



超弦理論における、AdS 空間
の超重力理論と境界の共
形場理論の対応について

山口 哲

1999年1月20日

目次

プロローグ	4
第 1 章 AdS/CFT 対応 — 一般的な場合	7
1.1 相関関数の対応	7
1.1.1 質量のないスカラー場	8
1.1.2 質量のあるスカラー場	10
1.2 SUGRA の古典解と brane 上の理論	12
1.2.1 D3-brane	13
1.2.2 M2-brane	15
1.2.3 M5-brane	15
第 2 章 AdS₃ — 重力理論との対応	17
2.1 対称性の拡大	17
2.1.1 漸近的対称性	17
2.1.2 漸近的 Virasoro 対称性	17
2.1.3 Chern-Simons 重力との関係	18
2.2 D1-D5 system	22
2.2.1 計量と near horizon 極限	23
2.3 状態の対応	24
2.3.1 超代数 $su(1, 1 2)$	24
2.3.2 超重力理論の状態	25
2.3.3 CFT の状態	28
第 3 章 AdS₃ — 世界面の理論	31
3.1 NS1-NS5 system	31
3.2 ボゾンの弦	31
3.2.1 古典的な作用	32
3.2.2 Virasoro Current	32
3.2.3 量子論的な作用	33
3.2.4 時空の Virasoro, および Kac-Moody 代数	34
3.3 超弦	37
3.3.1 $AdS_3 \times G_1 \times G_2 \times \dots$ の中の超弦理論	37
3.3.2 $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ の super string と small $\mathcal{N} = 4$ superconformal 代数	41

3.3.3	$AdS_3 \times S^3 \times S^3 \times S^1$ の super string と large $\mathcal{N} = 4$ superconformal 代数	44
3.3.4	$AdS_3 \times (S^3 \times S^3 \times S^1)/Z_2$ の super string と $\mathcal{N} = 3$ superconformal 代数	46
3.4	brane の配位	48
3.4.1	M5-M5-M2 system	49
3.4.2	M5-O6-M2 system	50
エピローグ		53
付録 A Anti de Sitter Space		55
A.1	AdS_{d+1}	55
A.1.1	Metric	55
A.1.2	Christoffel 記号、Ricci テンソル	56
A.1.3	Isometry	56
A.2	AdS_3	57
A.2.1	Lorentzian AdS_3	57
A.2.2	Euclidean AdS_3	58
付録 B 10, 11 次元 Supersymmetry		60
B.1	10, 11 次元 Spinor	60
B.1.1	9 次元 Dirac 行列 (Euclidean)	60
B.1.2	10, 11 次元 Dirac 行列 (Mincovski)	61
B.1.3	Majorana spinor	62

プロローグ

量子重力理論

重力理論は、古くから物理のなかで重要な位置を占めてきた理論であり、特に一般相対論においては、時空の幾何学的性質と深く関わっていることが分かった。つまり重力理論を理解することは時空そのものを理解することである。

ところが、量子論としての重力場の理論は、他の場の理論のように、うまくいかなかった。量子場の理論特有の発散が、重力場ではうまく処理できなかったからである。

弦理論はこの困難をある意味で解決した。弦理論は、重力理論を含み、しかも紫外で有限である。さらには、ゲージ理論も含み得るため弦理論こそがすべてを記述する統一理論 (Theory of Everything) ではないかと思われている。しかも知られている consistent な弦理論はすべて超対称性をもつものであり、超対称性が自然界に存在することの大きな理論的根拠になっている。

しかし、弦理論は重力理論の困難を解決したといっても、それは完全な解決、たとえば弱い相互作用の理論を非可換ゲージ理論が解決したというような解決ではない。弦理論は、もともと弦の1体系の理論であるため、量子論は弦の結合定数 g_s の摂動論でしか定義されていない。多体系を扱ういわゆる弦の場の理論も研究されているが困難が大きい。

では、望ましい量子重力理論とは、どのようなものであろうか。まず、その定義から低エネルギー理論が重力理論を含んでいて、高エネルギーでも consistent である。さらに、あるパラメータの領域では、弦理論で記述されていて、その領域での時空の次元は10次元である。しかも、高エネルギーでは超対称性をもっている。このような量子重力理論のことをここでは、非摂動的弦理論、あるいは単に弦理論とも呼ぶことにする

双対性

ここでいう双対性とは、ある2つの理論を考えた時、見た目は全く異なるが実は同等の理論を記述しているということであり、場の理論においてはしばしば現れる。

弦理論においても様々な双対性が予想されていて、現在5つある摂動的弦理論は全く同等の量子重力理論の別のパラメータ領域を記述しているのではないかという考え方が有力である。

双対性は理論的な興味のみならず、実用的な価値もある。一方の記述では、非常に理解が困難なパラメータの領域が、他方の記述では理解しやすい領域であるとい

う場合がある。例えば、type I 弦理論と $SO(32)$ ヘテロティック弦理論は双対であると思われていて、type I 理論の記述では、理解が困難な強結合領域は、 $SO(32)$ ヘテロティック弦理論の記述では、理解しやすい弱結合領域となっている。

Brane

場の理論の双対性の典型的な現れ方には次のようなものがある。1つの理論のソリトンつまり安定な古典解があったとすると、今度は、そのソリトンを基本的な粒子とするような理論が作ることができ、ある場合には、これが元の理論と双対になっている。この場合元の理論の基本的な粒子が、今度は新しい理論の複合粒子として現れる。

弦理論のソリトンとしては、空間的に p 次元に広がったオブジェクト、 p -brane が知られている。例えば、粒子は 0-brane、弦は 1-brane である。量子重力理論には様々な brane の古典解、つまりソリトンが存在し、重要な役割を果たしている。(例えば、摂動論的弦理論の基本弦そのものも重力理論の古典解として現れる。)

また、brane 上 (世界体上) にも場の理論があり、それが brane の力学を記述している。例えば従来の基本弦の世界体 (世界面) の理論は、時空をターゲット空間とする 2次元の σ モデルである。従来の摂動論的弦理論では、基本弦の世界面の理論を調べることにより量子重力理論について非常に多くのことが分かったわけである。同様に、別の brane の世界体の理論を調べることにより量子重力理論の別の側面、あるいは別のパラメータ領域についての情報を得ることができると期待される。特に Dirichlet-brane (D-brane) と呼ばれる brane については、世界体の理論が、Yang-Mills 理論になり、重力理論との関係が勢力的に調べられている。

この考えをさらに押し進めて、brane 上の理論があるパラメータ領域については量子重力理論を記述しているということが出来る。あるいはさらに無限個の D0-brane や、 $D(-1)$ -brane (D-instanton) の世界体理論は量子重力理論を完全に記述しているという仮説——Matrix 理論も出ている。

一方、逆に場の理論を解析する際に、その場の理論を brane 世界体上の理論と思うことによって、弦理論を使って場の理論を理解することも出来る。これによって場の理論の様々な性質が幾何学的に理解できるようになる。

このような brane の世界体上の場の理論と重力理論の関係は広い意味での双対性であるといつてよい。

AdS/CFT 対応

本論の主題である Anti de Sitter 空間 (AdS) 上の重力理論と、その境界上の共形場理論 (CFT) の対応は、このような brane の理論と重力理論の対応をさらに具体化したものである。ある種の brane、(たとえば D3-brane) ではその古典解の地平線の近く (near horizon) が AdS になっていて、しかもその brane 上の理論が CFT である。良く知られているように $(d+1)$ 次元 AdS (AdS_{d+1}) の isometry は、

$SO(d,2)$ であり、これは、 d 次元の Minkowski 空間の conformal 対称性と同じである。したがって、AdS の重力理論と brane 上の CFT は対応し、CFT の conformal 対称性と AdS の isometry が対応している。特に AdS の重力理論が古典重力理論のときは解析可能であり、それをつかって CFT の性質を調べることが数多くなされている。

さらに AdS が3次元のとき、つまり CFT が2次元の理論になるときは、Conformal 対称性が拡大するので特に興味深い。また、このときは AdS の重力理論の摂動論的弦理論を用いた解析が可能なのでその観点からさらに対応を詳しく調べることができる。

本論では、まず Chapter 1 で AdS/CFT 対応の一般論、特に相関関数の対応、および brane の古典解の near horizon 極限について詳しく述べる。

Chapter 2 および Chapter 3 では、 AdS_3 の重力理論と2次元の CFT の対応を論ずる。Chapter 2 では、古典重力理論を使って、対称性の拡大、状態の対応などを議論する。

Chapter 3 では、 AdS_3 の摂動論的弦理論による記述、つまり基本弦の世界面の理論を使って2次元 CFT との対応を見る。特に対称性の拡大、central charge、様々な超対称性のある場合などを詳しく調べる。

第1章 AdS/CFT対応 — 一般的な場合

ここでは、AdS/CFT 対応の一般論および、 $AdS_5 \times S^5$ の IIB 理論と $D = 4, \mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論の対応を述べる。

1.1 相関関数の対応

場の理論における「答え」は、相関関数であり、場の理論が解けたとは、相関関数がすべて求まったということである。したがって、2つの全く異なるように見える理論が対応しているということは、一方の理論の相関関数から他方の理論の相関関数が完全に決まることを意味している。

AdS/CFT 対応の非常に一般的な場合は、次のようなものである [1][2]。¹ 対応している理論は次の2つである。

1. $(d+1)$ 次元 AdS 空間 AdS_{d+1} の場の理論。
2. AdS_{d+1} の境界の d 次元空間のある CFT。

具体例としては、

1. $AdS_5 \times S^5$ 上の IIB 超重力理論 (SUGRA) または、IIB 弦理論。
2. その境界上の 4 次元 $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論 (SYM)。

のようなものである。これらの場の理論の対応をしてみる。まず、SUGRA のなかの場を ϕ^I としよう。場の境界条件として $\phi^I(\text{boundary}) = \phi_0^I$ を課したときの分配関数は、

$$Z_S[\phi_0^I] = \int \left(\prod_I D\phi^I \right) \exp(-I_S[\phi^I]). \quad (1.1)$$

ここで、経路積分は境界条件を満たす配位についてのみ和をとる。 I_S は古典的な SUGRA の作用である。

一方、対応の仮設の1つとして

- 「境界上の CFT には、SUGRA のそれぞれの場 ϕ^I に対応する場、 \mathcal{O}^I がある。」

¹この節では、[1] にしたがって、Euclidean の場の理論を扱う。

をおく。このとき、相関関数の対応は次のようになる。

$$\left\langle \exp \int \phi_0^I \mathcal{O}^I \right\rangle_{CFT} = Z_S[\phi_0^I]. \quad (1.2)$$

ただし、実際には量子重力理論を扱うのは難しいので、古典論で近似する。どのような場合にこの近似が有効かは、次節以降で見ていく。さて、境界条件 ϕ_0^I を満たす古典的な運動方程式の解を $\phi_{cl}^I[\phi_0]$ とすると、

$$Z_S[\phi_0] = \exp(-I_S[\phi_{cl}[\phi_0]]) \quad (1.3)$$

が成り立つ。したがって、この近似では、CFT の 連結な相関関数の生成汎関数を

$$W_{CFT}[\phi_0] = -\log \left\langle \exp \int \phi_0^I \mathcal{O}^I \right\rangle_{CFT} \quad (1.4)$$

として、

$$W_{CFT}[\phi_0] = I_S[\phi_0] \quad (1.5)$$

となる。

ここでは、境界条件の決め方を明確には示さなかった。以下では、実際に、AdS の古典的な場の理論から、CFT の相関関数を求める簡単な例を示して、その中で、境界条件などをもう少し精密に述べる。

1.1.1 質量のないスカラー場

問題を非常に簡単化して、SUGRA におけるすべての相互作用を無視する。そうすると、様々な場について、別々に考えることができる。ここでは、まず、質量のないスカラー場 ϕ について考えよう。例としては、IIB 理論での、ディラトンの S^5 に関する 0 モードである。(notation の詳細は Appendix A を参照) 作用は、

$$I_S[\phi] = \frac{1}{2} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1}x \sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi, \quad (\mu, \nu = 0, \dots, d). \quad (1.6)$$

運動方程式は、

$$\square \phi = 0, \quad \square = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\nu \sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\mu. \quad (1.7)$$

具体的に座標 (A.4) を使って書くと、

$$\left[u^{d+1} \frac{\partial}{\partial u} u^{-d+1} \frac{\partial}{\partial u} + u^2 \eta^{mn} \partial_m \partial_n \right] \phi = 0. \quad (1.8)$$

この運動方程式で、境界条件

$$\lim_{u \rightarrow 0} \phi(u, \mathbf{x}) = \phi_0(\mathbf{x}) \quad (1.9)$$

を満たすような解を探したい。これには、次のような「グリーン関数」を使うのが便利である。 $K(u, \mathbf{x})$ を次のような解とする。

$$\square K = 0, \quad \lim_{u \rightarrow 0} K(u, \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}). \quad (1.10)$$

任意の境界条件 ϕ_0 を満たす解は、この K を使って次のように書ける。

$$\phi_{cl}[\phi_0](u, \mathbf{x}) = \int d^d \mathbf{x}' K(u, \mathbf{x} - \mathbf{x}') \phi_0(\mathbf{x}'). \quad (1.11)$$

したがって、問題はこのような K を求めることに帰着される。まず、境界上では無限遠点にのみ台を持つ解 \tilde{K} を求める。この解は、境界上の並進で不変だから、 $\tilde{K}(u, \mathbf{x}) = \tilde{K}(u)$ で u のみに依っている。だから、運動方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial u} u^{-d+1} \frac{\partial}{\partial u} \tilde{K} = 0 \quad (1.12)$$

となる。この内 $\lim_{u \rightarrow 0} \tilde{K} = 0$ となる解は、 c を定数として、

$$\tilde{K} = cu^d \quad (1.13)$$

と書き表せる。一方、AdS の計量は、次のような「反転」のもとで不変である。

$$x^m \rightarrow \frac{x^m}{u^2 + \mathbf{x}^2}, \quad u \rightarrow \frac{u}{u^2 + \mathbf{x}^2}. \quad (1.14)$$

ただし $\mathbf{x}^2 = \eta_{mn} x^m x^n$, ($m, n = 1, \dots, d$) である。この変換のもとでは、無限遠点は原点にうつるため、 \tilde{K} にこの変換をほどこしたものは原点にのみ台をもつ解になる。 K は、

$$K(u, \mathbf{x}) = c \left(\frac{u}{u^2 + \mathbf{x}^2} \right)^d. \quad (1.15)$$

これが実際に境界でデルタ関数になっていることを確かめよう。まず、この K は、($u \rightarrow 0$ で) $\mathbf{x} \neq 0$ では、0 になることは明らかである。また、 $\int d^d \mathbf{x} K(u, \mathbf{x})$ は、有限であり、しかも、 u によらない。これは、 $u \rightarrow \lambda u$, $\mathbf{x} \rightarrow \lambda \mathbf{x}$ というスケーリングでこの積分が不変であることから分かる。だから、 c を適当にとれば、1 にすることができる。これで、 $\lim_{u \rightarrow 0} K(u, \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$ が示された。

さて、計算するものは、作用に古典解をいれたもの、つまり、 $I_S[\phi_{cl}[\phi_0]]$ である。

$$\begin{aligned} I_S[\phi_{cl}[\phi_0]] &= \frac{1}{2} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1} x \sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_{cl} \partial_\nu \phi_{cl} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial(AdS_{d+1})} d^d \mathbf{x} \sqrt{h} n^\mu (\partial_\mu \phi_{cl}) \phi_{cl} + \frac{1}{2} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1} x \sqrt{g} \phi_{cl} \square \phi_{cl}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

一行目から二行目へは、部分積分を行なった。二行目第二項は、運動方程式から 0 になる。第一項は表面項であり、 n^μ は単位法線ベクトル、 h は引き戻した計量である。極限で書くと、

$$\begin{aligned} I_S[\phi_{cl}[\phi_0]] &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{u-\text{定}} d^d \mathbf{x} \sqrt{h} n^\mu (\partial_\mu \phi_{cl}) \phi_{cl} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{u-\text{定}} d^d \mathbf{x} u^{-d} \phi_{cl} u \frac{\partial}{\partial u} \phi_{cl}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

ここで、 ϕ_{cl} の具体的な表式は、 K の形を代入して、

$$\phi_{cl}(u, \mathbf{x}) = \int d^d \mathbf{x}' c \left(\frac{u}{u^2 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2} \right)^d \phi_0(\mathbf{x}'). \quad (1.18)$$

$u \frac{\partial}{\partial u} \phi_{cl}$ は、 $u \rightarrow 0$ で、

$$u \frac{\partial}{\partial u} \phi_{cl} \rightarrow d \int d^d \mathbf{x}' c \left(\frac{u}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2} \right)^d \phi_0(\mathbf{x}'). \quad (1.19)$$

また、 $\lim_{u \rightarrow 0} \phi_{cl} = \phi_0$ だから、これらをすべて代入すると、

$$I_S[\phi_{cl}[\phi_0]] = \frac{cd}{2} \int d^d \mathbf{x} d^d \mathbf{x}' \frac{1}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{2d}} \phi_0(\mathbf{x}') \phi_0(\mathbf{x}). \quad (1.20)$$

AdS/CFT 対応の仮設は、これと、CFT の連結な相関関数の生成汎関数が等しいということであったので、このことにより、 ϕ に対応する CFT の場 \mathcal{O} の 2 点関数が、

$$\langle \mathcal{O}(\mathbf{x}) \mathcal{O}(\mathbf{x}') \rangle_{CFT} \propto \frac{1}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{2d}} \quad (1.21)$$

となることが分かり、 \mathcal{O} の conformal 次元が、 d であることが分かる。また、 \mathcal{O} の次元は $\int d^d \mathbf{x} \phi_0 \mathcal{O}$ という結合からも分かり、これらは、一致している。

ここまですべてをまとめておくと、

1. まず、境界条件 ϕ_0 を満たすような運動方程式の解 ϕ_{cl} を見つけたい。
2. そのために、境界で原点にのみ台を持つような解 K を求めよう。
3. 上の K は、境界で無限遠点にのみ台をもつような解を反転して得られた。
4. ϕ_{cl} の形が分かると、今度は、それを古典的な作用 I に代入したものを求めたい。
5. I を部分積分して、表面積分の形に書き換えた。
6. 実際に ϕ_{cl} の表式を代入した。そして、AdS/CFT 対応の仮設から、 ϕ に対応する場 \mathcal{O} の 2 点関数を得た。

1.1.2 質量のあるスカラー場

質量のあるスカラー場についても、同様の計算をやってみる。質量のない場合は、ある意味で当たり前の結果しか出なかったが、質量のある場合には、すこし自明でない結果——質量と conformal 次元の関係——が得られる。

作用は

$$I[\phi] = \frac{1}{2} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1} x \sqrt{g} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2], \quad (\mu, \nu = 0, \dots, d). \quad (1.22)$$

運動方程式は、

$$(-\square + m^2)\phi = 0 \quad (1.23)$$

となる。

まず、境界で、無限遠点に台をもつ解 \tilde{K} を求めよう。これは、 u にのみに依存するので、運動方程式は次のようになる。

$$\left(-u^{d+1} \frac{\partial}{\partial u} u^{-d+1} \frac{\partial}{\partial u} + \ell^2 m^2\right) \tilde{K} = 0. \quad (1.24)$$

この方程式を解くには、 $\tilde{K} = u^\Delta$ とおいてみると、

$$-\Delta(-d + \Delta) + \ell^2 m^2 = 0 \quad (1.25)$$

が得られる。この方程式の2つの解を Δ_\pm , $\Delta_+ \geq \Delta_-$ とすると、

$$\Delta_\pm = \frac{1}{2} \left(d \pm \sqrt{d^2 + 4m^2}\right) \quad (1.26)$$

$\lim_{u \rightarrow 0} \tilde{K} = 0$ となる解は、 $\tilde{K} = cu^{\Delta_+}$ と記述される。今後、 Δ_+ のことを単に Δ と書く。 \tilde{K} を反転すると、

$$K = c \left(\frac{u}{u^2 + \mathbf{x}^2}\right)^\Delta \quad (1.27)$$

さて、これが、境界上でデルタ関数になっているかどうか調べよう。 $u \rightarrow 0$, ($\mathbf{x} \neq 0$) で、 $K \rightarrow 0$ となっているのは O.K.。次に積分 $s(u) = \int d^d \mathbf{x} K$ について $u \rightarrow \lambda u$, $\mathbf{x} \rightarrow \lambda \mathbf{x}$ というスケーリングのもとで、 $s \rightarrow \lambda^{d-\Delta} s$ つまり、 $s(\lambda u) = \lambda^{d-\Delta} s(u)$ が成り立つ。したがって、 $\lim_{u \rightarrow 0} K = u^{d-\Delta} \delta(\mathbf{x})$ となっている。このことから、

$$\phi_{cl}[\phi_0](u, \mathbf{x}) = \int d^d \mathbf{x}' K(u, \mathbf{x} - \mathbf{x}') \phi_0(\mathbf{x}') \quad (1.28)$$

