^2 + \cdots + \lambda^2 & \lambda : \text{even} \end{cases}$$

Eg.

$$I(\mathrm{adj}) = 4 \quad , \quad I(\lambda=3) = 10$$

$$\overset{\shortparallel}{I(\lambda=2)}$$

▨ 直和、テンソル積

$$I\big((V,\rho)\oplus(V',\rho')\big) = I(V,\rho) + I(V',\rho') \quad \Big(\mathrm{Tr}_{V\oplus V'} = \mathrm{Tr}_{V} + \mathrm{Tr}_{V'}\Big)$$

$$I\big((V,\rho)\otimes(V',\rho')\big) = ?$$

$$(\rho\otimes\rho')(X) = \rho(X)\otimes 1 + 1\otimes\rho'(X)$$

simple

$$\mathrm{Tr}_{V\otimes V'}\left[(\rho\otimes\rho')(X)\ (\rho\otimes\rho')(Y)\right] \qquad (\mathrm{Tr}\,\rho(X) = 0)$$

$$= \mathrm{Tr}_{V\otimes V'}\left[\big(\rho(X)\otimes 1 + 1\otimes\rho'(X)\big)\big(\rho(Y)\otimes 1 + 1\otimes\rho'(Y)\big)\right]$$

$$= \mathrm{Tr}_{V\otimes V'}\left[\rho(X)\rho(Y)\otimes 1 + 1\otimes\rho'(X)\rho'(Y)\right]$$

$$= I(V)\ (X,Y)\dim V' + I(V')\ (X,Y)\dim V$$

$$= \big(I(V)\dim V' + I(V')\dim V\big)\ (X,Y)$$

$$\Rightarrow \quad I(V\otimes V') = I(V)\dim V' + I(V')\dim V$$

例 $\mathfrak{sl}_3$ ($\mathfrak{su}(3)$)

$$[1,0]\otimes[0,1] = \underbrace{[1,1]}_{\text{adj}} \oplus [0,0]$$

$$\left(I([1,0]) = 1 = I([0,1]) \right)$$

$$\dim V_{[1,0]} = \dim V_{[0,1]} = 3\ ,\quad I([0,0]) = 0$$

$$I([1,0]\otimes[0,1]) = 1\times 3 + 3\times 1 = 6 = I([1,1])$$

※ 物理の文献の多くでは (Eg. Peskin, Schroeder)

$$C(V,\rho) = \frac{1}{2} I(V,\rho)$$

を用いている.

☆ 2次のCasimir元

$\mathfrak{su}(2)$のとき　$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$

の一般化

▨ Universal enveloping algebra

$\mathfrak{g}$: Lie代数　$[\,,\,]$ はあるけど かけ算はない.

居場所を作る.

$T_a : a = 1, \cdots, \dim \mathfrak{g}$ basis

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \left(\bigoplus_{a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n} \mathbb{C}\, T_{a_1} \cdots T_{a_n} \right)$$

$\mathbb{C}$倍, 和 : ベクトル空間として

積 : 形式的な積. 結合則

ただし関係 $T_a T_b - T_b T_a - f_{ab}{}^{c} T_c = 0$

※ 基底のとり方によらない.

(V, ρ) : $\mathfrak{g}$の表現 $\Rightarrow$ $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$の表現

$\rho(XY) = \rho(X)\rho(Y)$

▨

$g_{ab} := (T_a, T_b)$.　g^{ab} : g_{ab}の逆行列

$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \ni Q := g^{ab} T_a T_b$

「2次のCasimir」(quadratic Casimir)

※基底のとり方によらない

定理: Q は $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の任意の元と可換

証明 $[T_c, Q] = 0$ を示せばよい (Ex.)

