力学１演義 問題　第 5 回

1. xy 平面上で方程式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ (a,b$ は正の定数) で表される楕円は、点 $(x,y)=(a,0)$ 付近では、放物線でよく近似されることを示せ。（ヒント：$x=a-\xi$ とおいて、$|\xi|\ll a$ として近似せよ。）

2. 2 次元平面上で極座標系 (r,φ) を考える。この極座標系と直交座標系 (x,y) とは、
$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi$$
の関係がある。各点で r 方向、φ 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{e}_r,\ \mathbf{e}_\varphi$ とする。質量 m の質点が力 $\mathbf{F}=F_r\mathbf{e}_r+F_\varphi\mathbf{e}_\varphi$ を受けて運動するときの運動方程式が次のように書けることを示せ。
$$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=F_r,$$
$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})=F_\varphi.$$

3. 太陽（質量 M）からの万有引力を受けて運動する惑星（質量 m）を考える。万有引力定数を G とする。惑星は平面上を運動するので太陽を中心として 2. のような極座標をとって考える。
   (a) 2. の結果を使って運動方程式を書け。また、$h=r^2\dot{\varphi}$ が時間変化しないことを示せ。
   (b) まず r と φ の関係を調べたい。次のような微分方程式が成り立つことを示せ。
   $$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)-\frac{1}{r}=-\frac{1}{l}$$
   ただし $l=\frac{h^2}{GM}$ とした。
   (c) 上の微分方程式の解は、e,α を定数として
   $$r=\frac{l}{1+e\cos(\varphi+\alpha)}$$
   と書けることを示せ。（ヒント：$u=l/r$ として微分方程式を書き換えよ。）

4. 3.(c) で求めた解のエネルギー E を m,h,e,l を使って表せ。ただし無限遠点を位置エネルギーの基準とせよ。また軌道が周期的になるのは E どの範囲にある場合か？

※問題等置いています。

http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~yamaguch/j/class.html