とした ϕ_{cl} の境界条件は、

$$\lim_{u \rightarrow 0} \phi_{cl}(u, \mathbf{x}) = u^{d-\Delta} \phi_0(\mathbf{x}) \quad (1.29)$$

のようになる。別のいい方をすると、質量 m のスカラー場の運動方程式の解の $u \rightarrow 0$ の振舞いは、上の式のようになる。これを踏まえた上で、質量がない場合と同様に、作用に古典解を代入したものを求めると、

$$I[\phi_{cl}[\phi_0]] = \frac{c\Delta}{2} \int d^d \mathbf{x} d^d \mathbf{x}' \frac{1}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{2\Delta}} \phi_0(\mathbf{x}') \phi_0(\mathbf{x}). \quad (1.30)$$

ここから、対応する CFT の場 \mathcal{O} の conformal 次元は Δ であることが分かる。このことは、境界条件 (1.29) と $\int \phi_0 \mathcal{O}$ という結合からも示すことが出来る。

まとめると、

- 質量がある場合には、境界条件を次のようにするべきであることが分かった。

$$\lim_{u \rightarrow 0} \phi_{cl}(u, \mathbf{x}) = u^{d-\Delta} \phi_0(\mathbf{x}) = u^{\Delta_-} \phi_0(\mathbf{x}).$$

- SUGRA のスカラー場の質量 m と、対応する場の conformal 次元 Δ の間に次の関係があることが分かった

$$\Delta = \frac{1}{2} \left(d + \sqrt{d^2 + 4\ell^2 m^2}\right). \quad (1.31)$$

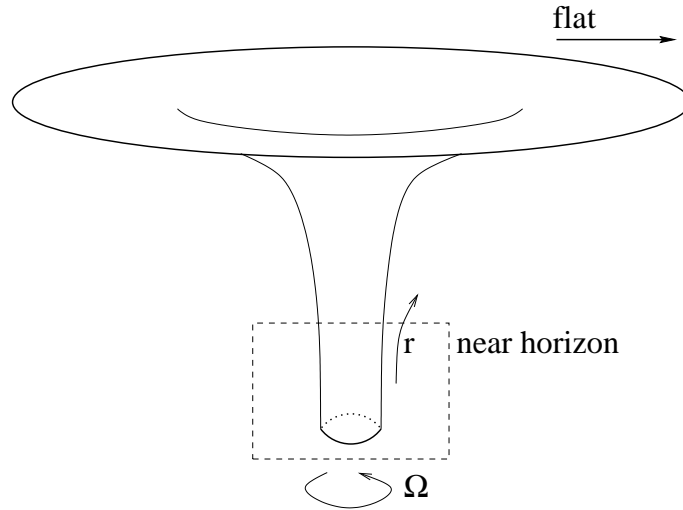


図 1.1: brane 解の描像。

1.2 SUGRA の古典解と brane 上の理論

最近になって、 AdS/CFT 対応が注目されているのは、それが、超弦理論および、brane とつながりがあるからである [3]。つまり、 AdS/CFT 対応としての次の 2 つの対応である。

1. 超重力理論 の brane 解の **near horizon** 極限 を背景場とする超重力理論 あるいは、弦理論。
2. 弦理論から予想される brane の世界体上の理論。

near horizon 極限については後に説明する。超重力理論 の brane 解は、特別な場合には、near horizon 極限をとることによって、 $AdS_{d+1} \times (\text{コンパクト多様体})$ という形になり、それと、brane (境界上にあると考える) 上の理論が対応しているということである。

このうち特に重要なのは、D3-brane の場合、M 理論の 2-brane (M2-brane) の場合、M 理論の 5-brane (M5-brane) の場合、そして本論で詳しくとり扱う D1-brane と D5-brane の複合系の場合である。D1-brane と D5-brane の複合系については次章以降で扱い、ここではそれ以外のものを扱う。

1.2.1 D3-brane

10次元の typeII 超重力理論の Dp-brane 解 ($p = 0, \dots, 6$) は、次のようになることが知られている。

$$\begin{aligned}
ds^2 &= f_p(r)^{\frac{1}{2}} \eta_{mn} dx^m dx^n + f_p(r)^{-\frac{1}{2}} \delta_{ij} dy^i dy^j, \\
e^{-2\phi} &= g_s^{-2} f_p(r)^{\frac{p-3}{2}}, \\
H_{p+2} &= \partial_i f_p(r) dx^0 \wedge \dots \wedge dx^p \wedge dy^i, \\
f_p(r) &= 1 + \frac{R_p^{7-p}}{r^{7-p}}, \\
r &= \sqrt{\delta_{ij} y^i y^j}, \\
(m, n &= 0, \dots, p, \quad i, j = p+1, \dots, 9).
\end{aligned} \tag{1.32}$$

ds^2 は計量、 ϕ はダイラトン、 H_{p+2} は $(p+2)$ -形式の場の強さであって、それ以外の場はすべて 0 である。 R_p は D-brane の電荷に関係したパラメータ、 g_s は $r \rightarrow \infty$ のときの弦の結合定数、また、 $(x^m, m = 0, \dots, p)$ は brane に沿った方向の座標、 $(y^i, i = p+1, \dots, 9)$ は brane に垂直な方向の座標である。

ここで、重要なことは、 $p = 3$ のときは、ダイラトンが定数になるが、 $p \neq 3$ のときは、ダイラトンが定数にならないことである。

さて、near horizon 極限をとろう。ここでは、 $r \ll R_p$ を near horizon 極限と呼ぶ。このとき、 $f_p = R_p^{7-p}/r^{7-p}$ となり、brane に垂直な方向 y を極座標表示して $\delta_{ij} dy^i dy^j = dr^2 + r^2 d\Omega_{8-p}^2$ (ここで、 $d\Omega_{8-p}^2$ は、 $8-p$ 次元球面の計量) となる。すると near horizon 極限で brane 解は次のようになる。

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \left(\frac{R_p}{r}\right)^{\frac{7-p}{2}} \eta_{mn} dx^m dx^n + \left(\frac{R_p}{r}\right)^{-\frac{7-p}{2}} (dr^2 + r^2 d\Omega_{8-p}^2), \\
e^{-2\phi} &= g_s^{-2} \left(\frac{R_p}{r}\right)^{\frac{(7-p)(p-3)}{2}}, \\
H_{p+2} &= (p-7) \left(\frac{R_p^{7-p}}{r^{7-p+1}}\right) dx^0 \wedge \dots \wedge dx^p \wedge dr.
\end{aligned} \tag{1.33}$$

これを見ると、 $p = 3$ のときには、計量は $AdS_5 \times S^5$ のものであり (AdS の計量 (A.3) 参照)、その半径は AdS_5 、 S^5 とともに $\ell = R_p$ である。しかも前にふれたようにダイラトンは定数である。 $(p \neq 3$ の場合には素朴にはうまくいかない。)

これからは、 $p = 3$ のときのみ扱う。

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \left(\frac{\ell}{r}\right)^2 \eta_{mn} dx^m dx^n + \left(\frac{\ell}{r}\right)^{-2} dr^2 + \ell^2 d\Omega_5^2, \\
e^{-2\phi} &= g_s^{-2}, \\
H_5 &= -4 \left(\frac{\ell^4}{r^5}\right) dx^0 \wedge \dots \wedge dx^3 \wedge dr.
\end{aligned} \tag{1.34}$$

また、 $\ell = R_3 = (4\pi g_s N)^{1/4} \ell_s$ であることが知られている。ただし N は brane の枚数、 ℓ_s は弦の長さである。1.1 節の解析が適用できるパラメータの範囲を考えておく。ここで、系を特徴づける長さのスケールは、 ℓ である。満たすべき条件は、

IIB 理論	Yang-Mills 理論
N 枚の D3-brane	ゲージ群 $U(N)$
$SL(2, Z)$ 対称性	$SL(2, Z)$ 対称性
スカラー場の期待値 $\tau = \chi + ie^{-\phi}$	結合定数 $\tau = \theta/(2\pi) + i4\pi/g_{YM}^2$
基本弦	W 粒子
D 弦	モノポール
(p,q) 弦	(p,q) ダイオン

表 1.1: IIB D3-brane と $D = 4$, $\mathcal{N} = 4$ Yang-Mills 理論の対応

1. 超重力理論が使える、つまり、弦の高いモードが効かない。 $\implies l_s \ll \ell$
2. 超重力理論を古典論で扱える。 $\implies l_p \ll \ell$

ただし、 l_p は 10 次元のプランク長さ $l_p = g_s^{1/4} l_s$ である。したがって、次のような条件になる。

$$N \gg 1, \quad g_s N \gg 1 \quad (1.35)$$

この条件についてはまたあとで考察する。

ところで、 N 枚の D3-brane 上の理論は、Dirichlet 境界条件を持つ弦の理論から、4次元の $\mathcal{N} = 4$, $U(N)$ の超対称 Yang-Mills 理論であることが知られている。この理論は conformal な理論であり、また、 $SL(2, Z)$ の対称性をもつと信じられている。また、その結合定数 g_{YM} は、弦の結合定数と $g_Y M^2 = 2\pi g_s$ の関係がある。その他、様々な関係を表にまとめておく。

さて、パラメータの領域について再び考えよう。(1.35) の関係だけからは、弦の結合定数 g_s は大きいのか小さいのかは分からない。しかし、多くの場合は、 g_s は小さいとして考える。これには次のような理由がある。

1 つは、t'Hooft らの large N の議論と絡めたいからである。その議論によると、 $SU(N)$ Yang-Mills 理論において、t'Hooft の結合定数 $\lambda = g_{YM}^2 N$ を一定にして、 $N \rightarrow \infty$ としたとき、 N^{-1} による展開が、ダイアグラムのジーナス展開になる。特に、最も効く項は、平面的なダイアグラムであり、これが、重力でいうところの古典論になる。そこで、AdS/CFT 対応における極限も次のような形で表現される。

$$\lambda = g_s N \text{ を大きな数に固定し、} N \rightarrow \infty.$$

簡単に書けば、

$$1 \ll g_s N \ll N. \quad (1.36)$$

または、(1.35) に加えて、 $g_s \ll 1$ と言っても同じである。

もう一つの理由は、 g_s が大きなところの弦理論がよく分かっていないからである²。弦理論が重力理論で近似できる領域 $l_s \ll \ell$ は、摂動論的な弦理論からでてきた式である。したがって、 g_s が大きいところでも、そのままかどうかは良く分からない。

²たとえば、 $g_s \rightarrow \infty$ では、S 双対性を信じれば、 $g_s \rightarrow 0$ と同じである。したがって、ここで g_s が大きい場合と言っているのは、 $g_s \sim 1$ のところである。

1.2.2 M2-brane

11次元の 2-brane 解の計量は、次のとおりである。

$$ds^2 = f(r)^{-\frac{2}{3}} \eta_{mn} dx^m dx^n + f(r)^{\frac{1}{3}} \delta_{ij} dy^i dy^j,$$

$$f(r) = 1 + \frac{2^5 \pi^2 N \ell_p^6}{r^6}. \quad (1.37)$$

ここで、 $m, n = 0, 1, 2$, $i, j = 3, \dots, 10$ である。また、 ℓ_p は、11次元のプランク長さである。near horizon 極限 $r \ll R_2$, ($R_2 = (2^5 \pi^2 N)^{1/6} \ell_p$) をとると、

$$ds^2 = \left(\frac{R_5}{r} \right)^{-4} \eta_{mn} dx^m dx^n + \frac{R_2^2}{r^2} dr^2 + R_2^2 d\Omega_7^2. \quad (1.38)$$

ただし、 $d\Omega_7^2$ は単位 7次元球面の計量である。これが、 $AdS_4 \times S^7$ になっていることは、次の置換えをすれば良く分かる。

$$r \rightarrow u, \quad \frac{r^4}{R_2^4} = \frac{R_2^2}{u^2},$$

$$x \rightarrow x', \quad x^m = \frac{1}{2} x'^m, \quad (1.39)$$

このとき、計量は次のようになる。

$$ds^2 = \frac{R_2^2}{4u^2} (du^2 + \eta_{mn} dx'^m dx'^n) + R_2^2 d\Omega_7^2. \quad (1.40)$$

ここで、 AdS_4 の半径は、 $\frac{1}{2} R_2$ 、 S^7 の半径は、 R_2 になる。

この場合対応する 2つの理論は、

1. $AdS_4 \times S^7$ 上の 11次元超重力理論または、M理論。
2. 3次元の super conformal 理論、super membrane 理論。

である。

1.2.3 M5-brane

11次元超重力理論の M5-brane 解の計量は、

$$ds^2 = f(r)^{-\frac{1}{3}} \eta_{mn} dx^m dx^n + f(r)^{\frac{2}{3}} \delta_{ij} dy^i dy^j,$$

$$f(r) = 1 + \frac{\pi N \ell_p^3}{r^3}. \quad (1.41)$$

ここで、 $m, n = 0, \dots, 5$, $i, j = 6, \dots, 10$ である。near horizon 極限 $r \ll R_5$, ($R_5 = (\pi N)^{1/3} \ell_p$) をとると、

$$ds^2 = \frac{r}{R_5} \eta_{mn} dx^m dx^n + \frac{R_5^2}{r^2} dr^2 + R_5^2 d\Omega_4^2. \quad (1.42)$$

ただし、 $d\Omega_4^2$ は単位 4次元球面の計量である。これが、 $AdS_7 \times S^4$ になっていることは、次の置換えをすれば良く分かる。

$$\begin{aligned} r \rightarrow u & : \frac{r}{R_5} = \frac{R_5^2}{u^2}, \\ x \rightarrow x' & : x^m = 2x'^m. \end{aligned} \quad (1.43)$$

計量は次のようになる。

$$ds^2 = \frac{4R_5^2}{u^2} (du^2 + \eta_{mn} dx'^m dx'^n) + R_5^2 d\Omega_4^2. \quad (1.44)$$

このとき、 AdS_7 の半径は、 $2R_2$ 、 S^4 の半径は、 R_2 になる。このとき対応する 2つの理論は、

1. $AdS_7 \times S^4$ 上の 11次元超重力理論または、M理論
2. 存在することが示唆されている 6次元の (2,0) super conformal field theory [4]

である。

まとめ

ここでやったことをまとめておく。

- 超重力理論の brane 解の near horizon 極限をとると $AdS \times$ (コンパクト多様体) のように分かれる場合がある。
- それには、ディラトンが定数になる、または最初から無いということが効いていた。
- AdS の対称性は、brane 上の理論 (境界上の理論) の conformal 対称性に対応し、コンパクト多様体の対称性は、brane 上の理論の内部対称性に対応していた。
- 仮設は、 $AdS \times$ (コンパクト多様体) 上の超重力理論もしくは、弦理論あるいは、M理論 と、brane 上の super conformal 理論が対応しているということである。

第2章 AdS_3 — 重力理論との対応

2次元の CFT は、対称性が無限次元に拡大するため、非常に良く調べられている。 AdS_3 の重力理論との関係についても他の次元に比べてより深く理解できる。

AdS_3 の isometry は、 $SO(2,2)$ であるが、2次元の conformal 対称性は、無限次元の Virasoro 対称性である。まず、 AdS_3 で見た時に、この Virasoro 対称性が、どのように実現しているかをみる。次に、実際の brane の near horizon 極限をとったものとして、良く調べられている、 $AdS_3 \times S^3 \times M^4$, ($M^4 = K3$ または T^4) の場合について調べる。

2.1 対称性の拡大

2.1.1 漸近的対称性

AdS_3 の漸近的対称性を考えたい。漸近的対称性とは、空間的な遠方の構造を変えないような変換のことである。例として、Minkowski 空間のブラックホールを考えよう。この場合漸近的な対称性は、Poincaré 対称性であり、その対称性の電荷として、質量や角運動量などが定義される。同様に AdS_3 の中のブラックホールを考えたい時には、その漸近的対称性が Virasoro 対称性になる。このことを見ていきたい。

2.1.2 漸近的 Virasoro 対称性

AdS_3 の漸近的対称性が Virasoro 対称性になることは [5][6] に非常にくわしく書かれているので、ここでは、もう少し直観的な方法でみていく。(Appendix A) の座標を使うと計量は、

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{u^2}(du^2 + d\gamma d\bar{\gamma}). \quad (2.1)$$

まず、2次元の conformal 対称性になることを考えて、次のような変換を考える。

$$\delta_0 \gamma = \xi(\gamma). \quad (2.2)$$

$\xi(\gamma)$ は無限小パラメータであり γ の正則関数である。このとき、計量の変化は、

$$\delta_0(ds^2) = \frac{\ell^2}{u^2} \xi'(\gamma) d\gamma d\bar{\gamma}. \quad (2.3)$$

ただし $\xi' = \partial\xi/\partial\gamma$ である。次に、これを打ち消すように u の変分を決める。

$$\begin{aligned}\delta_1\gamma &= \xi(\gamma), \\ \delta_1u &= \frac{1}{2}\xi'(\gamma)u.\end{aligned}\tag{2.4}$$

この時の計量の変化は、

$$\delta_1(ds^2) = \frac{\ell^2}{u}\xi''(\gamma)dud\gamma.\tag{2.5}$$

さらに、これを打ち消すように $\bar{\gamma}$ の変分を決める。結果は、

$$\begin{aligned}\delta\gamma &= \xi(\gamma), \\ \delta u &= \frac{1}{2}\xi'(\gamma)u, \\ \delta\bar{\gamma} &= -\frac{1}{2}\xi''(\gamma)u^2.\end{aligned}\tag{2.6}$$

計量の変化は、

$$\delta(ds^2) = -\frac{1}{2}\ell^2\xi'''(\gamma)d\gamma^2.\tag{2.7}$$

これは、境界 ($u \rightarrow 0$) を考えたとき、 $O(u^0)$ であり、計量の他の項 ($O(u^{-2})$) に比べて非常に小さい。したがって、これは、漸近的な対称性であるといえる。また、いくつかの注意をまとめておく。

- 反正則な変換 $\delta\gamma = \bar{\xi}(\bar{\gamma}), \dots$ に関しても同様に漸近的な対称性であり、しかも正則な変換とは可換である。
- この変換を実際にモード展開して Killing vector で表すと、central charge のない Virasoro 代数をなす ((A.2) 参照)。
- 古典的な central charge に関しては、実際に物理系を設定し、Noether charge 同士の Poisson 括弧をとれば得られる¹。[5] では、重力理論で実際に求めている、その値は、 $3\ell/2G_3$ である。ただし G_3 は、3次元の Newton 定数である。本論では後に [7] にしたがって弦理論の世界面の理論から求める。

2.1.3 Chern-Simons 重力との関係

ここでは、別の方向から 3次元の AdS 重力理論と 2次元の CFT の関係を考えてみる。3次元の重力理論は、Chern-Simons 理論で表されることが知られていて、実は bulk の物理的自由度はない。ただ、境界上にのみ自由度がある。その自由度を見てみると、2次元の SL(2,R) gauged WZW 理論で表されていて gauge を固定すると Liouville 理論になる。このことを見てみよう [8] [9]。

¹いうまでもなく central charge は一般に物理系によって異なる。

重力理論 → Chern-Simons 理論

まず、3次元の負の宇宙項を持つ重力理論は次のように書ける。 e_μ^a , ($a = 0, 1, 2$, $\mu = 0, 1, 2$) をドライバイン、 $\omega_\mu^a = \frac{1}{2}\varepsilon^{abc}\omega_\mu^{bc}$ をスピン接続とし、それぞれの1形式を $e^a = e_\mu^a dx^\mu$, $\omega^a = \omega_\mu^a dx^\mu$ とする。ただし、符号は $\eta_{ab} = \text{diag}(+1, +1, -1)$ である。