$(V_\lambda, \rho_\lambda)$ irrep of $\mathfrak{g}$

$\Rightarrow \rho_\lambda(Q) = Q(\lambda)\, \mathrm{id}_{V_\lambda}$ $\quad Q(\lambda) \in \mathbb{C}$

(Schurの補題)

「2次のCasimir」(quadratic Casimir)

▨ Cartan基底で計算

$\mathfrak{h} \ni h_i = \alpha_i^\vee, \ i = 1, \cdots, r$

$\alpha \in \Delta_+$, E_α, $E_{-\alpha}$ 規格化

$(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$, $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha$

$g_{(-\alpha)\alpha} = g_{\alpha(-\alpha)} = 1 \Rightarrow g^{\alpha(-\alpha)} = g^{(-\alpha)\alpha} = 1$

$$Q = g^{ij} h_i h_j + \sum_{\alpha \in \Delta_+} (E_\alpha E_{-\alpha} + E_{-\alpha} E_\alpha)$$

$$= g^{ij} h_i h_j + \sum_{\alpha \in \Delta_+} (H_\alpha + 2 E_{-\alpha} E_\alpha)$$

$|\lambda\rangle \in V_\lambda$. h.w.s.

$$\rho_\lambda(Q)|\lambda\rangle = g^{ij}\,\overset{\overset{\lambda_i}{\shortparallel}}{\overset{\lambda(h_i)}{\Uparrow}}{\rho_\lambda(h_i)}\;\overset{\overset{\lambda_j}{\shortparallel}}{\overset{\lambda(h_j)}{\Uparrow}}{\rho_\lambda(h_j)}\,|\lambda\rangle +$$

$$+\sum_{\alpha\in\Delta_+}\Big(\rho_\lambda(H_\alpha)|\lambda\rangle$$

$$+2\rho(E_{-\alpha})\underbrace{\rho(E_\alpha)|\lambda\rangle}_{=0}\Big)$$

$$Q(\lambda) = (\lambda,\lambda) + \sum_{\alpha\in\Delta_+}\underbrace{\lambda(H_\alpha)}_{=(\lambda,\alpha)}$$

$$= \Big(\lambda,\lambda+\sum_{\alpha\in\Delta_+}\alpha\Big)$$

$$= (\lambda,\lambda+2\rho)$$

$\bar{J} \Rightarrow \rho := \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_+}\alpha$: "Weyl vector"

(記号がかぶってしまったけど
表現の ρ とは関係がない)

定理: $\rho(\alpha_i^\vee) = 1$, $i=1,\cdots,r$

$\left(\Rightarrow \rho = \sum_{i=1}^{r}\omega_i\right)$

$$Q(\lambda) = (\lambda,\lambda+2\rho)$$

Eg. $\mathfrak{sl}_2$: $\lambda_1 = 0,1,2,3,\cdots\cdots$ (Dynkin label)

$(\lambda,\lambda') = \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_1'$ $\Rightarrow Q(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda_1(\lambda_1+2)$

物理でよく使う記号 スピンj表現との関係

$$\lambda_1 = 2j$$

$$Q(\text{スピン}\,j) = \frac{1}{2}2j(2j+2) = 2j(j+1)$$

(J^2 の2倍)

■ Dynkin指数との関係

$$\operatorname*{Tr}_{V_\lambda} \rho_\lambda(Q) = \mathrm{Tr}\big(\rho_\lambda(T_a)\,\rho_\lambda(T_b)\big) g^{ab}$$

$$= I(\lambda)\,\langle T_a, T_b\rangle\, g^{ab}$$

$$= I(\lambda)\, g_{ab}\, g^{ab}$$

$$= I(\lambda)\dim \mathfrak{g}$$

$$= \operatorname*{Tr}_{V_\lambda}\big(Q(\lambda)\,\mathrm{id}_{V_\lambda}\big) = Q(\lambda)\dim V_\lambda$$

$$\boxed{I(\lambda) = \frac{\dim V_\lambda}{\dim \mathfrak{g}}\, Q(\lambda)}$$

特に

$$I(\mathrm{adj}) = Q(\mathrm{adj})$$

※ 物理の文献の多くでは

$C_2(\lambda) = \frac{1}{2}Q(\lambda)$ を用いている.