作用は、

$$S = \frac{1}{8\pi G_3} \int d^3x e \left[R + \frac{2}{\ell^2} \right]. \quad (2.8)$$

ここで R はスピン接続から求まるスカラー曲率、 e は、 $e = \det(e_\mu^a)$ 、また、 G_3 は3次元の Newton 定数である。

一方、次のような Chern-Simons 理論を考えると重力理論と（作用が）同じになっていることが分かる。 $SL(2, R) \times SL(2, R)$ の生成子 T_a, \bar{T}_a , $a = 0, 1, 2$ を用意して、次のゲージ場を作る。

$$\begin{aligned} A &= \left(\omega^a + \frac{1}{\ell} e^a \right) T_a, \\ \bar{A} &= \left(\omega^a - \frac{1}{\ell} e^a \right) \bar{T}_a. \end{aligned} \quad (2.9)$$

このゲージ場から次の Chern-Simons 作用をつくる。

$$S = \frac{k}{4\pi} \int d^3x \text{Tr} \left(AdA + \frac{2}{3} A^3 \right) - \frac{k}{4\pi} \int d^3x \text{Tr} \left(\bar{A}d\bar{A} + \frac{2}{3} \bar{A}^3 \right). \quad (2.10)$$

ただし、微分形式の積は外積である。これに A, \bar{A} の形を入れて、ねじれがない条件 $de^a + \omega^{ab}e_b = 0$ を使うと、重力理論の作用が得られ、 $k = \ell/4G_3$ であることが分かる。

Chern-Simons 理論 → WZW 理論

得られた Chern-Simons 作用から、運動方程式を作ってみると、

$$F = 0, \quad F = dA + A^2, \quad (2.11)$$

となり、物理的な（ゲージ不変な）bulk の自由度はほとんどないことが分かる。ただし、境界があるような多様体の上では、(2.10) は境界のところでゲージ不変でなくなる。実際 $(g, \bar{g}) \in SL(2, R) \times SL(2, R)$ をパラメータとするゲージ変換

$$A \rightarrow A', \quad \bar{A} \rightarrow \bar{A}' : \quad A = g^{-1}(A' + d)g, \quad \bar{A} = \bar{g}^{-1}(\bar{A}' + d)\bar{g} \quad (2.12)$$

において、

$$\begin{aligned} S[A, \bar{A}] - S[A', \bar{A}'] &= \frac{k}{12\pi} \int_M (g^{-1}dg)^3 - \frac{k}{8\pi} \int_{\partial M} (g^{-1}dg)(g^{-1}Ag) \\ &\quad + \frac{k}{12\pi} \int_M (\bar{g}^{-1}d\bar{g})^3 + \frac{k}{8\pi} \int_{\partial M} (\bar{g}^{-1}d\bar{g})(\bar{g}^{-1}\bar{A}\bar{g}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

これは、境界面上だけの積分になっている（一見 $\int_M (g^{-1}dg)^3$ の項は bulk の積分のように見えるが、積分されている 3 形式は exact であり、表面積分になる。）。つまり、境界上ではゲージ不変ではないのでゲージ自由度が物理的になり、境界上の理論になる。この境界上の理論がどのようになるか見てみよう。

まず、境界条件を考える。今の場合、漸近的に AdS_3 になるような理論を考えたいので、その理論の境界条件を考えてみる。式 (A.16) の計量を使い、 $x^0 = u$ と定義する。ここでは、時間方向は x^2 方向であることを注意する。漸近的な計量は

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{u^2} [du^2 + (dx^1)^2 - (dx^2)^2]. \quad (2.14)$$

ドライバイン は次のように定義できる。

$$e^a = \frac{\ell}{u} dx^a, \quad (a = 0, 1, 2). \quad (2.15)$$

ねじれがない条件 $de^a + \omega^a_b e^b = 0$ から、漸近的なスピノ接続が求まる。

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \frac{1}{\ell} e^1, \\ \omega^2 &= \frac{1}{\ell} e^2, \\ \omega^0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

これらをつかって、漸近的なゲージ場は、

$$\begin{aligned} A^0 &= \frac{1}{\ell} e^0, & \bar{A}^0 &= -\frac{1}{\ell} e^0, \\ A^1 &= \frac{1}{\ell} (e^1 + e^2), & \bar{A}^1 &= \frac{1}{\ell} (e^1 - e^2), \\ A^2 &= \frac{1}{\ell} (e^1 + e^2), & \bar{A}^2 &= -\frac{1}{\ell} (e^1 - e^2). \end{aligned} \quad (2.17)$$

または、 $\gamma = x^1 + x^2, \bar{\gamma} = x^1 - x^2$ を使って、

$$\begin{aligned} A^0 &= \frac{1}{u} du, & \bar{A}^0 &= -\frac{1}{u} du, \\ A^1 &= \frac{1}{u} d\gamma, & \bar{A}^1 &= \frac{1}{u} d\bar{\gamma}, \\ A^2 &= \frac{1}{u} d\gamma, & \bar{A}^2 &= -\frac{1}{u} d\bar{\gamma}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

という境界条件になるべきである。一方、作用の変分原理から境界条件がでてくる。

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{k}{2\pi} \int_M \delta A \wedge F - \frac{k}{8\pi} \int_{\partial M} [A_\gamma \delta A_{\bar{\gamma}} - A_{\bar{\gamma}} \delta A_\gamma] \\ &\quad - \frac{k}{2\pi} \int_M \delta \bar{A} \wedge \bar{F} + \frac{k}{8\pi} \int_{\partial M} [\bar{A}_\gamma \delta \bar{A}_{\bar{\gamma}} - \bar{A}_{\bar{\gamma}} \delta \bar{A}_\gamma]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

ここから出てくる境界条件は、境界で

$$A_\gamma = A_{\bar{\gamma}} = \bar{A}_\gamma = \bar{A}_{\bar{\gamma}} = 0, \quad (2.20)$$

であるが、これは、欲しい境界条件より強すぎる。このため境界項を付け足して、次のような境界条件が出るようにする。

$$A_{\bar{\gamma}} = \bar{A}_\gamma = 0. \quad (2.21)$$

そのためには、作用を次のように変更すればよい。

$$\begin{aligned} S = & \frac{k}{4\pi} \int_M d^3x \operatorname{Tr} \left(AdA + \frac{2}{3} A^3 \right) - \frac{k}{4\pi} \int_M d^3x \operatorname{Tr} \left(\bar{A}d\bar{A} + \frac{2}{3} \bar{A}^3 \right) \\ & + \frac{k}{8\pi} \int_{\partial M} (A_\gamma A_{\bar{\gamma}} + \bar{A}_\gamma \bar{A}_{\bar{\gamma}}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

運動方程式から、 $F = \bar{F} = 0$ なので、 A, \bar{A} は、pure gauge である。

$$A = g^{-1}dg, \quad \bar{A} = \bar{g}^{-1}d\bar{g}. \quad (2.23)$$

これを境界項を付け足した作用に代入すると、

$$\begin{aligned} S = & \frac{k}{8\pi} \int_{\partial M} \operatorname{Tr} [(g^{-1}\partial_\gamma g)(g^{-1}\partial_{\bar{\gamma}} g) + (\bar{g}^{-1}\partial_\gamma \bar{g})(\bar{g}^{-1}\partial_{\bar{\gamma}} \bar{g})] \\ & - \frac{k}{12\pi} \int_M \operatorname{Tr} (g^{-1}dg)^3 + \frac{k}{12\pi} \int_M \operatorname{Tr} (\bar{g}^{-1}d\bar{g})^3 \end{aligned} \quad (2.24)$$

これは、 $\hat{g} = g\bar{g}^{-1}$ を使って WZW 作用の形に書ける。

$$S = \frac{k}{4\pi} \int_{\partial M} \operatorname{Tr} [(\hat{g}^{-1}\partial_\gamma \hat{g})(\hat{g}^{-1}\partial_{\bar{\gamma}} \hat{g})] - \frac{k}{6\pi} \int_M \operatorname{Tr} (\hat{g}^{-1}d\hat{g})^3. \quad (2.25)$$

WZW 理論 → Liouville 理論

\hat{g} を次のようにパラメータで表す。

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta_L & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \theta_R \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

すると、WZW の作用は、

$$S = \frac{k}{2\pi} \int d^2\gamma \left[\frac{1}{2} \partial\lambda \bar{\partial}\lambda + e^{2\lambda} \partial\theta_R \bar{\partial}\theta_L \right]. \quad (2.27)$$

また、 AdS_3 に対応する古典解は、

$$e^\lambda = \frac{1}{u}, \quad \theta_L = \gamma, \quad \theta_R = \bar{\gamma}. \quad (2.28)$$

理論は、この解のまわりに展開して考えるべきである。これを見ると、 $\theta_L \rightarrow \theta_L + \alpha_L(u, \gamma, \bar{\gamma})$ および $\theta_R \rightarrow \theta_R + \alpha_R(u, \gamma, \bar{\gamma})$ というゲージ変換は、 $\gamma, \bar{\gamma}$ の再定義に吸収

できるので、この変換は系の対称性である。作用は、この対称性を持つように変更しなければならない²。そこで、次のようにする。

$$S = \frac{k}{2\pi} \int d^2\gamma \left[\frac{1}{2} \partial\lambda \bar{\partial}\lambda + e^{2\lambda} \partial\theta_R \bar{\partial}\theta_L \right] + \frac{k}{2\pi} \int d^2\gamma \left[a(e^{2\lambda} \bar{\partial}\theta_L - \sqrt{\mu}) + \bar{a}(e^{2\lambda} \partial\theta_R - \sqrt{\mu}) + a\bar{a}e^{2\lambda} \right]. \quad (2.29)$$

ここで、 a, \bar{a} は、補助場である。ゲージ変換は、

$$\delta\theta_L = \alpha_L, \quad \delta a = \partial\alpha_L, \quad \delta\bar{a} = \bar{\partial}\alpha_L, \quad (2.30)$$

および、

$$\delta\theta_R = \alpha_R, \quad \delta a = \partial\alpha_R, \quad \delta\bar{a} = \bar{\partial}\alpha_R, \quad (2.31)$$

である。 a, \bar{a} を消去しよう。古典的には、運動方程式の解を代入するだけである。

$$S = \frac{k}{4\pi} \int d^2\gamma \left[\partial\lambda \bar{\partial}\lambda + \mu e^{-2\lambda} \right] \quad (2.32)$$

しかし、量子論的には次のように補正される。

$$S = \frac{k-2}{4\pi} \int d^2\gamma \left[\partial\lambda \bar{\partial}\lambda + QR^{(2)}\lambda + \mu e^{-2\lambda} \right] \quad (2.33)$$

これは、Liouville 理論の作用であり、次のことが知られている。

$$Q = \frac{1-k}{k-2} \quad (2.34)$$

の時、conformal である。このとき central charge は、

$$c = \frac{3k}{k-2} - 2 + 6k \quad (2.35)$$

となる。これは古典極限 $k \rightarrow \infty$ で $c = 6k$ になり、[5] の結果ともあっている。

2.2 D1-D5 system

D1-D5 system は、instanton brane の性質を調べるときや、ブラックホール エントロピーを調べる時などに良く利用され、非常に良く研究されている system である。その brane 上の低エネルギー理論は 2次元の $\mathcal{N} = (4, 4)$ で $(M^4)^{Q_1 Q_5} / S_{Q_1 Q_5}$ をターゲットとする σ モデルである。ここで、 M^4 は D5-brane が巻き付いていて、D1-brane が巻き付いていない 4次元多様体であり、 T^4 または $K3$ である。

² 本来は、Chern-Simons 作用に境界項を付け足すときにいっしょにいれておくべきであった項である。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D5	○	×	×	×	×	○	○	○	○	○
D1	○	×	×	×	×	○	×	×	×	×

表 2.1: D1-D5 system

2.2.1 計量と near horizon 極限

超重力理論の D1-D5 system の解は、次のとおりである。

$$\begin{aligned}
e^{-2\phi} &= \frac{1}{g^2} \frac{f_5(r)}{f_1(r)}, \\
H_3 &= \frac{2R_5^2}{g} \epsilon_3 + 2R_1^2 g e^{-2\phi} *_6 \epsilon_3, \\
ds^2 &= f_5(r)^{-\frac{1}{2}} f_1(r)^{-\frac{1}{2}} (-dt^2 + (dx^5)^2) + f_5(r)^{-\frac{1}{2}} f_1(r)^{\frac{1}{2}} dx^i dx_i, \\
&\quad + f_5(r)^{\frac{1}{2}} f_1(r)^{\frac{1}{2}} (dr^2 + r^2 d\Omega_3^2), \\
f_1(r) &= 1 + \frac{R_1^2}{r^2}, \quad f_5(r) = 1 + \frac{R_5^2}{r^2}, \\
R_1 &= \frac{g \ell_s^2 Q_1}{v}, \quad R_5 = g \ell_s^2 Q_5.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

ここで、 ϕ はダイラトン、 H_3 は Ramond-Ramond 3 形式の場の強さ、 ϵ_3 は S^3 の体積形式、 $*_6$ は 6 次元 (x^0, \dots, x^5) に関する Hodge 双対、 Q_1, Q_5 はそれぞれ D1-brane、D5-brane の枚数、 ℓ_s は、弦の長さ、 g は無限遠点での弦の結合定数、 $v \ell_s^4$ は無限遠点での M^4 の体積である。

near horizon 極限をとろう。near horizon 極限は、 $r \ll R_1, r \ll R_5$ である。すると、

$$\begin{aligned}
e^{-2\phi} &= \frac{v Q_5}{g^2 Q_1}, \\
H_3 &= \frac{2R_5^2}{g} \epsilon_3 + 2R_1^2 g e^{-2\phi} *_6 \epsilon_3, \\
ds^2 &= \frac{r^2}{\ell^2} (-dt^2 + (dx^5)^2) + \sqrt{\frac{Q_1}{v Q_5}} dx^i dx_i + \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 + \ell^2 d\Omega_3^2, \\
\ell^2 &= \ell_s^2 g \sqrt{\frac{N}{v}}, \quad N = Q_1 Q_5.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

したがって、ダイラトンは定数、計量は $AdS_3 \times S^3 \times M^4$ になっている。 AdS_3 と S^3 はともに半径が ℓ である。

2.3 状態の対応

さて、超重力理論と CFT の状態の対応を調べよう。ここでは、[10][11] にしたがって、超群の表現論を用いて調べる。

10次元の IIB 超重力理論を $K3$ コンパクト化したものは、6次元の (2,0) 超重力理論 + 21 tensor multiplet になることが知られている。さらに、この6次元の (2,0) 超重力理論は、 $AdS_3 \times S^3$ の background で見ると、 $SU(1, 1|2) \times SU(1, 1|2)$ の対称性がある。実はこの対称性が、境界上の CFT の対称性 small $\mathcal{N} = (4, 4)$ 超共形代数のグローバルな部分と対応しているので、この表現に基づいて、状態が対応しているかどうか調べることができる。

2.3.1 超代数 $su(1, 1|2)$

まず、 $su(1, 1|2)$ についてまとめておく。 $su(1, 1|2)$ は、small $\mathcal{N} = (4, 4)$ 超共形代数のグローバルな部分であり、次のような生成子で生成される。

- $sl(2, R)$ の生成子 $L_{0, \pm 1}$ 。
- $su(2)$ の生成子 T^a , $a = 1, 2, 3$ 。
- fermionic な生成子 $Q_{\pm\frac{1}{2}}^{\pm}, \bar{Q}_{\pm\frac{1}{2}}^{\pm}$ それぞれ $sl(2, R), su(2)$ の 2次元表現になっている。

交換関係は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m - n)L_{m+n}, \\
[T^a, T^b] &= i\varepsilon^{abc}T^c, \\
[L_m, T^a] &= 0, \\
[L_m, Q_r^i] &= \left(\frac{1}{2}m - r\right) Q_{r+m}^i, \quad [L_m, \bar{Q}_r^i] = \left(\frac{1}{2}m - r\right) \bar{Q}_{r+m}^i, \\
[T^a, Q_r^i] &= -\frac{1}{2}\sigma_{ij}^a Q_r^j, \quad [T^a, \bar{Q}_r^i] = \frac{1}{2}\bar{\sigma}_{ij}^a \bar{Q}_r^j, \\
\{Q_r^i, Q_s^j\} &= \{\bar{Q}_r^i, \bar{Q}_s^j\} = 0, \\
\{Q_r^i, \bar{Q}_s^j\} &= 2\delta^{ij}L_{r+s} - 2\sigma_{ij}^a(r - s)T^a, \\
m, n &= 0, \pm 1, \quad r, s = \pm\frac{1}{2}, \quad a, b, c = 1, 2, 3, \\
\sigma^a &\text{ はパウリ行列。}\bar{\sigma}^a \text{ は、}\sigma^a \text{ の成分ごとの複素共役。}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

これの最低ウェイト状態、またはプライマリー状態から作られる表現を考えたい。プライマリー状態 $|\varphi\rangle$ とは、

$$L_1|\varphi\rangle = T^+|\varphi\rangle = Q_{+\frac{1}{2}}^i|\varphi\rangle = \bar{Q}_{+\frac{1}{2}}^i|\varphi\rangle = 0 \tag{2.39}$$

となる状態のことで、

$$L_0|\varphi\rangle = h|\varphi\rangle, \quad T^3|\varphi\rangle = j|\varphi\rangle \tag{2.40}$$

となる (h, j) で特徴付けられる。これに、 $L_{-1}, Q_{-\frac{1}{2}}^i, \bar{Q}_{-\frac{1}{2}}^i, T^-$ をかけていくことで多重項が得られる。さらに、

$$\bar{Q}_{-\frac{1}{2}}^+ |\varphi\rangle = Q_{-\frac{1}{2}}^- |\varphi\rangle = 0 \quad (2.41)$$

となるプライマリ状態をカイラルプライマリ状態とよぶ。この時、交換関係、

$$\{Q_{\frac{1}{2}}^+, \bar{Q}_{-\frac{1}{2}}^+\} = 2L_0 - 2T^3, \quad \{Q_{-\frac{1}{2}}^-, \bar{Q}_{\frac{1}{2}}^-\} = 2L_0 - 2T^3. \quad (2.42)$$

2つの式は、ともに両辺をカイラルプライマリ状態に作用させると、左辺は0となるから、カイラルプライマリ状態に対しては、 $h = j$ が成り立つ。カイラルプライマリ状態から導かれる多重項を short multiplet と呼ぶ。ここでは、short multiplet がどうなっているかを調べよう。

まず、 $(L_0, T^3) = (h, j)$ の状態 (たとえばカイラルプライマリ状態) に L_{-1} をかけていくことによって1つのタワーが、また T^- をかけていくことによって $su(2)$ のスピン j 表現の多重項ができる。カイラルプライマリ状態 $|\varphi\rangle$ に $\bar{Q}_{-\frac{1}{2}}^-, Q_{-\frac{1}{2}}^+$ をかけていった状態を考えよう。 $\bar{Q}_{-\frac{1}{2}}^- = b_1, Q_{-\frac{1}{2}}^+ = b_2$ と書くことにすると、次のような交換関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} [L_0, b_{1,2}] &= \frac{1}{2} b_{1,2}, \\ [T^3, b_{1,2}] &= -\frac{1}{2} b_{1,2}, \\ [T^+, b_{1,2}] &= [L_{+1}, b_{1,2}] = 0, \\ \{b_1, b_2\} &= 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

つまり、 $b_{1,2}$ は、 L_0 の固有値を $1/2$ だけ上げ、 T^3 の固有値を $1/2$ だけ下げる。 $|\varphi\rangle$ に b_1, b_2 をかけていってできる状態は次の4つである。

$$|\varphi\rangle, b_1|\varphi\rangle, b_2|\varphi\rangle, b_1 b_2|\varphi\rangle. \quad (2.44)$$

それぞれ、 (L_0, T^3) の固有値は、 $(h, j), (h+1/2, j-1/2), (h+1/2, j-1/2), (h+1, j-1)$ になっている。このような short multiplet あるいは、カイラルプライマリ状態を電荷 $k = 2h = 2j$ で表すことにする³。

2.3.2 超重力理論の状態

$su(1, 1|2) \times su(1, 1|2)$ のうちでも特に $su(2) \times su(2)$ の部分に注目する。超重力理論では、 $su(2) \times su(2)$ は S^3 の球面調和関数のモードである。一方、超重力理論では、局所 Lorentz 変換 $so(3)$ に対する変換性がある。このことに関して次のことが知られている。

³もともとカイラルプライマリ状態は $\mathcal{N} = 2$ CFT から出てきた概念であり、 k は、 $\mathcal{N} = 2$ SCA のなかの $U(1)$ カレントの電荷である。

局所 Lorentz 変換 $so(3)$ は球面調和関数の $su(2) \times su(2)$ の対角成分であり、ある局所 Lorentz 変換 $so(3)$ のモードを球面調和関数で展開した時には、対角成分として局所 Lorentz 変換 $so(3)$ の表現を含むものしかあらわれない。しかも、現れるものは 1 回ずつ現れる。

例を示そう。 S^3 上にベクトル場 A_i , ($i = 1, 2, 3$) があつたとする。これを S^3 の球面調和関数で展開したときには、 $su(2) \times su(2)$ の (m, m) , $m = 3, 4, 5, \dots$ および $(m+2, m)$, $(m, m+2)$, $m = 1, 2, 3, \dots$ がすべて 1 つずつあらわれる⁴。

さて、 S^3 の局所 Lorentz 変換の表現として、どんなものがでてくるか分かれば、 $su(2) \times su(2)$ の表現としてどんなものがでてくるかが分かることになった。あとは、 S^3 の局所 Lorentz 変換の表現として、どんなものがでてくるかを調べればよい。分かっていることは、6次元の局所 Lorentz 変換の表現としてどんなものがでてくるかである。あるいは、物理的なモードに関しては6次元の局所 Lorentz 変換のリトルグループ $so(4) = su(2) \times su(2)$ ⁵ の変換の表現としてなにがでてくるかである。これと、 S^3 の局所 Lorentz 変換 $so(3)$ の表現の関係を調べよう。もともと 6次元 $AdS_3 \times S^3$ の局所 Lorentz 変換は、 $so(5, 1)$ であつたが、時間方向と縦波方向をともにコンパクトでない方向の AdS_3 の方向からとるので、リトルグループの $so(4)$ のうち、1 方向が AdS_3 の方向、3 方向が S^3 の方向である。したがって、 S^3 の局所 Lorentz 変換 $so(3)$ は 6次元のリトルグループ $so(4) = su(2) \times su(2)$ の対角成分である。

あと必要なのは、6次元のリトルグループの表現としてどんなものが出てくるかである。10次元 type IIB 超重力理論を K3 コンパクト化したものは、6次元 (2,0) 超重力理論に $n_T = 21$ 個のテンソル多重項を入れたものである。ただし、K3 の K.K. モードは無視する。この理論にどんな場があるかを表にまとめておく。さて、超重

	数	リトルグループ $so(4)_{\text{little}}$ の表現	S^3 の局所 Lorentz 変換 $so(3)_{L.L.}$ の表現
グラビトン	1	(3,3)	1+3+5
グラビティーノ	4	(2,3)	2+4
自己双対テンソル	5	(1,3)	3
反自己双対テンソル	n_T	(3,1)	3
スピノール	$4n_T$	(2,1)	2
スカラー	$5n_T$	(1,1)	1

表 2.2: 6次元 (2,0) 超重力理論の場

力理論に $su(1, 1|2) \times su(1, 1|2)$ のどのような表現の状態がいくつあるかは次のようにして分かる。

⁴ $su(2)$ のスピン j 表現とスピン j' 表現を合成した時には、スピン $|j-j'|, |j-j'|+1, \dots, j+j'$ の表現が、1 つずつ現れる。いいかえると、 m 次元表現と m' 次元表現を合成したときには $|m-m'|+1, |m-m'|+3, \dots, m+m'-1$ 次元表現が 1 つずつ現れる。このことを逆にみたことになる。

⁵ S^3 の isometry $su(2) \times su(2)$ と、6次元のリトルグループ $su(2) \times su(2)$ は異なるものであることに注意する。

1. まず、超重力理論は自由場と思うことにする。1粒子状態は、各場の自由場に対する粒子（6次元では質量なし）で、両方の $su(1,1|2)$ の short multiplet になっていることを仮定する。これらの状態の6次元のリトルグループ $so(4) = su(2) \times su(2)$ に対する表現は、表 (2.2) にまとめた通りである。とりあえず、1粒子状態だけ考える。
2. S^3 局所 Lorentz 変換に対する表現にどのようなものがあるかを調べる。これは、6次元のリトルグループの2つの $su(2)$ の対角成分である。したがって表現を合成すればよい。これも表 (2.2) に示した通りである。
3. S^3 の isometry $so(4) = su(2) \times su(2)$ の表現、つまり、 S^3 の球面調和関数としてどのようなものがいくつ出てくるかを調べる。これは、たとえば、 S^3 の局所 Lorentz 変換に対して m 次元表現であったとすると、 $so(4) = su(2) \times su(2)$ 球面調和関数は、合成して m 次元表現が現れるモードが1つずつである。
4. ここまでで、 $su(1,1|2) \times su(1,1|2)$ のなかの $su(2) \times su(2)$ の表現として、どのようなものがいくつあるのかが分かったので、それを、 $su(1,1|2) \times su(1,1|2)$ の表現にまとめる。 $su(1,1|2)$ の電荷 k の short multiplet 1つには、 $su(2)$ の k 表現1つ、 $k+1$ 表現2つ、 $k+2$ 表現1つの合計4つが含まれている。⁶

さて、3. から進めよう。 S^3 の局所 Lorentz 変換の表現に対してどのような S^3 の isometry の表現が出てくるかをまとめる。

- 1 表現

$$(m, m) : m = 1, 2, 3, \dots$$

- 2 表現

$$(m, m+1), (m+1, m) : m = 1, 2, 3, \dots$$

- 3 表現

$$\begin{aligned} (m, m) & : m = 2, 3, 4, \dots \\ (m, m+2), (m+2, m) & : m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

- 4 表現

$$\begin{aligned} (m, m+1), (m+1, m) & : m = 2, 3, 4, \dots \\ (m, m+3), (m+3, m) & : m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

- 5 表現

$$\begin{aligned} (m, m) & : m = 3, 4, 5, \dots \\ (m, m+2), (m+2, m) & : m = 2, 3, \dots \\ (m, m+4), (m+4, m) & : m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

⁶ 正確には、 L_{-1} をかけていったものがあるので「4つのタワーがある。」である。超重力理論でいえば、 L_{-1} の違いは、 AdS_3 の中のモードの違いである。ここでは1つの状態とはこのタワー1つのことである。

すべて合わせると、 $su(2) \times su(2)$ の各表現に属する状態の数は次のようになる。

$su(2) \times su(2)$ の表現	数
(1, 1)	$5n_T + 1$
(2, 2)	$6n_T + 7$
$(m, m), \quad m = 3, 4, \dots$	$6n_T + 8$
(1, 2), (2, 1)	$4n_T + 4$
$(m, m+1), (m+1, m), \quad m = 3, 4, \dots$	$4n_T + 8$
(1, 3), (3, 1)	$n_T + 6$
$(m, m+2), (m+2, m), \quad m = 2, 3, \dots$	$n_T + 7$
$(m+3, m), (m, m+3), \quad m = 1, 2, \dots$	4
$(m+4, m), (m, m+4), \quad m = 1, 2, \dots$	1

これらを $su(1, 1|2) \times su(1, 1|2)$ の short multiplet にまとめると次のようになる。
 $((k, k')_S$ のように書く。)

$su(1, 1 2) \times su(1, 1 2)$ の表現	数
$(1, 1)_S$	n_T
$(k, k)_S, \quad k = 2, 3, \dots$	$n_T + 1$
$(k, k+2)_S, (k+2, k)_S, \quad k = 0, 1, 2, \dots$	1

さて、カイラルプライマリー状態に注目しよう。上の表のすべての short multiplet を区別するような添字 A, B, \dots を導入し、1 粒子カイラルプライマリー状態の生成演算子を $\alpha^{\dagger A}$ とする。カイラルプライマリー粒子がたくさんある状態は、またカイラルプライマリー状態である。したがって、多粒子のカイラルプライマリー状態は一般に次のように書ける。

$$\prod_A (\alpha^{\dagger A})^{n_A} |0\rangle, \quad (2.45)$$

ただし、 $\{n_A\}$ は、有限個のみが 0 でない。この状態の電荷は、

$$\sum_A q(A) n_A, \quad (2.46)$$

で表される。ここで、 $q(A)$ は、1 粒子状態 A の電荷である。

2.3.3 CFT の状態

対応する CFT は、 $K3^N/S_N$ をターゲット空間とする small $\mathcal{N} = (4, 4)$ の σ -モデルである。これについて調べていこう。

超重力理論では、カイラルプライマリー状態についてすべて調べたので、CFT でもカイラルプライマリー状態について調べる。カイラルプライマリー状態は電荷 (T^3 固有値の 2 倍) q で特徴づけられる。

次の重要な事実がある。

σ -モデルの電荷 q, q' のカイラルプライマリーの数、ターゲット空間の Hodge 数 $h^{q, q'}$ に等しい。

次の Poincaré 多項式を考えると便利である。

$$P_{t, \bar{t}} = \sum_{q, q'} h^{q, q'} t^q \bar{t}^{q'}. \quad (2.47)$$

これは、次のようにも書ける。

$$P_{t, \bar{t}} = \text{Tr} (t^{2T^3} \bar{t}^{2\bar{T}^3}). \quad (2.48)$$

ただしトレースはカイラルプライマリー状態についてのみとる。

さて、結果はつぎのようになることが知られている [12]。

$$\begin{aligned} \sum_{N \geq 0} p^N P_{t, \bar{t}}(K3^N/S_N) &= \prod_{m=1}^{\infty} \left[(1 - p^m t^{m-1} \bar{t}^{m-1})^{-1} (1 - p^m t^{m-1} \bar{t}^{m+1})^{-1} \right. \\ &\quad \left. \times (1 - p^m t^{m+1} \bar{t}^{m-1})^{-1} (1 - p^m t^{m+1} \bar{t}^{m+1})^{-1} (1 - p^m t^m \bar{t}^m)^{-20} \right]. \end{aligned} \quad (2.49)$$

求めたいのは、 $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{t, \bar{t}}(K3^N/S_N)$ であるが、これは次のようにして求まる。

$$(1 - p)^{-1} (a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots) = a_0 + (a_0 + a_1) p + (a_0 + a_1 + a_2) p^2 + \dots \quad (2.50)$$

の関係を使うと、右辺の p^∞ の係数は、左辺に $(1 - p)$ をかけて、 $p = 1$ とおいたものである。これを、 $\sum_{N \geq 0} p^N P_{t, \bar{t}}(K3^N/S_N)$ に対して適用すればよい。結果は、

$$P_{t, \bar{t}}(K3^\infty/S_\infty) = (1 - t\bar{t})^{-1} \prod_{m=1}^{\infty} \left[(1 - t^{m-1} \bar{t}^{m+1})^{-1} (1 - t^{m+1} \bar{t}^{m-1})^{-1} (1 - t^{m+1} \bar{t}^{m+1})^{-22} \right]. \quad (2.51)$$

これが (2.45) と同じ数であることを示そう。 $P_{t, \bar{t}}(K3^\infty/S_\infty)$ は、次のように書ける。

$$P_{t, \bar{t}}(K3^\infty/S_\infty) = \prod_A (1 - t^{q(A)} \bar{t}^{q'(A)})^{-1}. \quad (2.52)$$

ここで、 A は、超重力理論のところで導入した 1 粒子カイラルプライマリー状態を区別する添字と全く同じにできる。 $(q(A), q'(A))$ はその電荷であり、これも超重力理論と同じにできる。さて、 $t^{q(A)} \bar{t}^{q'(A)} = \alpha^{\dagger A}$ と書いてみるともっと分かりやすくなる。すると、

$$(1 - \alpha^{\dagger A})^{-1} = \sum_{n_A=0}^{\infty} (\alpha^{\dagger A})^{n_A}, \quad (2.53)$$

だから、

$$P_{t, \bar{t}}(K3^\infty/S_\infty) = \sum_{\{n_A\}} \prod_A (\alpha^{\dagger A})^{n_A}. \quad (2.54)$$

それぞれの項が、電荷 $q(n_A) = \sum n_A q(A)$ だから完全に対応している。

弦の排他原理

N が有限の場合、CFT のカイラルプライマリー状態は、有限個しかない。しかもその電荷は、 $q, q' \leq 2N$ となっている ($K3^N/S_N$ は、実 $4N$ 次元、つまり複素 $2N$ 次元だから $(2N, 2N)$ 形式までしかない。)。これは、CFT の側では何でもないが、超重力理論との対応を信じると変なことになっている。例えば、電荷 $(1, 1)$ のカイラルプライマリー状態には、 $2N$ 個までしか粒子が入れないことになる。このことを [13] では「弦の排他原理 (stringy exclusion principle)」と呼んでいる。

第3章 AdS_3 — 世界面の理論

一般に曲がった空間の中の弦理論は非常に難しいが、 AdS_3 の中の弦の場合には、 $AdS_3 = SL(2, R)$ で群多様体になるので、WZW モデルで表される [14]。[7] では、実際に AdS_3 の中の弦理論を調べ、時空の conformal 対称性の生成子を構成している。この章では [7] にしたがって、弦の世界面の理論から時空の CFT を構成する。

3.1 NS1-NS5 system

D1-D5 system の near horizon の計量 (2.37) の S 双対をとって、NS1-NS5 system つまり、基本弦と NS5-brane の複合系の near horizon を考えよう。(2.37) から D1-D5 system の near horizon の計量およびディラトンは、 $r \rightarrow u$ の座標変換をし、 M^4 の部分を無視すると、

$$\begin{aligned} e^{-2\phi} &= \frac{vQ_5}{g^2Q_1} \\ ds^2 &= \ell^2 \left[\frac{1}{u^2} (du^2 - dt^2 + (dx^5)^2) + d\Omega_3^2 \right] \\ \ell^2 &= \ell_s^2 g \sqrt{\frac{N}{v}}, \quad N = Q_1 Q_5 \end{aligned} \quad (3.1)$$

この S 双対は、 $\hat{\phi} = -\phi$ 、 $\hat{g}_{\mu\nu} = e^{-\phi} g_{\mu\nu}$ とすればよいので、出てきた計量はやはり $AdS_3 \times S^3$ であって、その半径 $\hat{\ell}$ は、

$$\hat{\ell} = e^{-\phi} \ell = Q_5 \ell_s^2 \quad (3.2)$$

となり、半径は、 Q_5 にのみよる。

3.2 ボゾンの弦

まず簡単な場合としてボゾンの弦をあつかう。ターゲット空間としては一般的に $AdS_3 \times G_1 \times G_2 \times \dots$ をあつかう。特に、NS1-NS5 system を考える時は、 $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ であり、理論は、 $SL(2, R) \times SU(2) \times U(1)^4$ の WZW モデルで $SL(2, R)$ と $SU(2)$ のレベルは共に $k = Q_5$ である。

3.2.1 古典的な作用

ここでは、 AdS_3 の座標として次のようなものを使う。(A.17) で、 $y = e^{-\phi}$ として座標変換 $(y, \gamma, \bar{\gamma}) \rightarrow (\phi, \gamma, \bar{\gamma})$ を行なう。計量は、

$$ds^2 = \ell^2 (d\phi^2 + e^{2\phi} d\gamma d\bar{\gamma}). \quad (3.3)$$

また、背景の NS-NS 2 形式の場合 $B = \ell^2 e^{2\phi} d\gamma \wedge d\bar{\gamma}$. を導入しておく。作用は、

$$\mathcal{L} = \frac{2\ell^2}{\ell_s^2} (\partial\phi\bar{\partial}\phi + e^{2\phi}\partial\bar{\gamma}\bar{\partial}\gamma). \quad (3.4)$$

補助場 $\beta, \bar{\beta}$ を導入し、また $\ell^2/\ell_s^2 = k$ と書く。

$$\mathcal{L} = 2k (\partial\phi\bar{\partial}\phi + \beta\bar{\partial}\gamma + \bar{\beta}\partial\bar{\gamma} + \beta\bar{\beta}e^{-2\phi}). \quad (3.5)$$

場をスケールしなおして、

$$\mathcal{L} = \partial\phi\bar{\partial}\phi + \beta\bar{\partial}\gamma + \bar{\beta}\partial\bar{\gamma} + \beta\bar{\beta}e^{-\frac{2}{\sqrt{2k}}\phi}, \quad (3.6)$$

となる。

3.2.2 Virasoro Current

AdS_3 中の弦の world sheet 理論を考えた時、そこには、 AdS_3 の isometry である、 $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$ のグローバル対称性があるはずである。さらには、それは、漸近的に Virasoro に拡大するので、グローバルな Virasoro 対称性を持っているといえる。その current や charge を求めてみたい。ここでは、holomorphic 部分のみ扱うが anti-holomorphic 部分も同様である。

world sheet の Lagrangian は、

$$\mathcal{L} = 2k(\partial\phi\bar{\partial}\phi + e^{2\phi}\bar{\partial}\gamma\partial\bar{\gamma}). \quad (3.7)$$

space time の Virasoro generator L_m に対する無限小変換は ε を無限小パラメータとして、

$$\begin{aligned} \delta\gamma &= \varepsilon\gamma^{m+1}, \\ \delta\bar{\gamma} &= \varepsilon \left[-\frac{1}{2}(m+1)m\gamma^{m-1}e^{-2\phi} \right], \\ \delta\phi &= \varepsilon \left[-\frac{1}{2}(m+1)\gamma^m \right], \end{aligned} \quad (3.8)$$

したがって、

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \varepsilon 2k \left[-\frac{1}{2}(m+1)m\gamma^{m-1}(\partial\gamma\bar{\partial}\phi - \bar{\partial}\gamma\partial\phi) - \frac{1}{2}(m+1)m(m-1)\gamma^{m-2}\bar{\partial}\gamma\partial\gamma \right] \\ &= \varepsilon(\partial A^z + \bar{\partial} A^{\bar{z}}) - \varepsilon k(m+1)m(m-1)\gamma^{m-2}\bar{\partial}\gamma\partial\gamma, \\ &\quad \text{ただし} \\ &\quad A^z = -k(m+1)\gamma^m\bar{\partial}\phi, \\ &\quad A^{\bar{z}} = k(m+1)\gamma^m\partial\phi. \end{aligned} \quad (3.9)$$

$\delta\mathcal{L}$ の第二項は、全微分ではないが、 $\phi \rightarrow \infty$ で小さくなるので無視する。この変換に対する current の z 成分、 \bar{z} 成分は、それぞれ、次のようになる。

$$\begin{aligned} J_m^z &= -k(m+1)m\gamma^{m-1}\bar{\partial}\gamma, \\ J_m^{\bar{z}} &= 2ke^{2\phi}\partial\bar{\gamma}\gamma^{m+1} - 2k(m+1)\gamma^m\partial\phi. \end{aligned} \quad (3.10)$$

current の保存則は、

$$\partial J_m^z + \bar{\partial} J_m^{\bar{z}} = 0, \quad (3.11)$$

であるが、 ∂J_m^z は、

$$\begin{aligned} \partial J_m^z &= \partial[-k(m+1)m\gamma^{m-1}\bar{\partial}\gamma] \\ &= \bar{\partial}[-k(m+1)m\gamma^{m-1}\partial\gamma], \end{aligned} \quad (3.12)$$

したがって、

$$\begin{aligned} J_m &\equiv J_m^{\bar{z}} - k(m+1)m\gamma^{m-1}\partial\gamma \\ &= 2ke^{2\phi}\partial\bar{\gamma}\gamma^{m+1} - 2k(m+1)\gamma^m\partial\phi - k(m+1)m\gamma^{m-1}\partial\gamma, \end{aligned} \quad (3.13)$$