☆ 格子

量子力学で習った $su(2)$ の表現を大きく分類

- 整数スピン
- 半整数スピン

一般化したい

▨ Cartan 行列 A_{ij} $\Rightarrow$ 複素単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$

$\downarrow$

1つの

単純ルート $\alpha_i, i=1,\cdots,r$ $\bar{\mathfrak{h}}$ の基底

単純コルート $\alpha_i^\vee, i=1,\cdots,r$ $\mathfrak{h}$ の基底

1つの

$(\alpha_i, \alpha_j^\vee) = A_{ij}$

有限次元表現 (V, ρ) $\mathfrak{h}$ を対角化

$H \in \mathfrak{h}$

$\rho(H)|\lambda\rangle = \lambda(H)|\lambda\rangle$ $\lambda \in \bar{\mathfrak{h}}$: ウェイト

$\lambda(\alpha_i^\vee)\ (=: \lambda_i) \in \mathbb{Z}$

$\rightsquigarrow$ 便利な $\bar{\mathfrak{h}}$ の基底 $\omega_i, i=1,\cdots,r$

基本ウェイト s.t. $(\omega_i, \alpha_j^\vee) = \delta_{ij}$

$$\lambda = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \omega_i$$

▨ ウェイト格子，ルート格子

$$P = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{Z}\omega_i \subset \overline{\mathfrak{f}}$$ （ウェイトが値をとる可能性がある点の集合）

$$Q = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{Z}\alpha_i \subset \overline{\mathfrak{f}}$$

◎ $P \supset Q$ （ルートは adjoint 表現のウェイト）

P, Q：たし算でアーベル群と思える．

◎ Q の意味

(V, ρ)：有限次元既約表現

λ, λ'：(V, ρ) の2つのウェイト

$\Rightarrow$ $|\lambda\rangle = C\rho(E_{\alpha_{i_1}})\rho(E_{\alpha_{i_2}})\cdots$

$\cdots\rho(E_{-\alpha_{i_l}})\rho(E_{-\alpha_{i_n}})|\lambda'\rangle$

$\Rightarrow$ $\lambda - \lambda' = (\alpha_i$ を足したり引いたりしたもの$)$

$\in Q$

$\rightsquigarrow$ $P/Q \ni C_c(V, \rho)$ が1つ決まる

"Congruency class"　$C_c(\lambda)$ と書いたり…

$\mathfrak{sl}_N$, $\mathfrak{su}(N)$ のとき "N-ality"

例：$\mathfrak{sl}_2$ $r=1$　$A_{11}=2$

Dynkinラベルで　$\alpha_1=[2]$ ← Cartan行列はルートのDynkinラベル

$\omega_1=[1]$ ← 定義から

$P\simeq\mathbb{Z}$

$Q\simeq 2\mathbb{Z}$

$\Rightarrow P/Q\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_2$

$=\{0,1\}$

$C_c(\lambda)=\lambda_1 \bmod 2$

▨ コルート格子、コウェイト格子

$$Q^\vee := \sum_{i=1}^{r}\mathbb{Z}\alpha_i^\vee \subset \mathfrak{h}$$ 「コルート格子」(coroot lattice)

$\omega_i^\vee$ ： $\alpha_i(\omega_j^\vee)=\delta_{ij}$ となるように決める $\mathfrak{h}$ の基底　「基本コウェイト」(fundamental coweight)

$$P^\vee := \sum_{i=1}^{r}\mathbb{Z}\omega_i^\vee \subset \mathfrak{h}$$ 「コウェイト格子」(coweight lattice)

◎ これらの意味

簡単のためコンパクトな実形を考える.

$(\alpha_i^{\vee\dagger}=\alpha_i^\vee,\ e_i^\dagger=f_i)$

$\xrightarrow{\exp}$ 群 G (単連結なもの)

Lie 代数の表現 $(V, \rho) \to G$の表現(V, ρ)

$Q^\vee$ $G \ni e^{2\pi i \alpha_i^\vee}$ を $|\lambda\rangle$ に当ててみる

$$\rho(e^{2\pi i \alpha_i^\vee})|\lambda\rangle$$
$$= e^{2\pi i \rho(\alpha_i^\vee)}|\lambda\rangle$$
$$= e^{2\pi i \lambda(\alpha_i^\vee)}|\lambda\rangle$$
$$= |\lambda\rangle$$

$\lambda(\alpha_i^\vee)(=:\lambda_i) \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \rho(e^{2\pi i \alpha_i^\vee})|\lambda\rangle = |\lambda\rangle$$

どんな表現のどんなベクトルに当てても 1

$$\Rightarrow e^{2\pi i \alpha_i^\vee} = 1 \quad (Gの元として)$$

$$\Rightarrow H \in Q^\vee, \ e^{2\pi i H} = 1$$

$P^\vee$

$z := e^{2\pi i \omega_i^\vee}$ として

$\mathrm{ad}(z)$ を考えてみる

$X \in \mathfrak{g}$

$$\mathrm{ad}(z)X = e^{2\pi i\, \mathrm{ad}(\omega_i^\vee)}X = e^{2\pi i \omega_i^\vee} X e^{-2\pi i \omega_i^\vee}$$
$$= zXz^{-1}$$

$$\mathrm{ad}(z)E_\alpha = e^{2\pi i\,\mathrm{ad}(\omega_i^\vee)} E_\alpha$$

$$\Bigg\downarrow \quad \left(\begin{aligned} &\mathrm{ad}(\omega_i^\vee)E_\alpha \\ &= [\omega_i^\vee, E_\alpha] \\ &= \alpha(\omega_i^\vee)\, E_\alpha \\ &\alpha(\omega_i^\vee) \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right)$$

$$= e^{2\pi i \alpha(\omega_i^\vee)} E_\alpha$$

$$= E_\alpha$$

$\Rightarrow \; z E_\alpha z^{-1} = E_\alpha \quad \Rightarrow$ z は任意の $\mathfrak{g}$ の元と可換

$\Rightarrow$ 〃 G 〃

$$\boxed{H \in P^\vee \Rightarrow e^{2\pi i H} \text{ は } G \text{ のすべての元と可換}}$$

$C(G) := \{ e^{2\pi i H} \mid H \in P^\vee \}$: G の中心

ただし $e^{2\pi i H'} = 1$, $H' \in Q^\vee$

$$\Rightarrow \quad C(G) \simeq P^\vee / Q^\vee$$

(V, ρ) : $\mathfrak{g}$の表現 → Gの表現 → $C(G)$の表現
とレて既約

Schurの補題 → ⇓

すべての1次元部分空間が同じ既約表現

$$\rho(e^{2\pi i w_i^\vee})|\lambda\rangle = e^{2\pi i \lambda(w_i^\vee)}|\lambda\rangle$$

↕ P/Qの元と1対1対応

$(※\ \alpha(w_i^\vee) \in \mathbb{Z})$

$C_c(\lambda) \leftrightarrow \mathbb{C}|\lambda\rangle$ への $C(G)$の既約表現

例 : $su(2)$

$$\alpha_1^\vee = 2w_1^\vee \qquad e^{2\pi i \alpha_1^\vee} = 1$$

$e^{2\pi i w_1^\vee}$ はすべての元と可換

$$G = SU(2) \qquad C(SU(2)) = \{1, e^{2\pi i w_1^\vee}\}$$

$\lambda = 1$ 表現 (= スピン$\frac{1}{2}$表現 = 2重項 = 基本表現)

$$\rho_1(\alpha_1^\vee) = \sigma_3 \quad \Rightarrow \quad \rho_1(w_1^\vee) = \frac{1}{2}\sigma_3$$

$$\rho_1(e^{2\pi i w_1^\vee}) = e^{\pi i \sigma_3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

※ Pontryagin 双対

G : アーベル群

$\hat{G} := \{ G \to U(1) : 準同型 \} = \{ G の irrep \} / \sim$ ←表現の同値

$\hat{G}$ ⊗を積としてアーベル群になる

G の「Pontryagin 双対」
(dual)