とおくと、これは、

$$\bar{\partial} J_m = 0, \quad (3.14)$$

となって、holomorphic な current になる。

3.2.3 量子論的な作用

弦理論を考える際には (3.2.1) で導いた古典的な作用を用いて考えてもよいが、量子論的な補正まで考えるには次のように考えるべきである。

群多様体の中の弦理論は WZW 理論で表されることが知られている。 $AdS_3 = SL(2, R)$ の中の弦理論を考えるには、 $SL(2, R)$ の WZW モデルを考えれば良い。WZW モデルは自由度として、群のカレントのみを持つような理論である。ここではカレントを表すのに Wakimoto 表示を用いることにする。それは自由場 β, γ, ϕ が、OPE

$$\beta(z)\gamma(w) \sim \frac{1}{z-w}, \quad \phi(z)\phi(w) \sim -\log(z-w), \quad (3.15)$$

を持つとして、次のように表される。

$$\begin{aligned} J^- &= \beta, \\ J^3 &= \beta\gamma + \frac{1}{2}\alpha_+\partial\phi, \\ J^+ &= \beta\gamma^2 + \alpha_+\gamma\partial\phi + k\partial\gamma. \end{aligned} \quad (3.16)$$

ただし k はレベル、 $\alpha_+ = \sqrt{2k-4}$ である。これは、確かに次のような $SL(2, R)$ Kac-Moody 代数を満たす。

$$\begin{aligned} J^+(z)J^-(w) &\sim \frac{k}{(z-w)^2} - \frac{2}{z-w}J^3(w) \\ J^3(z)J^\pm(w) &\sim \frac{\pm 1}{z-w}J^\pm(w) \\ J^3(z)J^3(w) &\sim \frac{-k/2}{(z-w)^2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

これからエネルギー-運動量テンソルを求めると、

$$T(z) = \beta\partial\gamma - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{\alpha_+}\partial^2\phi. \quad (3.18)$$

同様に、 $\bar{\beta}, \bar{\gamma}, \phi$ を用いて、 $\bar{J}^{\pm,3}$ および \bar{T} ができる。これらから量子論的な作用は、

$$\mathcal{L} = \partial\phi\bar{\partial}\phi + \frac{1}{\alpha_+}\phi R^{(2)} + \beta\bar{\partial}\gamma + \bar{\beta}\partial\bar{\gamma} + \beta\bar{\beta}e^{-\frac{2}{\alpha_+}\phi}. \quad (3.19)$$

ここで、 $R^{(2)}$ は、世界面のスカラー曲率である。ここでは、作用から何かをするということはない。使うのは、カレント代数、および γ との OPE のみである。

3.2.4 時空の Virasoro, および Kac-Moody 代数

時空の対称性が世界面上の理論でどのように現れているかを見てみよう。まず本当の isometry $SL(2, R)$ の生成子は、世界面上の $SL(2, R)$ カレントのに対応する電荷である。

$$L_{\pm 1} = -\oint dz J^\pm, \quad L_0 = -\oint dz J^3. \quad (3.20)$$

これは、実際

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}, \quad (m, n = 0, \pm 1), \quad (3.21)$$

を満たす。

また、前の章で時空の対称性は、境界上で Virasoro 対称性に広がることを見た。これが世界面上の理論でどう見えるかを調べたい。ようするに、 L_m , ($m \in \mathbf{Z}$) で次の Virasoro 代数を満たすものを作りたい。

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{\tilde{c}}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}. \quad (3.22)$$

結果からいうと次のようになる。

$$\begin{aligned} L_m &= \oint dz \mathcal{L}_m(z), \\ \mathcal{L}_m(z) &= -(1-m^2)\gamma^m J^0(z) - \frac{m(m-1)}{2}\gamma^{m+1}J^-(z) - \frac{m(m+1)}{2}\gamma^{m-1}J^+(z). \end{aligned} \quad (3.23)$$

これは、 $m = 0, \pm 1$ のときは、(3.20) とあっている。これが実際に Virasoro 代数を満たすことを確かめ、central charge \tilde{c} を求めよう。使う OPE は、次の通りである。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m(z)\gamma^n(w) &= \frac{1}{z-w}(-n)\gamma^{n+m}, \\ \mathcal{L}_m(z)\mathcal{L}_n(z) &= \frac{1}{(z-w)^2}k_{mn}\delta_{m+n,0} + \frac{1}{z-w}(m-n)\mathcal{L}_{m+n}, \\ m, n = 0, \pm 1, \quad k_{mn} &= \begin{cases} -k/2 & (m = n = 0) \\ k & (m = -n = \pm 1) \end{cases}.\end{aligned}\quad (3.24)$$

次のような OPE を計算しておくとも便利である。

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_m\gamma^N)(z)(\mathcal{L}_n\gamma^M)(w) &\sim \frac{1}{(z-w)^2}(\dots) \\ &+ \frac{1}{z-w} \left[(m-n)\mathcal{L}_{m+n}\gamma^{M+N} - N\gamma^{m+M+N}\mathcal{L}_n - M\gamma^{n+M+N}\mathcal{L}_m \right. \\ &\left. + k_{mn}\delta_{m+n,0}M\gamma^{M+N-1}\partial\gamma + (\text{total derivative terms}) \right], \\ m, n = 0, \pm 1, \quad M, N \in \mathbf{Z}.\end{aligned}\quad (3.25)$$

また、次のことも重要である。 $\gamma^M\partial\gamma$ という項は、 $M = -1$ の場合をのぞいて全微分項である。 $M = -1$ のときは、 $\oint dw\gamma^{-1}\partial\gamma$ がなんらかの値を持つ可能性がある。これを p としよう。つまり、

$$\oint dw\gamma^M\partial\gamma = p\delta_{M,-1}.\quad (3.26)$$

さて、次のものを計算すればよい。

$$\begin{aligned}[L_m, L_n] &= \oint dw \oint_w dz \mathcal{L}_m(z)\mathcal{L}_n(w), \\ \mathcal{L}_m(z) &= (1-m^2)\gamma^m\mathcal{L}_0(z) + \frac{m(m-1)}{2}\gamma^{m+1}\mathcal{L}_{-1}(z) + \frac{m(m+1)}{2}\gamma^{m-1}\mathcal{L}_{+1}(z).\end{aligned}\quad (3.27)$$

結果は、(3.22) と合っていて、central charge は、

$$\tilde{c} = 6kp,\quad (3.28)$$

となる。

また、実際に \mathcal{L}_m に J の形を代入して、 β, γ, ϕ で表すと、

$$\mathcal{L}_m = -\beta\gamma^{m+1} - \frac{1}{2}(m+1)\gamma^m\alpha_+\partial\phi - \frac{1}{2}(m+1)m\gamma^{m-1}k\partial\gamma.\quad (3.29)$$

これは、(A.21) と比べると、非常にもっともらしい形をしていることが分かる。

ここで、 p の意味を考えてみよう。

$$p = \log\gamma(z=0) - \log\gamma(z=e^{2\pi i})\quad (3.30)$$

なので、弦の巻き付き数と解釈できる。これは、対応する CFT、 $K3^{Q_1 Q_5}/S_{Q_1 Q_5}$ をターゲット空間とする small $\mathcal{N} = 4\sigma$ モデルの central charge $\tilde{c} = 6Q_1 Q_5$ と比べると $Q_1 = p$, $Q_5 = k$ となって良く合っている。

しかし次のような疑問がおこる。今は、 AdS_3 の中の重力理論として弦理論を考えていたはずである。つまり、今考えている弦は AdS_3 の中をただよっている、例えば重力子になるような弦で図 (3.1) の bulk string と書いてある弦である。一方、巻き付き数 Q_1 を持っている弦は背景の弦であり、無限遠の境界にある図 (3.1) の background string である。bulk string を考えていると、その巻きつき数として background string の巻き付き数と解釈すべきものが出てきてしまったわけである。

これは、次のように解釈できる。bulk string を考えているといっても background string と全く関係がない弦を考えているわけではない。bulk string と background string は、図 (3.1) のように相互作用があるわけで、それを調べたいわけである。それで、図を良く見ると bulk string と background string は、1 枚の世界面になっている。ようするに bulk string と background string は、別々のものではなく 1 つのものだったわけだから片方だけ調べるということは意味がなく、bulk string を調べていてもそれは background string も一緒に調べていることになる。

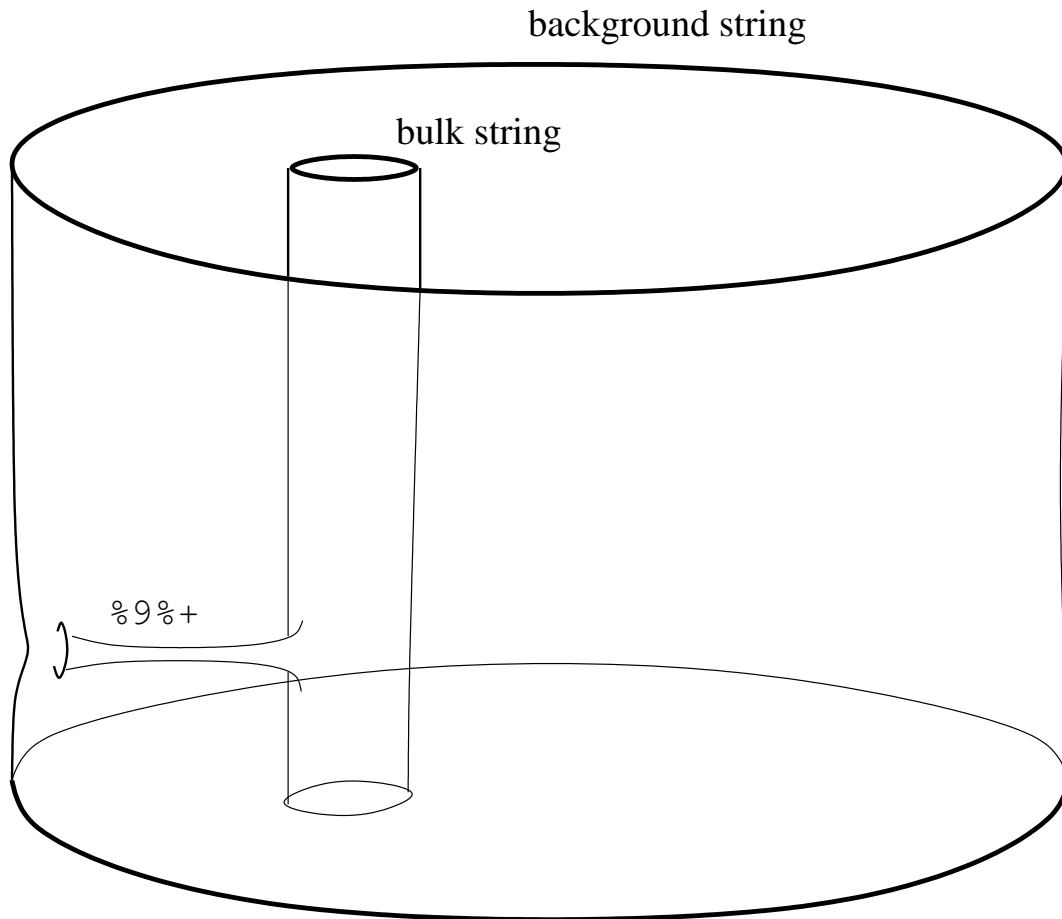


図 3.1: 背景の弦との関係。

さて、コンパクト多様体の方に目を向けよう。ターゲット空間が $AdS_3 \times G \times X$

というふうに群多様体 G を含んでいたとしよう。すると G をターゲット空間とする WZW 理論がある。また、時空の CFT にも G のカレントがあるはずである。ここでは、世界面のカレントから時空のカレントを作ってみよう。世界面のカレントを $K^a(z)$, ($a = 1, 2, \dots, \dim G$) でレベルを k_G とする。Kac-Moody 代数は、

$$K^a(z)K^b(w) = \frac{k_G/2}{(z-w)^2} \delta^{ab} + \frac{1}{z-w} i f^{ab}_c K^c(w). \quad (3.31)$$

さて、次のものは時空のグローバルな G の対称性の生成子である。

$$T_0^a = \oint dz K^a(z). \quad (3.32)$$

次の代数を満たす。

$$[T_0^a, T_0^b] = i f^{ab}_c T_0^c. \quad (3.33)$$

これを、次の Kac-Moody 代数を満たすように、 T_m^a , ($m \in \mathbf{Z}$) に広げたい。

$$[T_m^a, T_n^b] = i f^{ab}_c T_{m+n}^c + m \frac{\tilde{k}_G}{2} \delta^{ab} \delta_{m+n,0}. \quad (3.34)$$

結果は次のようにすればよい。

$$T_m^a = \oint dz (K^a \gamma^m)(z). \quad (3.35)$$

これは、 γ が時空の CFT の正則座標であることを考えると非常にもっともらしい。実際これは (3.34) を満たし、

$$\tilde{k}_G = k_G p, \quad (3.36)$$

になっている。さらに、時空の Virasoro との交換関係は、

$$[L_m, T_n^a] = -n T_{n+m}^a, \quad (3.37)$$

と正しい形になる。

3.3 超弦

さて、これから実際に超弦理論と境界上の SCFT の対応を見ていく。ここでは、超弦を Neveu-Schwarz-Ramond 形式で取り扱う [15]。

3.3.1 $AdS_3 \times G_1 \times G_2 \times \dots$ 中の超弦理論

G_1, G_2, \dots をコンパクトな単純群または、 $U(1)$ として、 $AdS_3 \times G_1 \times G_2 \times \dots$ 中の超弦理論は次のように記述できる [16]。まず、 $SL(2, R)$ のカレントから始めよう。レベル $k+2$ のボゾンのカレント \hat{J} を次のように Wakimoto 表示で表す。

$$\begin{aligned} \hat{J}^3 &= \beta\gamma + \sqrt{\frac{k}{2}} \partial\phi, \\ \hat{J}^- &= \beta, \\ \hat{J}^+ &= \beta\gamma^2 + \sqrt{2k} \partial\phi + (k+2) \partial\gamma, \end{aligned}$$

また、3つの free fermion ψ^A , ($A = 1, 2, 3$) を用意する。これが $\mathcal{N} = 1$ 超 Kac-Moody 代数のフェルミオン部分になる。

$$j^A = \sqrt{\frac{k}{2}} \psi^A. \quad (3.38)$$

また、次のような、レベル -2 のボゾンのなカレントを作る。

$$J_f^A = -\frac{i}{2} \varepsilon^A{}_{BC} \psi^B \psi^C. \quad (3.39)$$

そして、 $\mathcal{N} = 1$ 超 Kac-Moody 代数のボゾン部分は、

$$J^A = \hat{J}^A + J_f^A, \quad (3.40)$$

となる。代数は、

$$\begin{aligned} \psi^A(z) \psi^B(w) &\sim \frac{1}{z-w} \eta^{AB}, \\ J^A(z) \psi^B(w) &\sim \psi^A(z) J^B(w) \sim \frac{1}{z-w} i \varepsilon^{AB}{}_C j^C(w), \\ J^A(z) J^B(w) &\sim \frac{k/2}{(z-w)^2} \eta^{AB} + \frac{1}{z-w} i \varepsilon^{AB}{}_C j^C(w). \end{aligned}$$

また、 γ との OPE は、ボゾンの弦のときと同じである。

$$\begin{aligned} J^-(z) \gamma^n(w) &\sim \frac{1}{z-w} n \gamma^{n-1}, \\ J^3(z) \gamma^n(w) &\sim \frac{1}{z-w} n \gamma^n, \\ J^+(z) \gamma^n(w) &\sim \frac{1}{z-w} n \gamma^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

この部分のエネルギー-運動量テンソル、および超対称性のカレントは、

$$\begin{aligned} T^{(0)} &= \frac{1}{k} \eta_{AB} \hat{J}^A \hat{J}^B - \eta_{AB} \psi^A \partial \psi^B, \\ G^{(0)} &= \sqrt{\frac{2}{k}} \left(\eta_{AB} \psi^A \hat{J}^B - \frac{i}{6} \varepsilon_{ABC} \psi^A \psi^B \psi^C \right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

また、群多様体 G_I についても同様に $\mathcal{N} = 1$ の Kac-Moody 代数で表される。 G_I の次元を d_I 、dual Coxeter 数を \check{h}_I 、 $\mathcal{N} = 1$ の Kac-Moody 代数のレベルを k_I として、まず、レベル $(k - \check{h}_I)$ のボゾンのカレント $\hat{K}^{(I)}$ とフェルミオン $\chi^{(I)a}$, $a = 1, \dots, d_I$ を用意して、

$$\begin{aligned} K_f^{(I)a} &= -\frac{i}{2} f^a{}_{bc} \chi^{(I)b} \chi^{(I)c}, \quad a, b, c = 1, \dots, d_I, \\ K^{(I)a} &= \hat{K}^{(I)a} + K_f^{(I)a}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

この部分のエネルギー運動量テンソル、および超対称性のカレントは、

$$\begin{aligned} T^{(I)} &= \frac{1}{k_I} \delta_{ab} \hat{K}^{(I)a} \hat{K}^{(I)b} - \delta_{ab} \chi^{(I)a} \partial \chi^{(I)b}, \\ G^{(I)} &= \sqrt{\frac{2}{k_I}} \left(\delta_{ab} \chi^{(I)a} \hat{K}^{(I)b} - \frac{i}{6} f_{abc} \chi^{(I)a} \chi^{(I)b} \chi^{(I)c} \right), \end{aligned} \quad (3.44)$$

となる。これらをすべて合わせた物質場全体のエネルギー運動量テンソル、および超対称性のカレントは、

$$\begin{aligned} T_{\text{matter}} &= \sum_{I=0} T^{(I)}, \\ G_{\text{matter}} &= \sum_{I=0} G^{(I)}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

ここで $I=0$ は $G_0 = SL(2, R)$ に関するものとする。central charge は、

$$c = \sum_{I=0} \left(\frac{3}{2} - \frac{\check{h}_I}{k_I} \right) d_I. \quad (3.46)$$

critical string になるためには、これが 15 にならなければならない。特に、 $\sum_{I=0} d_I = 10$ (ターゲット空間が全部で 10 次元) とすると、

$$\sum_{I=0} \left(\frac{\check{h}_I d_I}{k_I} \right) = 0. \quad (3.47)$$

$\check{h}_0 = -2, d_0 = 3$ であることを考えると、

$$\frac{6}{k} = \sum_{I=1} \left(\frac{\check{h}_I d_I}{k_I} \right), \quad (3.48)$$

の関係式が得られる。

次のような OPE が得られる。

$$\begin{aligned} G_{\text{matter}}(z) \psi^A(w) &= \frac{1}{z-w} \sqrt{\frac{2}{k}} J^A(w), \\ G_{\text{matter}}(z) \chi^{(I)a}(w) &= \frac{1}{z-w} \sqrt{\frac{2}{k_I}} K^{(I)A}(w), \\ G_{\text{matter}}(z) \gamma^n(w) &= \frac{1}{z-w} \sqrt{\frac{2}{k}} n \gamma^n \left(-\psi^3 + \frac{1}{2} \psi^- \gamma + \frac{1}{2} \psi^+ \gamma^{-1} \right). \end{aligned} \quad (3.49)$$

BRST の形式で扱いたいので、ゴースト $b, c, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を入れる。 b, c は、フェルミオンの、 \mathbf{b}, \mathbf{c} は、ボゾンのである。OPE は、

$$b(z)c(w) \sim \frac{1}{z-w}, \quad \mathbf{b}(z)\mathbf{c}(w) \sim \frac{1}{z-w}. \quad (3.50)$$

BRST 電荷は、

$$\begin{aligned} Q_B &= \oint j_B(z), \\ j_B(z) &= c(T_{\text{matter}} + T_{\mathbf{bc}}) + \frac{1}{2} \mathbf{c} G + bc \partial c - \frac{1}{4} \mathbf{c}^2 b. \end{aligned} \quad (3.51)$$

ここで、 T_{bc} は、ボゾンのゴーストのエネルギー-運動量テンソルで、

$$T_{bc} = \frac{1}{2} \mathbf{c} \partial \mathbf{b} + \frac{3}{2} (\partial \mathbf{c}) \mathbf{b} \quad (3.52)$$