・ $\hat{\hat{G}} \simeq G$
canonicalに

例: $\widehat{U(1)} = \mathbb{Z}$, ("電荷"の集合)

定理: G : 有限アーベル群

$\hat{G} \simeq G$
(canonicalではない)

$\mathfrak{g}$: Lie代数 $\xrightarrow[\exp]{}$ G : 単連結

$C(G) \simeq P^\vee / Q^\vee$: G の中心 (有限アーベル群)

$P/Q = \widehat{P^\vee / Q^\vee} \simeq P^\vee / Q^\vee$
canonicalでなく

8. Poincaré群のユニタリー表現

場の理論

↙ここでやりたいのはこっち

場	粒子
・演算子	・状態
・Lorentz群の有限次元表現で分類	・Lorentz群，Poincaré群のユニタリー表現で分類

※ Lorentz代数：非コンパクト単純Lie代数

定理：自明な表現以外の有限次元表現は非ユニタリー

☆ Poincare群，Poincare代数

$D \geq 3$

D次元 Minkowski時空　Lorentz変換，並進

Lie代数の基底

$$M^{\mu\nu} \; (= -M^{\nu\mu}),\ P^{\mu},\quad \mu,\nu = 0, 1, \cdots, D-1$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = -i\eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + i\eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - i\eta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} + i\eta^{\nu\sigma}M^{\mu\rho},$$

$$[M^{\mu\nu}, P^{\rho}] = i\eta^{\mu\rho}P^{\nu} - i\eta^{\nu\rho}P^{\mu}$$

$$[P^{\mu}, P^{\nu}] = 0$$

実構造 $(M^{\mu\nu})^{\dagger} = M^{\mu\nu}$, $(P^{\mu})^{\dagger} = P^{\mu}$

Lorentz群(の universal covering)

$\mathrm{Spin}(D-1, 1) \ni g$. 反変ベクトル表現 $\Lambda(g)^{\mu}{}_{\nu}$

☆ ユニタリー表現

→ 完全可約 → 既約表現のみ考えればよい.

(V, ρ)

▨ $\rho(P^{\mu})$は互いに可換, エルミート ⇒ 同時対角化可能

k以外のラベル

固有値 k^{μ} $\qquad \rho(P^{\mu})|k, a\rangle = k^{\mu}|k, a\rangle$

交換関係から.

$\to \rho(g)|k,a\rangle = |\Lambda(g)k, a^\Lambda\rangle$

$$P^\mu |\Lambda k, a^\Lambda\rangle = \Lambda(g)^\mu{}_\nu k^\nu |\Lambda k, a^\Lambda\rangle$$

<u>Ex.</u> これを示せ.

$\Rightarrow$ $k \neq 0$ なら必ず無限次元

▨

$P^\mu P_\mu$ はすべての元と可換

$\downarrow$ Schur の補題

既約表現の中では定数 $= -m^2 = +k^2 \in \mathbb{R}$

- $m^2 > 0 \Leftrightarrow k$ は時間的 $\Rightarrow k^0$ の符号は Lorentz 変換で不変

  $k^0 > 0$ or $k^0 < 0$

- $m^2 = 0 \Leftrightarrow k$ は光的 $\Rightarrow k^0$ の符号は Lorentz 変換で不変

  $k^0 > 0$ or $k^0 = 0$ or $k^0 < 0$

- $m^2 < 0 \Leftrightarrow k$ は空間的 $\Rightarrow k^2 = -m^2$ のすべての k が Lorentz 変換でうつりあう.