である。 \mathbf{b}, \mathbf{c} を次のように変換すると便利である。

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= e^{-\varphi} \partial \xi, \quad \mathbf{c} = -e^{\varphi} \eta, \\ \varphi(z) \varphi(w) &\sim -\log(z-w), \quad \eta(z) \xi(w) \sim \frac{1}{z-w}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

ただし、 φ はボゾンの、 η, ξ はフェルミオンのである。これらを使うとピクチャー変換演算子は次のようになる。

$$\{Q_B, \xi\} = \frac{1}{2} e^{\varphi} G_{\text{matter}} + c(\partial \xi) - \frac{1}{4} b e^{2\phi} \partial \eta - \frac{1}{4} \partial (b e^{2\phi} \eta) \quad (3.54)$$

時空の Virasoro 代数は、 (-1) -ピクチャーで、

$$L_m = -\sqrt{\frac{2}{k}} \oint dz e^{-\varphi} \left[(1-m^2) \psi^3 \gamma^m + \frac{m(m-1)}{2} \psi^- \gamma^{m+1} + \frac{m(m+1)}{2} \psi^+ \gamma^{m-1} \right]. \quad (3.55)$$

時空の Kac-Moody 代数は、 (-1) -ピクチャーで、

$$T_m^{(I)a} = \sqrt{\frac{2}{k_I}} \oint dz e^{-\varphi} \chi^{(I)a} \gamma^m. \quad (3.56)$$

0-ピクチャーでは、時空の Virasoro および、Kac-Moody は、

$$L_m = -\oint dz \left[(1-m^2) J^3 \gamma^m + \frac{m(m-1)}{2} J^- \gamma^{m+1} + \frac{m(m+1)}{2} J^+ \gamma^{m-1} \right]. \quad (3.57)$$

$$T_m^{(I)a} = \oint dz \gamma^m \left[K^a - m \sqrt{\frac{k_I}{k}} \chi^a \left(\psi^3 - \frac{1}{2} \psi^- \gamma - \frac{1}{2} \psi^+ \gamma^{-1} \right) \right]. \quad (3.58)$$

これらから、時空の central charge は、

$$\tilde{c} = 6kp. \quad (3.59)$$

時空の Kac-Moody のレベルは、

$$\tilde{k}_I = k_I p. \quad (3.60)$$

ここで、 p は、ボゾンの場合と同じで、

$$p = \oint dz \gamma^{-1} \partial \gamma, \quad (3.61)$$

である。

ここで、(3.48) 式を使うと、時空の次元が全部で 10 次元の時の時空の central charge と Kac-Moody のレベルの関係が分かる。

$$\frac{6^2}{\tilde{c}} = \sum_{I=1} \frac{\tilde{h}_I d_I}{\tilde{k}_I}. \quad (3.62)$$

さて、時空の次元が全部で 10 次元のときには、どのような場合があるか考えてみよう。 AdS_3 が 3 次元なので、 G_1, G_2, \dots は、7次元以下でなければならない。7次元以下のコンパクト、単純な群は、 $SU(2)$ のみである。したがって G_I として、許されるのは、 $SU(2)$ と $U(1)$ だけである。この組合せからは、次のようなものしかない。

1. $SL(2, R) \times U(1)^7$
2. $SL(2, R) \times SU(2) \times U(1)^4$
3. $SL(2, R) \times SU(2) \times SU(2) \times U(1)$

1. の場合は、(3.48) から $1/k = 0$ となってしまうて、 $k = \infty$ つまり AdS_3 の半径が ∞ になってしまい、単に平らな 3次元空間になってしまう。これは興味ある場合ではない。

2. の場合は、D1-D5 system の S 双対の near horizon 極限になっていて時空の CFT は small $\mathcal{N} = 4$ の超対称性を持つと思われる。

3. の場合は、 $SU(2)$ Kac-Moody が 2 つあるので時空の CFT は large $\mathcal{N} = 4$ の超対称性を持つと思われる。

2. 3. の場合については、次節以降詳しく調べ、時空の超対称性の生成子を求める。ここでは、時空の次元が全部で 10 次元にならない場合について考えよう。時空の次元が全部で D 次元であったとしよう。つまり、

$$\sum_{I=0} d_I = D. \quad (3.63)$$

すると critical であるための条件は、

$$\frac{6}{k} = \sum_{I=1} \frac{\tilde{h}_I d_I}{k_I} + \frac{3}{2}(10 - D). \quad (3.64)$$

まず $SL(2, R)$ のレベル k は、 $k > 2$ を満たさなければならない。したがって $0 < ($ 左辺) < 3 となる。一方ユニタリー性から $k_I, I \geq 1$ は、正の整数である。(右辺) $> \frac{3}{2}(10 - D)$ なので $D < 9$ の時は、無理である。 $D = 9$ の時は、 $2 < k < 4$ であって、古典的にすることは出来ない。 $D > 9$ の時は、うまくいく場合がある。

3.3.2 $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ の super string と small $\mathcal{N} = 4$ superconformal 代数

ターゲット空間が、 $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ のときは、時空の CFT は、small $\mathcal{N} = 4$ [17] になると思われる。この対称性の生成子が、世界面の理論でどうなるかを見てみたい [7]。

世界面上の $SL(2, \mathbb{R})$ のカレントを、 (J^A, ψ^A) , $(A = 1, 2, 3)$ で前節と同じようにする。世界面上の $SU(2)$ のカレントを、 (K^a, χ^a) , $(a = 1, 2, 3)$ でレベルを k' 、 $U(1)^4$ のカレントを、 $(\partial Y^i, \lambda^i)$, $(i = 1, \dots, 4)$ とする。前節でやったように、時空の Virasoro と $SU(2)$ Kac-Moody の生成子 L_m, T_m^a を作る事ができる。弦理論が critical になる条件から導かれる時空の central charge \tilde{c} と時空の $SU(2)$ Kac-Moody のレベル \tilde{k}' の関係 (3.62) は、

$$\tilde{c} = 6\tilde{k}' \quad (3.65)$$

となって、通常の small $\mathcal{N} = 4$ SCA の Jacobi 恒等式から導かれる関係と同じになっている。

さて、時空の超対称性の生成子を作ろう。通常の弦理論と同じようにスピン演算子をつくる。まず、次のようにすべてのフェルミオンをボゾン化する。

$$\partial H^1 = \psi^1 \psi^2, \quad \partial H^2 = \chi^1 \chi^2, \quad i\partial H^3 = \psi^3 \chi^3, \quad \partial H^4 = \lambda^1 \lambda^2, \quad \partial H^5 = \lambda^3 \lambda^4. \quad (3.66)$$

時空の超対称性の生成子は次のように作られる。

$$\begin{aligned} Q_{\{\epsilon\}} &= \oint dz e^{-\varphi/2} S_{\{\epsilon\}}(z), \\ S_{\{\epsilon\}}(z) &= \exp \left[\frac{i}{2} \sum \epsilon_I H^I \right], \\ \epsilon_I &= \pm 1, \quad I = 1, \dots, 5. \end{aligned} \quad (3.67)$$

もちろんこれらすべてが生き残るわけではない。次のような条件が課される。

1. GSO 条件。 $e^{-\varphi/2} S_{\{\epsilon\}}(z)$ 同士の OPE から $(z-w)$ の分数べきが出ない。ここから、 $\prod_{I=1}^5 \epsilon_I = 1$
2. BRS 条件。BRS カレントとの OPE で、 $(z-w)^{-1}$ の項が出ない。特に、BRS カレントと $S_{\{\epsilon\}}(z)$ の OPE で $(z-w)^{3/2}$ の項が出ない。ここから、 $\prod_{I=1}^3 \epsilon_I = 1$

これらの条件から、 Q は、 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_4$ でラベルされ、8 個あることが分かる。次のようになっている。

$$\begin{aligned} Q_{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_4} &= \oint dz e^{-\varphi/2} S_{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_4}(z), \\ S_{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_4} &= \exp \left[\frac{i}{2} (\epsilon_1 H_1 + \epsilon_2 H_2 + \epsilon_1 \epsilon_2 H_3 + \epsilon_4 H_4 + \epsilon_4 H_5) \right]. \end{aligned} \quad (3.68)$$

分かりやすいように次のように書く。

$$\begin{aligned} Q_r^i &= Q_{\epsilon_1=2r, \epsilon_2=i, \epsilon_4=+1}, \\ \bar{Q}_r^i &= Q_{\epsilon_1=2r, \epsilon_2=i, \epsilon_4=-1}, \\ r &= \pm \frac{1}{2}, \quad i = \pm 1. \end{aligned} \quad (3.69)$$

これを使うと、 $L_{0,\pm 1}, Q_{\pm 1/2}^{\pm}, \bar{Q}_{\pm 1/2}^{\pm}, T_0^{1,2,3}$ で、 $su(1,1|2)$ の代数を満たすことが分かる。

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n}, \\
[T_0^a, T_0^b] &= i\varepsilon^{abc}T^c, \\
[L_m, T_0^a] &= 0, \\
[L_m, Q_r^i] &= \left(\frac{1}{2}m - r\right) Q_{r+m}^i, \quad [L_m, \bar{Q}_r^i] = \left(\frac{1}{2}m - r\right) \bar{Q}_{r+m}^i, \\
[T_0^a, Q_r^i] &= -\frac{1}{2}\sigma_{ij}^a Q_r^j, \quad [T_0^a, \bar{Q}_r^i] = \frac{1}{2}\bar{\sigma}_{ij}^a \bar{Q}_r^j, \\
\{Q_r^i, Q_s^j\} &= \{\bar{Q}_r^i, \bar{Q}_s^j\} = 0, \\
\{Q_r^i, \bar{Q}_s^j\} &= 2\delta^{ij}L_{r+s} + 2\sigma_{ij}^a(r-s)T_0^a, \\
m, n &= 0, \pm 1, \quad r, s = \pm \frac{1}{2}, \quad a, b, c = 1, 2, 3, \\
\sigma^a &\text{ はパウリ行列。}\bar{\sigma}^a \text{ は } \sigma^a \text{ の成分ごとの複素共役。}
\end{aligned} \tag{3.70}$$

ただし、 $\{Q_r^i, \bar{Q}_s^j\}$ は、 (-1) -ピクチャーで出てくる。この代数を small $\mathcal{N} = 4$ SCA に拡大したい。 L_m, T_m^a , $m \in \mathbf{Z}$ については、もう出来ている。 Q_r^i, \bar{Q}_r^i , ($r \in \mathbf{Z} - \frac{1}{2}$) については、small $\mathcal{N} = 4$ SCA の中の式、

$$[L_m, Q_{-\frac{1}{2}}^i] = \frac{1}{2}(m+1)Q_{m-\frac{1}{2}}^i, \tag{3.71}$$

および $Q \rightarrow \bar{Q}$ にしたものを使って作ることができる。実際、次のようになる。

$$\begin{aligned}
Q_{m-\frac{1}{2}}^a &= \oint e^{-\varphi/2} \left[(1-m)\gamma^m S_{-\frac{1}{2}}^a + m\gamma^{m-1} S_{+\frac{1}{2}}^a \right], \\
\bar{Q}_{m-\frac{1}{2}}^a &= \oint e^{-\varphi/2} \left[(1-m)\gamma^m \bar{S}_{-\frac{1}{2}}^a + m\gamma^{m-1} \bar{S}_{+\frac{1}{2}}^a \right].
\end{aligned} \tag{3.72}$$

これが実際に次の small $\mathcal{N} = 4$ SCA を満たすことは、確かめられる。

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{\tilde{c}}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}, \\
[T_m^a, T_n^b] &= i\varepsilon^{abc}T_{m+n}^c + m\frac{\tilde{k}'}{2}\delta_{m+n,0}, \\
[L_m, T_n^a] &= nT_{m+n}^a, \\
[L_m, Q_r^i] &= \left(\frac{1}{2}m - r\right) Q_{r+m}^i, \quad [L_m, \bar{Q}_r^i] = \left(\frac{1}{2}m - r\right) \bar{Q}_{r+m}^i, \\
[T_m^a, Q_r^i] &= -\frac{1}{2}\sigma_{ij}^a Q_{m+r}^j, \quad [T_m^a, \bar{Q}_r^i] = \frac{1}{2}\bar{\sigma}_{ij}^a \bar{Q}_{m+r}^j, \\
\{Q_r^i, Q_s^j\} &= \{\bar{Q}_r^i, \bar{Q}_s^j\} = 0, \\
\{Q_r^i, \bar{Q}_s^j\} &= 2\delta^{ij}L_{r+s} + 2\sigma_{ij}^a(r-s)T_{r+s}^a + \frac{\tilde{c}}{3}\left(r^2 - \frac{1}{2}\right)\delta_{r+s,0}\delta^{ij}, \\
m, n &\in \mathbf{Z}, \quad r, s \in \mathbf{Z} - \frac{1}{2}, \quad a, b, c = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{3.73}$$

3.3.3 $AdS_3 \times S^3 \times S^3 \times S^1$ の super string と large $\mathcal{N} = 4$ superconformal 代数

ターゲット空間が、 $AdS_3 \times S^3 \times S^3 \times S^1$ のときは、時空の CFT は、large $\mathcal{N} = 4$ の対称性を持つと思われる。この理論に関しても、時空の対称性の生成子が世界面の理論でどうなっているか見てみる [18]。

世界面上の $SL(2, R)$ のカレントを、 (J^A, ψ^A) , ($A = 1, 2, 3$)、世界面上の 2 つの $SU(2)$ のカレントを、それぞれ、 $(K^{(1)a}, \chi^{(1)a})$, $(K^{(2)a}, \chi^{(2)a})$, ($a = 1, 2, 3$) でレベルを k_1, k_2 、また $U(1)$ のカレントを、 $(\partial Y, \lambda)$ とする。時空の Virasoro および Kac-Moody 代数の生成子は、前と同じように求まるので、それを $L_m, T_m^{(1)a}, T_m^{(2)a}$ とする。弦理論が critical になる条件 (3.48) から、

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}. \quad (3.74)$$

これから時空の central charge \tilde{c} と Kac-Moody のレベル $\tilde{k}_{1,2}$ の関係は、

$$\tilde{c} = \frac{6\tilde{k}_1\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2}. \quad (3.75)$$

となって、large $\mathcal{N} = 4$ の Jacobi 恒等式から導かれるものと等しい。

さて、超対称性の生成子を作ろう。やり方は前と全く同じである。フェルミオンをボゾン化する。

$$\begin{aligned} \partial H^1 &= \psi^1 \psi^2, \\ \partial H^2 &= \chi^{(1)1} \chi^{(1)2}, \\ \partial H^3 &= \chi^{(2)1} \chi^{(2)2}, \\ i\partial H^4 &= \left(\sqrt{\frac{k}{k_1}} \chi^{(1)3} + \sqrt{\frac{k}{k_2}} \chi^{(2)3} \right) \psi^3, \\ \partial H^5 &= \left(\sqrt{\frac{k}{k_2}} \chi^{(1)3} - \sqrt{\frac{k}{k_1}} \chi^{(2)3} \right) \cdot \lambda \end{aligned} \quad (3.76)$$

GSO 条件、BRS 条件を満たすスピン演算子は、次の 8 つである。

$$\begin{aligned}
S_{+++} &= \exp \left[\frac{i}{2} (+H^1 + H^2 + H^3 + H^4 + H^5) \right], \\
S_{+--} &= \exp \left[\frac{i}{2} (+H^1 - H^2 - H^3 - H^4 - H^5) \right], \\
S_{-++} &= \exp \left[\frac{i}{2} (-H^1 + H^2 + H^3 - H^4 + H^5) \right], \\
S_{---} &= \exp \left[\frac{i}{2} (-H^1 - H^2 - H^3 + H^4 - H^5) \right], \\
S_{+--} &= \sqrt{\frac{k}{k_1}} \exp \left[\frac{i}{2} (+H^1 - H^2 + H^3 - H^4 + H^5) \right] \\
&\quad + \sqrt{\frac{k}{k_2}} \exp \left[\frac{i}{2} (+H^1 - H^2 + H^3 + H^4 - H^5) \right], \\
S_{++-} &= \sqrt{\frac{k}{k_1}} \exp \left[\frac{i}{2} (+H^1 + H^2 - H^3 + H^4 - H^5) \right] \\
&\quad + \sqrt{\frac{k}{k_2}} \exp \left[\frac{i}{2} (+H^1 + H^2 - H^3 - H^4 + H^5) \right], \\
S_{--+} &= \sqrt{\frac{k}{k_1}} \exp \left[\frac{i}{2} (-H^1 - H^2 + H^3 + H^4 + H^5) \right] \\
&\quad + \sqrt{\frac{k}{k_2}} \exp \left[\frac{i}{2} (-H^1 - H^2 + H^3 - H^4 - H^5) \right], \\
S_{-+-} &= \sqrt{\frac{k}{k_1}} \exp \left[\frac{i}{2} (-H^1 + H^2 - H^3 - H^4 - H^5) \right] \\
&\quad + \sqrt{\frac{k}{k_2}} \exp \left[\frac{i}{2} (-H^1 + H^2 - H^3 + H^4 + H^5) \right].
\end{aligned} \tag{3.77}$$

超対称性の生成子を次のように決める。

$$Q_r^{ij} = i(2k)^{1/4} \oint dz e^{-\varphi/2} S_{2r,i,j}. \tag{3.78}$$

$L_m, T_0^{(I)a}, Q_r^{ij}$, ($m = 0, \pm 1$, $i, j = \pm 1$, $r = \pm 1/2$, $I = 1, 2$) で、次の $D(2|1; \alpha)$, ($\alpha =$

k/k_1) の代数を満たす。

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m - n)L_{m+n}, \\
[T_0^{(1)a}, T_0^{(1)b}] &= i\varepsilon^{abc}T^{(1)c}, \\
[T_0^{(2)a}, T_0^{(2)b}] &= i\varepsilon^{abc}T^{(2)c}, \\
[T_0^{(1)a}, T_0^{(2)b}] &= 0, \quad [L_m, T_0^{(1)a}] = 0, \\
[L_m, Q_r^{ij}] &= \left(\frac{1}{2}m - r\right) Q_{r+m}^{ij}, \\
[T_0^{(1)a}, Q_r^{ij}] &= \frac{1}{2}\sigma_{ik}^a Q_r^{kj}, \quad [T_0^{(2)a}, Q_r^{ij}] = \frac{1}{2}\sigma_{jk}^a Q_r^{ik}, \\
\{Q_r^{ij}, Q_s^{kl}\} &= 2\varepsilon^{ik}\varepsilon^{jl}L_{r+s} - 2(r - s)\left(\alpha\varepsilon^{jl}\sigma_{ik}^a T_0^{(1)a} + (1 - \alpha)\varepsilon^{ik}\sigma_{jl}^a T_0^{(1)a}\right), \\
m, n &= 0, \pm 1, \quad r, s = \pm \frac{1}{2}, \quad a, b, c = 1, 2, 3, \quad I = 1, 2, \\
\sigma^a &\text{ はパウリ行列。}\bar{\sigma}^a \text{ は } \sigma^a \text{ の成分ごとの複素共役。}
\end{aligned} \tag{3.79}$$

やはり、 $\{Q_r^{ij}, Q_s^{kl}\}$ は、(-1)-ピクチャーで出てくる。

前と同じようにして、large $\mathcal{N} = 4$ SCA に広げることができる。

また、これに対応する brane については、NS1-NS5 system であると考えられ、これについては [19][20] に M 理論の方から調べてある。

3.3.4 $AdS_3 \times (S^3 \times S^3 \times S^1)/Z_2$ の super string と $\mathcal{N} = 3$ super-conformal 代数

前の 2 節で調べたのは、 AdS_3 といくつかのコンパクト、単純群または $U(1)$ の積で全部あわせて 10 次元ターゲット空間となるを考えてきた。これらを踏まえて我々の新しい研究として、時空の CFT としてより小さな超対称性をもつものを考えるためにオービフォールドをターゲット空間とするようなものを考える。特に我々が得たのは、 $\mathcal{N} = 3$ の超対称性を持つような時空である [21]。

ターゲット空間としては、 $AdS_3 \times (S^3 \times S^3 \times S^1)/Z_2$ を考える。ただし、 Z_2 の作用は、 $S^3 \times S^3 \times S^1$ の座標を $(K^{(1)}, K^{(2)}, Y)$ として、

$$(K^{(1)}, K^{(2)}, Y) \rightarrow (K^{(2)}, K^{(1)}, -Y) \tag{3.80}$$

とする。処方、通常のオービフォールド上の弦理論と同じように、まず離散群で割る前の理論を考えそこに出てくる状態のうち、離散群の作用で不変なもののみを残すようにする。離散群で割る前の理論は前節で考えた、 $AdS_3 \times S^3 \times S^3 \times S^1$ をターゲット空間とする理論であり、2つの S^3 の半径が同じ、つまり2つの $SU(2)$ のレベルが同じ場合である。SU(2) のレベルを $k_1 = k_2 = k'$ とする。 Z_2 の作用で不変なのは、対角成分 $K^a = K^{(1)a} + K^{(2)a}$ であって、これから作った時空の Kac-Moody 代数、 $T_m^a = T_m^{(1)a} + T_m^{(2)a}$ が時空の $\mathcal{N} = 3$ SCA の SO(3) Kac-Moody 代数になる。そのレベルは、 $\tilde{k}_3 = \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 = 2k'p$ であり、また、 $k_1 = k_2 = k'$ の時の時空

の Virasoro の central charge は、 $\tilde{c} = 3k'p$ 、したがって、時空の central charge と Kac-Moody 代数のレベルの関係は、

$$\tilde{c} = \frac{3}{2}\tilde{k}_3 \quad (3.81)$$

となって、 $\mathcal{N} = 3$ SCA の Jacobi 恒等式から出てくる関係と同じになる。

次に超対称性の生成子を作ろう。ボゾン化は、(3.76) 式で、 $k_1 = k_2 = k'$ 、 $k = k'/2$ とおいたものであり、

$$\begin{aligned} \partial H^1 &= \psi^1 \psi^2, \\ \partial H^2 &= \chi^{(1)1} \chi^{(1)2}, \\ \partial H^3 &= \chi^{(2)1} \chi^{(2)2}, \\ i\partial H^4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi^{(1)3} + \chi^{(2)3}) \psi^3, \\ \partial H^5 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi^{(1)3} - \chi^{(2)3}) \lambda \end{aligned} \quad (3.82)$$

Z_2 の作用は、 H^2 と H^3 を入れ換え、その他は不変であることに注意する。GSO 条件、BRS 条件、 Z_2 不変を満たすスピン演算子は、(3.77) の中でも次の組合せである。

$$\begin{aligned} S_r^+ &= S_{2r,+,+}, \\ S_r^- &= S_{2r,-,-}, \\ S_r^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (S_{2r,+,-} + S_{2r,-,+}). \end{aligned} \quad (3.83)$$

具体的に書くと、

$$\begin{aligned} S_{+\frac{1}{2}}^\pm &= \exp \left[\frac{i}{2} (+H^1 \pm H^2 \pm H^3 \pm H^4 \pm H^5) \right], \\ S_{-\frac{1}{2}}^\pm &= \exp \left[\frac{i}{2} (-H^1 \pm H^2 \pm H^3 \mp H^4 \pm H^5) \right], \\ S_{+\frac{1}{2}}^0 &= \frac{1}{2} \left(\exp \left[\frac{i}{2} (+H^1 + H^2 - H^3 + H^4 - H^5) \right] + \exp \left[\frac{i}{2} (+H^1 + H^2 - H^3 - H^4 + H^5) \right], \right. \\ &\quad \left. + \exp \left[\frac{i}{2} (+H^1 - H^2 + H^3 + H^4 - H^5) \right] + \exp \left[\frac{i}{2} (+H^1 - H^2 + H^3 - H^4 + H^5) \right] \right), \\ S_{-\frac{1}{2}}^0 &= \frac{1}{2} \left(\exp \left[\frac{i}{2} (-H^1 + H^2 - H^3 - H^4 - H^5) \right] + \exp \left[\frac{i}{2} (-H^1 + H^2 - H^3 + H^4 + H^5) \right], \right. \\ &\quad \left. + \exp \left[\frac{i}{2} (-H^1 - H^2 + H^3 - H^4 - H^5) \right] + \exp \left[\frac{i}{2} (-H^1 - H^2 + H^3 + H^4 + H^5) \right] \right), \end{aligned} \quad (3.84)$$

超対称性の演算子は次のように決める。

$$Q_r^a = i(2k)^{1/4} \oint dz e^{-\varphi/2} S_r^a. \quad (3.85)$$

ここで、 L_m, T_0^a, Q_r^a , $m = 0, \pm 1$, $r = \pm 1/2$ は、次の $osp(3|2)$ の代数を満たす。

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m - n)L_{m+n}, \\
[T_0^a, T_0^b] &= i\varepsilon^{ab}{}_c T_0^c, \\
[T_0^a, Q_r^b] &= i\varepsilon^{ab}{}_c Q_r^c, \\
[L_m, Q_r^b] &= \left(\frac{1}{2}m - r\right) Q_{m+r}^b, \\
[L_m, T_0^a] &= 0, \\
\{Q_r^a, Q_s^b\} &= 2\delta^{ab}L_{r+s} + i\varepsilon^{ab}{}_c (r - s)T_0^c.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

前とおなじように、 $\{Q_r^a, Q_s^b\}$ は、 (-1) -ピクチャーで出てくる。

さらに、これは次の $\mathcal{N} = 3$ SCA に拡大する。

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m - n)L_{m+n} + \frac{\tilde{c}}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}, \\
[T_m^a, T_n^b] &= i\varepsilon^{ab}{}_c T_{m+n}^c + \frac{\tilde{k}_3}{2}m\delta_{m+n,0}\delta^{ab}, \\
[L_m, T_n^a] &= -nT_{m+n}^a, \\
[T_m^a, Q_r^b] &= i\varepsilon^{ab}{}_c Q_{m+r}^c + \delta^{ab}m\Psi_{m+r}, \\
[L_m, Q_r^b] &= \left(\frac{1}{2}m - r\right) Q_{m+r}^b, \\
\{Q_r^a, Q_s^b\} &= 2\delta^{ab}L_{r+s} + i\varepsilon^{ab}{}_c (r - s)T_{r+s}^c + \frac{1}{3}\tilde{c}\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{r+s,0}\delta^{ab}, \\
[L_m, \Psi_r] &= \left(-\frac{1}{2}m - r\right)\Psi_{m+r}, \\
[T_m^a, \Psi_r] &= 0, \\
\{Q_r^a, \Psi_s\} &= T_{r+s}^a, \\
\{\Psi_r, \Psi_s\} &= \frac{\tilde{k}_3}{2}\delta_{r+s,0}.
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Q_r^a , ($r \in \mathbf{Z} - 1/2$) は、前と同様に、 $[L_m, Q_{-\frac{1}{2}}^a] = \frac{1}{2}(m+1)Q_{m-\frac{1}{2}}^a$ を使って、また、 Ψ_r , ($r \in \mathbf{Z} - 1/2$) は、 $[T_m^0, Q_{-\frac{1}{2}}^0] = m\Psi_{m-\frac{1}{2}}$ の関係を使って求めることができる。

3.4 brane の配位

最後に near horizon 極限で $AdS_3 \times S^3 \times S^3 \times S^1$ や $AdS_3 \times (S^3 \times S^3 \times S^1)/Z_2$ になるような brane の配置を求めよう。この場合 M-theory で考えるのが便利である。

M-theory の M5-M5-M2 system を考えるとその near horizon 極限は $AdS_3 \times S^3 \times S^3 \times E^2$ になる [19][20]。これは、 E^2 を T^2 コンパクト化して片方のサイクルを非常に小さくすれば $AdS_3 \times S^3 \times S^3 \times S^1$ の IIA 理論になる。これに、orientifold plane をいれてオービフォルド化すれば $AdS_3 \times (S^3 \times S^3 \times S^1)/Z_2$ になる。以下これを詳細にみていくことにする。

3.4.1 M5-M5-M2 system

M5-M5-M2 system は、次のようなものである。

M5 ⁽¹⁾	0	1					6	7	8	9
M5 ⁽²⁾	0	1	2	3	4	5				
M2	0	1								10

表 3.1: M5-M5-M2 system

これは、10 方向を S^1 コンパクト化すれば、IIA 理論の NS5-NS5-NS1 system になる。

さて、M5-M5-M2 system の古典解の計量は次の形で与えられる。

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & H_T^{1/3} H_{F_1}^{2/3} H_{F_2}^{2/3} \left[(H_T H_{F_1} H_{F_2})^{-1} \{-(dx^0)^2 + (dx^1)^2\} \right. \\
 & \left. + H_{F_1}^{-1} \{(dx^2)^2 + \dots + (dx^5)^2\} + H_{F_2}^{-1} \{(dx^6)^2 + \dots + (dx^9)^2\} + H_T^{-1} (dx^{10})^2 \right].
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 H_{F_2} &= 1 + \frac{R_1^2}{r_1^2}, & H_{F_1} &= 1 + \frac{R_2^2}{r_2^2}, & H_T &= H_{F_1} H_{F_2}, \\
 r_1^2 &= (x^2)^2 + \dots + (x^5)^2, & r_2^2 &= (x^6)^2 + \dots + (x^9)^2.
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

R_1^2, R_2^2 はそれぞれの方向の M5-brane の枚数に比例する量である。

次に、near horizon 極限をとろう。near horizon 極限は、 $r_1 \ll R_1$ かつ $r_2 \ll R_2$ である。near horizon の計量は、

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \frac{R_1^2 R_2^2}{r_1^2 r_2^2} \{-(dx^0)^2 + (dx^1)^2\} \\
 & + \frac{R_1^2}{r_1^2} dr_1^2 + R_1^2 (d\Omega_3^{(1)})^2 + \frac{R_2^2}{r_2^2} dr_2^2 + R_2^2 (d\Omega_3^{(2)})^2 + (dx^{10})^2.
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

これが、 $AdS_3 \times S^3 \times S^3 \times E^2$ になっていることを確かめるには、次の座標変換 $(r_1, r_2) \rightarrow (u, v)$ をすればよい。

$$\begin{aligned}
 \frac{\ell^2}{u^2} &= \frac{R_1^2 R_2^2}{r_1^2 r_2^2}, & v &= \ell \left(\frac{R_1}{R_2} \log r_1 - \frac{R_2}{R_1} \log r_2 \right), \\
 \frac{1}{\ell^2} &= \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}.
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

すると、計量は、

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{u^2} (du^2 - (dx^0)^2 + (dx^1)^2) + R_1^2 (d\Omega_3^{(1)})^2 + R_2^2 (d\Omega_3^{(2)})^2 + dv^2 + (dx^{10})^2 \tag{3.92}$$

となって、 $AdS_3 \times S^3 \times S^3 \times E^2$ になっている。 AdS_3 , $S^{3(1)}$, $S^{3(2)}$ の半径は、それぞれ、 ℓ , R_1 , R_2 で、

$$\frac{1}{\ell^2} = \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \quad (3.93)$$

の関係を満たしている。これは、 $AdS_3 \times S^3 \times S^3 \times S^1$ 中の超弦理論を考えたときに出てきたレベルの関係

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (3.94)$$

と一致する。 E^2 方向は平らなので確かに T^2 コンパクト化できる。また、 x^{10} 方向は near horizon 極限をとる前から平らだったのでコンパクト化することが出来て IIA の NS5-NS5-NS1 system の古典解になる。

3.4.2 M5-O6-M2 system

次に near horizon 極限で $AdS_3 \times (S^3 \times S^3 \times R)/Z_2 \times R$ になるものとして、M5-O6-M2 system を考えよう。配位は Table 3.2、Figure 3.2 のようになる。

$M5^{(1)}$	0	1						6	7	8	9	
$M5^{(2)}$	0	1	2	3	4	5						
O6	0	1	/	/	/	/	/	/	/	/	/	10
M2	0	1										10

表 3.2: M5-O6-M2 system

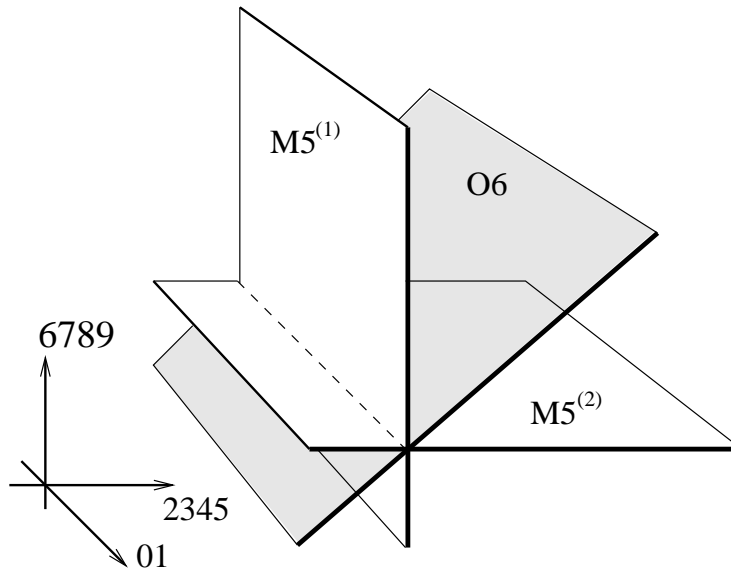


図 3.2: M5-O6-M2 system の様子。M5 の片方は鏡像。M2 は省略している

Table 3.2 の中の / (スラッシュ) の意味は、それが Figure 3.2 のように斜めに入っていることを示す。また、 $M5^{(2)}$ は、 $M5^{(1)}$ の O6 による鏡像であり独立な M5 の束は 1 束である。正確には、次のようにいうことができる。まず、座標変換 $x \rightarrow x'$ を行なう。

$$\begin{aligned} x'^p &= x^p, \quad p = 0, 1, 10, \\ x'^m &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^m + x^{m+4}), \quad (m = 2, 3, 4, 5), \\ x'^{m'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{m'-4} - x^{m'}), \quad (m' = 6, 7, 8, 9), \end{aligned} \quad (3.95)$$

このとき M5, M2 の配位は x 座標で見て Table 3.2 の通り、O6 の配位は、 x' 座標で見て 0 1 2 3 4 方向にのびている。

さて、古典解を考えたいのだが、ここでは単に M5-M5-M2 system で 2 束の M5 の数を同じにし、O6 が生成する Z_2 変換で割ったものを考える。M5-M5-M2 system で 2 つの M5 の数を同じにしたものの計量は、

$$\begin{aligned} ds^2 &= H_T^{1/3} H_{F1}^{2/3} H_{F2}^{2/3} \left[(H_T H_{F1} H_{F2})^{-1} \{ -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 \} \right. \\ &\quad \left. + H_{F1}^{-1} \{ (dx^2)^2 + \dots + (dx^5)^2 \} + H_{F2}^{-1} \{ (dx^6)^2 + \dots + (dx^9)^2 \} + H_T^{-1} (dx^{10})^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.96)$$

ここで、

$$\begin{aligned} H_{F2} &= 1 + \frac{R_1^2}{r_1^2}, \quad H_{F1} = 1 + \frac{R_1^2}{r_2^2}, \quad H_T = H_{F1} H_{F2}, \\ r_1^2 &= (x^2)^2 + \dots + (x^5)^2, \quad r_2^2 = (x^6)^2 + \dots + (x^9)^2. \end{aligned} \quad (3.97)$$

この計量は 2 束の M5 の入れ換えの Z_2 変換

$$x^m \rightarrow x^{m+4}, \quad x^{m+4} \rightarrow x^m; \quad (m = 2, 3, 4, 5), \quad (3.98)$$

で不変である。したがってこの Z_2 で割って作ったオービフォールドはやはり古典解である。特にこの Z_2 の固定面が O6 になる。

near horizon 極限をとろう。前と同様で $r_1 \ll R_1$ かつ $r_2 \ll R_1$ である。near horizon の計量は、

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{R_1^4}{r_1^2 r_2^2} \{ -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 \} \\ &\quad + \frac{R_1^2}{r_1^2} dr_1^2 + R_1^2 (d\Omega_3^{(1)})^2 + \frac{R_1^2}{r_2^2} dr_2^2 + R_1^2 (d\Omega_3^{(2)})^2 + (dx^{10})^2. \end{aligned} \quad (3.99)$$

やはり前と同じ座標変換 $(r_1, r_2) \rightarrow (u, v)$ をする。

$$\begin{aligned} \frac{\ell^2}{u^2} &= \frac{R_1^4}{r_1^2 r_2^2}, \quad v = \ell (\log r_1 - \log r_2), \\ \frac{1}{\ell^2} &= \frac{2}{R_1^2}. \end{aligned} \quad (3.100)$$

このとき、 Z_2 変換の作用で、 u は不変、 v は $v \rightarrow -v$ となることに注意する。near horizon の計量は、

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{u^2}(du^2 - (dx^0)^2 + (dx^1)^2) + R_1^2\{(d\Omega_3^{(1)})^2 + (d\Omega_3^{(2)})^2\} + dv^2 + (dx^{10})^2. \quad (3.101)$$

ここで、 x^{10} 方向は平らなので小さくコンパクト化することが出来る。すると、IIA 弦理論になり、そのターゲット空間は、 $AdS_3 \times (S^3 \times S^3 \times R)/Z_2$ になっている。 Z_2 の作用は最初に世界面の理論で考えたものと同じであり R も含めて Z_2 で割ることも自然である。また、半径の関係も正しく出ている。

さて、この計量を Z_2 の固定面、つまり $O6$ 上に制限してみよう。 Z_2 の固定面は、 $\Omega_3^{(1)} = \Omega_3^{(2)}$, $v = 0$ なので、 $d\Omega_3^{(1)} = d\Omega_3^{(2)}$, $dv = 0$ となり、この時、計量は、

$$ds^2|_{O6} = \frac{\ell^2}{u^2}(du^2 - (dx^0)^2 + (dx^1)^2) + 2R_1^2(d\Omega_3)^2 + (dx^{10})^2 \quad (3.102)$$

と書き表せる。 x^{10} 方向を小さいとすると、この空間は、 $AdS_3 \times S^3$ で、半径の自乗はそれぞれ、 ℓ^2 , $2R_1^2 = 4\ell^2$ となる。この AdS_3 を世界面の理論で出てきた $SL(2, R)$ とし、 S^3 が世界面の理論で出てきた、対角成分の $SU(2)$ であると考えるとレベルの比と半径の自乗の比がちょうどあっている。このことから、時空の CFT は固定面の付近の弦理論から作られると考えられる。

エピローグ

まとめ

本論で議論したことをまとめておく。

- まず、AdS/CFT 対応の一般論として、相関関数の対応を調べた。特に AdS の重力理論の質量と CFT の Conformal 次元の対応を見た。
- brane の near horizon 極限について調べ、それが D3, M2, M5, の場合には、 $AdS_{p+2} \times S^q$ になることを見た。そして、それぞれの場合の AdS/CFT 対応の仮説を述べた。
- 特に AdS_3 の場合を詳しく調べた。まず、 AdS_3 の対称性が、無限遠方では 2 次元の Conformal 対称性と同じ Virasoro 対称性に拡大することを見た。
- また、3次元の負の宇宙項を持つ重力理論が、Chern-Simons 理論で記述できること、そしてそれが、 $SL(2, \mathbb{R})$ の WZW モデルと等しいこと、さらに、Liouville 理論に reduce することを見た。
- D1-D5 system の near horizon 極限が $AdS_3 \times S^3 \times M^4$, ($M^4 = T^4$ or $K3$) になることを見た。また、対応する CFT が、 $\mathcal{N} = (4, 4)$ σ モデルで、ターゲット空間が $(M^4)^{Q_1 Q_5} / S_{Q_1 Q_5}$ であることを述べた。
- 実際に $M^4 = K3$ のときに $AdS_3 \times S^3 \times K3$ の中の重力理論と $(M^4)^{Q_1 Q_5} / S_{Q_1 Q_5}$ の σ モデルの状態を特にカイラルプライマリー状態について調べ、それらが完全に対応していることを見た。また、弦の排他原理についても見た。
- AdS_3 の中の弦の世界面の理論を調べた。まず、ボゾンの弦の理論を調べ、時空の Virasoro および Kac-Moody 代数の生成子がどのように表されるかを見た。しかも正しい central charge を得た。
- AdS_3 の中の超弦理論について考えた。そして、 $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ の場合は、時空の conformal 対称性として、small $\mathcal{N} = 4$ 対称性が出てくることを確かめた。
- さらに $AdS_3 \times S^3 \times S^3 \times S^1$ の中の超弦理論について調べ、時空の conformal 対称性として、large $\mathcal{N} = 4$ 対称性が出てくることを見た。