▨ 1粒子状態

1つkを決めたときの $|k,a\rangle$ が有限個

「1粒子状態」(one particle state)

(または真空)

一般の状態 $\displaystyle\underbrace{\sum_a}_{\text{有限和}}\int_k \Psi(k,a)|k,a\rangle \in V$

これから1粒子状態の表現の分類を行う
("粒子の分類")

☆ 小群

$V \supset V_k := \bigoplus_a \mathbb{C}|k,a\rangle$ 有限次元

さっきの議論

$\rho(g): V_k \to V_{\Lambda(g)k}$

場合分け: (i) $k = \Lambda(g)k$

(ii) $k \neq \Lambda(g)k$

(i) $k = \Lambda(g)k$

$G_k := \{ g \in \text{Lorentz群} \mid \Lambda(g)k = k \}$ は群

小群 (little group)

$\boxed{(V_k, \rho|_{G_k})\ \text{が}\ G_k\ \text{の有限次元ユニタリー表現}}$

残る問題

- G_k は何か?
- G_k の有限次元表現の分類

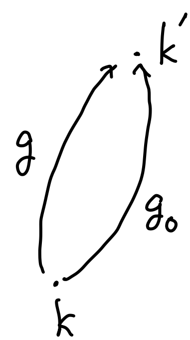
(ii) $k \neq \Lambda(g)k = k'$

$\Lambda(g_0)k = k'$ となる g_0 を1つ固定

$\rho(g_0)\ V_k \longrightarrow V_{k'}$ isomorphism

$V_{k'}$ の basis を $|k', a\rangle := \rho(g_0)|k, a\rangle$

とる.



$\forall g$, $\Lambda(g)k = k'$ に対して

$\rho(g) = \underbrace{\rho(g_0)}_{\text{分かってる}}\underbrace{\rho(g_0^{-1}g)}$, $\Lambda(g_0^{-1}g)k = k$

$\Rightarrow g_0^{-1}g \in G_k$

(i)が決まれば決まる!

▨ $m^2>0,\quad k^0>0$ (massive particle)

$m=\sqrt{m^2}>0$ として

$k=(m,0,\cdots,0)$ ととれる.

$G_k=(k^1,\cdots,k^{D-1}$ を回す$)$

$M^{ij},\ i,j=1,\cdots,D-1$

$\Leftrightarrow$ Lie 代数 $\mathfrak{so}(D-1)$ B_r or D_r のコンパクト実形

$\Rightarrow$ 分類終わっている.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{massive particle}\\ \mathfrak{so}(D-1)\text{ の有限次元ユニタリー既約表現}\end{array}}$$

▨ $m^2=0,\quad k^0>0$ (massless particle)

$K>0$

$k=(K,K,0,\cdots,0)$

小群?

$k^2,\cdots,k^{D-1}$ の回転 $\Rightarrow\mathfrak{so}(D-2)$

$Q^i:=M^{0i}-M^{1i},\quad i=2,\cdots,D-2$

$$[M^{ij}, Q^k] = i\delta^{ik} Q^j - i\delta^{jk} Q^i$$

$$[Q^i, Q^j] = 0$$

$\Rightarrow$ $(D-2)$次元 Euclid 空間の回転と並進

Lie代数 $\mathfrak{iso}(D-2)$

有限次元ユニタリー表現？

Q^iの固有値 $\neq 0$ $\Rightarrow$ 無限次元

$\rho(Q^i) = 0$

$\Downarrow$

$\mathfrak{so}(D-2)$の有限次元ユニタリー表現

終わっている.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{massless particle の分類} \\ \quad \mathfrak{so}(D-2)\text{ の有限次元ユニタリー既約表現}\end{array}}$$

▨ $m^2 = 0$, $k^0 = 0$ （真空）

$\Rightarrow$ $k^\mu = 0$

$\Rightarrow$ G_kのLie代数 $\mathfrak{so}(D-1, 1)$

$\Rightarrow$ 有限次元ユニタリー表現は自明のみ.

▨ その他

- $m^2>0,\ k^0<0 \Rightarrow$ massive particle と同様
- $m^2=0,\ k^0<0 \Rightarrow$ massless particle と同様
- $m^2<0 \Rightarrow k=(0,|m|,0 \cdots 0)$ ととれる.
  $(|m|=\sqrt{-m^2})$

G_k の Lie代数　$k^0, k^2, \cdots, k^{D-1}$ を回す
$\mathfrak{so}(D-2,1)$
有限次元ユニタリー表現は自明のみ.