- 我々の新しい研究として、時空をオービフォルド化することにより、 $AdS_3 \times (S^3 \times S^3 \times S^1)/Z_2$ の中の超弦理論について調べ、この時空が対称性として $\mathcal{N} = 3$ conformal 対称性を持つことを解明した。
- large $\mathcal{N} = 4$ 対称性についてこれに対応するような brane の配位を M 理論の中で調べた。
- さらに我々は、 $\mathcal{N} = 3$ conformal 対称性を出すような brane の配位として、M 理論の新しい配位、M5-O5-M2 system に注目し、これが実際に near horizon 極限で $AdS_3 \times (S^3 \times S^3 \times S^1)/Z_2$ になることを示し、我々が世界面の理論で考えた時空が brane の配位として非常に自然に実現できることを示した。

今後の展望

特に、 AdS_3 の世界面の理論について。

$AdS_3 \times S^3 \times T^4$ の場合には、対応する時空の CFT が T^{4kp}/S_{kp} をターゲット空間とする small $\mathcal{N} = (4, 4)$ σ モデルであることが brane の世界体の理論から予想され、その対応関係もある程度調べられている [22] が、残りの 2 つ $AdS_3 \times S^3 \times S^3 \times S^1$ の場合と $AdS_3 \times (S^3 \times S^3 \times S^1)/Z_2$ の場合は対応する理論の conformal 対称性がどのようなものか分かっただけで具体的にどんな理論かはわかっていない。これを詳しく調べることによって何か新しい結果が得られることが期待される。

また、時空の central charge と Kac-Moody 代数のレベルの関係であるが、これは通常 Jacobi 恒等式から得られる。ところが、世界面の理論を考えると弦理論が critical になるべしという要請から決まってしまう。どうしてこうなるのかということも興味深いことである。

さらに、 $AdS_3 \times$ (コンパクト空間) のコンパクト空間の方を様々なオービフォルドにとって、さらに超対称性の低い理論を作ることも 1 つの課題である。

また、本論では [7] にしたがって、NSR 形式の超弦理論から時空の Superconformal 代数を見たが、[23] では、超群をターゲット空間とする弦理論、いわば GS 形式の超弦理論を考え、そこから Superconformal 代数を導き出している。この両者の関係も調べてみたい。

謝辞

植松恒夫先生、杉山勝之先生には、この論文のために議論していただき、また、貴重なお時間をさいて論文の校正をしていただきました。石本志高さんにもこの論文に関して議論していただきました。松田哲先生、青山秀明先生を始め、研究室の方々には普段から大変お世話になっています。京都大学理学部の素粒子論研究室の方々、および基礎物理研究所の方々には、この論文のきっかけとなった AdS のゼミを始め様々なゼミや勉強会に参加させていただきました。みなさんに感謝します。

付録A Anti de Sitter Space

ここでは Anti de Sitter 空間 (AdS) の幾何学的性質についてまとめる。本論では metric の符号の違う 2 種類の AdS — Lorentzian AdS と Euclidean AdS — を扱っている。また、 $(d+1)$ 次元の AdS を AdS_{d+1} のように表す。

A.1 AdS_{d+1}

A.1.1 Metric

平坦な $d+2$ 次元空間を考える。座標を $\{X^I\}$, ($I = 1, \dots, d+2$)。metric を

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{IJ} X^I X^J, \\ \eta_{IJ} &= \text{diag}(1, 1, \dots, 1, \pm 1, 1, -1). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

ここで、Euclidean AdS をつくるときは $\eta_{dd} = 1$ Lorentzian AdS をつくるときは $\eta_{dd} = -1$ とする。

AdS_{d+1} をこの空間のなかの曲面

$$\eta_{IJ} X^I X^J = -\ell^2$$

で定義し、 ℓ を半径とよぶ。この曲面を次のような変数 $r (\geq 0)$, x^m , ($m = 1, \dots, d$) を使ってパラメーター付けする。

$$\begin{aligned} r &= X_{d+1} + X_{d+2}, \\ x^m &= \frac{X^m \ell}{r}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

この時 induce される AdS_{d+1} の metric は

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{r^2} dr^2 + \frac{r^2}{\ell^2} \eta_{mn} dx^m dx^n. \quad (\text{A.3})$$

ここでは $r = \infty$ が境界である。

さらに次の座標もよく使う。上の座標から変数変換 $r \rightarrow u$, $u = \ell^2/r$, ($u > 0$) を行なうと metric は、

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{u^2} (du^2 + \eta_{mn} dx^m dx^n). \quad (\text{A.4})$$

ここでは $u = 0$ が boundary である。

A.1.2 Christoffel 記号、Ricci テンソル

(A.4) 式の metric を使って、Christoffel 記号、Ricci テンソルなどを求める。 $x^0 \equiv u$ と定義すると、

$$g_{\mu\nu} = \frac{\ell^2}{u^2} \eta_{\mu\nu}, \quad (\mu, \nu = 0, \dots, d). \quad (\text{A.5})$$

ここで、時空の次元は $d+1$ であり、Lorentzian のときは $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, -1)$ Euclidean のときは $\eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ である。

Christoffel 記号は

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = -\frac{1}{u} (\eta_{\mu 0} \delta^\rho{}_\nu + \eta_{\nu 0} \delta^\rho{}_\mu - \eta_{\mu\nu} \delta^\rho{}_0). \quad (\text{A.6})$$

Ricci テンソルは、

$$R_{\mu\nu} = -\frac{d}{u^2} \eta_{\mu\nu} = -\frac{d}{\ell^2} g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.7})$$

ところで、宇宙定数 Λ がある Einstein 方程式は、

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R - \Lambda) = 0. \quad (\text{A.8})$$

これを、変形すると、

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{d-1} \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.9})$$

これを (A.7) 式と比べると、 AdS_{d+1} は、宇宙定数

$$\Lambda = -\frac{(d-1)d}{\ell^2}. \quad (\text{A.10})$$

の Einstein 方程式の解になっていることが分かる。

A.1.3 Isometry

AdS_{d+1} には、Lorentzian のときには、 $SO(d, 2)$ 、Euclidean のときには、 $SO(d+1, 1)$ の isometry がある。これらは、それぞれ、平らな d 次元 Minkowski 空間、 d 次元 Euclid 空間の conformal 対称性と同型である。具体的に (A.4) 式の metric を使って書くと、

$$\text{並進 } P_m : \quad \delta x^m = \varepsilon^m, \quad \delta u = 0, \quad (\text{A.11})$$

$$\text{回転 } M_{mn} : \quad \delta x^m = \varepsilon^{mn} \eta_{mk} x^k, \quad \delta u = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$\text{dilation } D : \quad \delta x^m = \varepsilon x^m, \quad \delta u = \varepsilon u, \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \text{special conformal 変換 } K_m : \quad & \delta x^m = 2\varepsilon \cdot x x^m - \varepsilon^m (x \cdot x + u^2), \\ & , \delta u = 2\varepsilon \cdot x u, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

ここで、 $m, n, k = 1, \dots, d$ 、また、 $\varepsilon \cdot x = \eta_{mn} \varepsilon^m x^n$ 、 $x \cdot x = \eta_{mn} x^m x^n$ である。Killing ベクトルで書くと、

$$\begin{aligned} P_m &= -\frac{\partial}{\partial x^m}, \\ M_{mn} &= -\left[\eta_{mk} x^k \frac{\partial}{\partial x^n}, -\eta_{nk} x^k \frac{\partial}{\partial x^m} \right], \\ D &= -x^m \frac{\partial}{\partial x^m} - u \frac{\partial}{\partial u}, \\ K_m &= -2 \left[\eta_{mk} x^k x^n - \delta_m^n (x \cdot x + u^2) \right] \frac{\partial}{\partial x^n} - 2\eta_{mk} x^k \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

A.2 AdS_3

ここでは特に AdS_3 に関することをまとめる。Euclidean の場合と Lorentzian の場合は少し様子が違うので、分けて考える。

A.2.1 Lorentzian AdS_3

座標は (u, x^1, x^2) で、metric は、

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{u^2} [du^2 + (dx^1)^2 - (dx^2)^2]. \quad (\text{A.16})$$

$u = 0$ が boundary である。 $\gamma = x^1 + x^2$ 、 $\bar{\gamma} = x^1 - x^2$ とおいて、 $(u, \gamma, \bar{\gamma})$ で metric を書き直すと、

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{u^2} (du^2 + d\gamma d\bar{\gamma}). \quad (\text{A.17})$$

Killing ベクトルは、 $P_1, P_2, M_{12}, D, K_1, K_2$ の6つであつて、isometry は $SO(2, 2) \cong SL(2, R) \times SL(2, R)$ である。次のように組み直すと右回りと左回りに分かれる。

$$\begin{aligned} L_{-1} &= \frac{1}{2}(P_1 + P_2), \quad \bar{L}_{-1} = \frac{1}{2}(P_1 - P_2), \\ L_0 &= \frac{1}{2}(D + M_{12}), \quad \bar{L}_0 = \frac{1}{2}(D - M_{12}), \\ L_1 &= \frac{1}{2}(K_1 - K_2), \quad \bar{L}_1 = \frac{1}{2}(K_1 + K_2). \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

そうすると、

$$\begin{aligned} L_{-1} &= -\frac{\partial}{\partial \gamma}, \\ L_0 &= -\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{2} u \frac{\partial}{\partial u}, \\ L_1 &= -\gamma^2 \frac{\partial}{\partial \gamma} - \gamma u \frac{\partial}{\partial u} + u^2 \frac{\partial}{\partial \bar{\gamma}}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$\bar{L}_{0,\pm 1}$ は上の式で、 $\gamma \leftrightarrow \bar{\gamma}$ としたものである。交換関係は、

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n}, \\ [\bar{L}_m, \bar{L}_n] &= (m-n)\bar{L}_{m+n}, \\ [L_m, \bar{L}_n] &= 0. \end{aligned} \tag{A.20}$$

ただし、 $m, n = 0, \pm 1$ である。この代数を一般の L_m, \bar{L}_m , $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ に次のように拡張する。

$$L_m = -\gamma^{m+1} \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{2}(m+1)\gamma^m u \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2}(m+1)m\gamma^{m-1}u^2 \frac{\partial}{\partial \bar{\gamma}}. \tag{A.21}$$

\bar{L}_m は $\gamma \leftrightarrow \bar{\gamma}$ の置換えをしたものである。これは、確かに (A.20) の代数を満たす。ただし、 $m = 0, \pm 1$ 以外は、isometry ではない。 εL_m による metric の変化は、

$$\delta(ds^2) = -\varepsilon \frac{1}{2}(m+1)m(m-1)\gamma^{m-2}d\gamma^2. \tag{A.22}$$

これは、boundary 付近 ($u \rightarrow 0$) では、metric の他の項に比べて小さいので、ほとんど、isometry に近いといえる。

A.2.2 Euclidean AdS_3

Lorentzian の時と同様にして、座標は (u, x^1, x^2) で、metric は、

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{u^2}[du^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2]. \tag{A.23}$$

$u = 0$ が boundary である。 $\gamma = x^1 + ix^2$, $\bar{\gamma} = x^1 - ix^2$ とおいて、 $(u, \gamma, \bar{\gamma})$ で metric を書き直すと、

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{u^2}(du^2 + d\gamma d\bar{\gamma}). \tag{A.24}$$

isometry は、 $SO(3,1) \cong SL(2;C)$ であるが、それを見るには、次の置き換えをする。

$$\begin{aligned} L_{-1} &= \frac{1}{2}(P_1 - iP_2), \quad \bar{L}_{-1} = \frac{1}{2}(P_1 + iP_2), \\ L_0 &= \frac{1}{2}(D - iM_{12}), \quad \bar{L}_0 = \frac{1}{2}(D + iM_{12}), \\ L_1 &= \frac{1}{2}(K_1 + iK_2), \quad \bar{L}_1 = \frac{1}{2}(K_1 - iK_2). \end{aligned} \tag{A.25}$$

killing ベクトルで書いたもの、交換関係は、(A.19)、(A.20) と形式的に同じである。ただし、「実際の」変換においては、実数の座標の変分は実数にならないといけなないので、無限小変換の生成子は a を無限小複素パラメータとして、 $aL_m + \bar{a}\bar{L}_m$ のよ

うになる¹。一般の Virasoro への拡張は、Lorentzian の場合 (A.21) と同様であり、 $aL_m + \bar{a}\bar{L}_m$ による、metric の変化は、

$$\delta(ds^2) = -a\frac{1}{2}(m+1)m(m-1)\gamma^{m-2}d\gamma^2 - \bar{a}\frac{1}{2}(m+1)m(m-1)\bar{\gamma}^{m-2}d\bar{\gamma}^2 \quad (\text{A.26})$$

となる。

¹通常の CFT の formalism では、 γ と $\bar{\gamma}$ を独立な複素変数として扱い、あたかも $SL(2;C)$ が 2 つあるかのように定式化する。

付録B 10, 11次元 Supersymmetry

B.1 10, 11次元 Spinor

B.1.1 9次元 Dirac 行列 (Euclidean)

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = 2\delta^{ij} \quad i, j = 1, \dots, 9 \quad (\text{B.1})$$

次のような表示をとる。

$$\begin{aligned} \gamma^1 &= \epsilon \otimes \epsilon \otimes \epsilon \otimes \epsilon \\ \gamma^2 &= 1_2 \otimes \tau_1 \otimes \epsilon \otimes \epsilon \\ \gamma^3 &= 1_2 \otimes \tau_1 \otimes \epsilon \otimes \epsilon \\ \gamma^4 &= \tau_1 \otimes \epsilon \otimes 1_2 \otimes \epsilon \\ \gamma^5 &= \tau_1 \otimes \epsilon \otimes 1_2 \otimes \epsilon \\ \gamma^6 &= \epsilon \otimes 1_2 \otimes \tau_1 \otimes \epsilon \\ \gamma^7 &= \epsilon \otimes 1_2 \otimes \tau_1 \otimes \epsilon \\ \gamma^8 &= 1_2 \otimes 1_2 \otimes 1_2 \otimes \tau_1 \\ \gamma^9 &= 1_2 \otimes 1_2 \otimes 1_2 \otimes \tau_1 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

ここで,

$$\begin{aligned} \epsilon &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \tau_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \tau_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ 1_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

である。また

$$\gamma^9 = \gamma^1 \dots \gamma^8 \quad (\text{B.4})$$

の関係がある。

この表示の特徴は、

1. 成分ごとに実数
2. 対称行列

である。

B.1.2 10, 11次元 Dirac 行列 (Mincovski)

9次元の Dirac 行列を使って 10, 11次元の Dirac 行列は次のように作れる。今後、特に断らない限り、

$$i, j = 1, \dots, 9, \quad \mu, \nu = 0, \dots, 9, \quad M, N = 0, \dots, 9, 11$$

$$\Gamma^i = \gamma^i \otimes \tau_1 \tag{B.5}$$

$$\Gamma^0 = 1_{16} \otimes \epsilon \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{11} &= \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^9 \\ &= 1_{16} \otimes \tau_3 \end{aligned} \tag{B.7}$$

このとき確かに、

$$\{\Gamma^M, \Gamma^N\} = 2\eta^{MN}, \quad \eta^{MN} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1) \tag{B.8}$$

この表示の特徴は、

1. 成分ごとに実数
2. Γ^i, Γ^{11} は対称行列, Γ^0 は反対称行列。
3. 奇数個の Γ^μ の積は $\left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ * & 0 \end{array} \right)$ の形, 偶数個の積は $\left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ 0 & * \end{array} \right)$ の形。

である。

10, 11次元の Dirac spinor は複素 32 成分である。

B.1.3 Majorana spinor

この表示では C matrix は

$$C = \Gamma^0 \tag{B.9}$$

とできる。実際

$$C^\dagger C = 1 \quad C^T = -C \quad C\Gamma^M C^\dagger = -(\Gamma^M)^T \tag{B.10}$$

charge conjugation は次のようになる。

$$\begin{aligned} \psi^c &= C\bar{\psi}^T \\ &= C(\Gamma^0)^T \psi^* \\ &= \psi^* \end{aligned} \tag{B.11}$$

Majorana spinor は $\psi^c = \psi$ なので、いまの表示では成分ごとに実数、したがって、Majorana spinor は実 32 成分である。

関連図書

- [1] E.Witten, *Anti de Sitter Space and Holography*, hep-th/9802150.
- [2] S.S.Gubser, I.R.Klebanov, and A.M.Polyakov, *Gauge Theory from Non-Critical String Theory*, hep-th/9802109.
- [3] J. Maldacena, *The Large N Limit of Superconformal field theories and supergravity*, hep-th/9711200.
- [4] N.Seiberg and E.Witten, *Comments on String Dynamics in Six Dimensions*, Nucl. Phys. **B471** (1996) 121–134.
- [5] J.D.Brown and M.Henneaux, *Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three Dimensional Gravity*, Commun. Math. Phys. **104** (1986) 207–226.
- [6] A.Strominger, *Black Hole Entropy from Near-Horizon Microstates*, hep-th/9712251.
- [7] A. Giveon, D. Kutasov, and N. Seiberg, *Comments on String Theory on AdS_3* , hep-th/9806194.
- [8] K.Behrndt, I.Brunner, and I.Gaida, *AdS_3 Gravity and Conformal Field Theories*, hep-th/9806195.
- [9] O. Coussaert, M. Henneaux, and P. van Driel, *The asymptotic dynamics of three-dimensional Einstein gravity with a negative cosmological constant*, hep-th/9506019.
- [10] J. de Boer, *Six-Dimensional Supergravity on $S^3 \times AdS_3$ and 2d Conformal Field Theory*, hep-th/9806104.
- [11] J. de Boer, *Large N Elliptic Genus and AdS/CFT Correspondence*, hep-th/9812240.
- [12] L.Göttsche and W.Soergel, *Perverse Sheaves and the Cohomology of Hilbert Scheme of Smooth Algebraic Surfaces*, Math. Ann. **296** (1993) 235.
- [13] J. Maldacena and A. Strominger, *AdS_3 Black Holes and a Stringy Exclusion Principle*, hep-th/9804085.

- [14] D.Gepner and E.Witten, *String Theory on Group Manifolds*, Nucl. Phys. **B278** (1986) 493–549.
- [15] E. Friedan, E. Martinec, and S. Shenker, *Conformal Invariance, Supersymmetry and String Theory*, Nucl. Phys. **B271** (1986) 93–165.
- [16] Y.Kazama and H.Suzuki, *New $N=2$ Superconformal Field Theories and Superstring Compactification*, Nucl. Phys. **B321** (1989) 232–268.
- [17] A.Schwimmer and N.Seiberg, *Comments on the $N=2,3,4$ Superconformal Algebras in Two Dimensions*, Nucl. Phys. **B332** (1990) 146–168.
- [18] S.Elitzur, O.Feinerman, A.Giveon, and D.Tsabar, *String theory on $AdS_3 \times S^3 \times S^3 \times S^1$* , hep-th/9811245.
- [19] H.J.Boonstra, B.Peeters, and K.Skenderis, *Brane Intersections, Anti-de Sitter Spacetimes and Dual Superconformal Theories*, hep-th/9803231.
- [20] J.P.Gauntlett, R.C.Myers, and P.K.Townsend, *Supersymmetry of Rotating Branes*, hep-th/9809065.
- [21] S.Yamaguchi, Y.Ishimoto, and K.Sugiyama, preprint to appear.
- [22] K.Hosomichi and Y.Sugawara, *Hilbert Space of Space-time SCFT in AdS_3 Superstring and T^{4kp}/S_{kp} SCFT*, hep-th/9812046.
- [23] K.Ito, *Extended Superconformal Algebras on AdS_3* , hep-th/9811002.