力学１演義 問題　第６回

1. 質点に働く力 $\mathbf{F}$ が保存力であって $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$ と与えられている。この質点が原点 0 から $\mathbf{r}_1$ まで動いたときにこの力がする仕事は経路によらず

$$W = \int_0^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(0) - U(\mathbf{r}_1)$$

と与えられることを示せ。

2. 2 次元平面上で極座標系 (r, φ) を考える。この極座標系と直交座標系 (x, y) とは、

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

の関係がある。各点で r 方向、φ 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ とする。

(a) $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ を直交座標の成分で表せ。

(b) $\dot{\mathbf{e}_r}$, $\dot{\mathbf{e}_\varphi}$ を $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ の基底を用いて表せ。

(c) 速度を $\dot{\mathbf{r}} = v_r\mathbf{e}_r + v_\varphi\mathbf{e}_\varphi$ と書いたとき、v_r, v_φ を求めよ。

(d) 加速度を $\ddot{\mathbf{r}} = a_r\mathbf{e}_r + a_\varphi\mathbf{e}_\varphi$ と書いたとき、a_r, a_φ を求めよ。

(e) 質量 m の質点が力 $\mathbf{F} = F_r\mathbf{e}_r + F_\varphi\mathbf{e}_\varphi$ を受けて運動するときの運動方程式が次のように書けることを示せ。

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= F_r, \\ m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) &= F_\varphi. \end{aligned}$$

3. ３次元空間内を動く質点に働く力のポテンシャルが $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ と z のみによる場合、角運動量の z 成分 $L_z = (\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}})_z$ は保存することを次のようにして示せ。

(a) 2. の座標と z を合わせて、r, φ, z という座標（円筒座標）を採用し、それぞれの方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ とする。$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\varphi$ を示せ。

(b) $L_z = mr^2\dot{\varphi}$ と書けることを示せ。

(c) $F_\varphi = 0$ であることを示し、$\dot{L}_z = 0$ を示せ。

裏に続く

4. 3 次元平面上で極座標系 (r, θ, φ) を考える。この極座標系と直交座標系 (x, y, z) とは、

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta$$

の関係がある。各点で r 方向、θ 方向、φ 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ とする。

(a) $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ を直交座標の成分で表せ。

(b) $\dot{\mathbf{e}_r}$, $\dot{\mathbf{e}_\theta}$, $\dot{\mathbf{e}_\varphi}$ を $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ の基底を用いて表せ。

(c) 速度を $\dot{\mathbf{r}} = v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta + v_\varphi\mathbf{e}_\varphi$ と書いたとき、v_r, v_θ, v_φ を求めよ。

(d) 加速度を $\ddot{\mathbf{r}} = a_r\mathbf{e}_r + a_\theta\mathbf{e}_\theta + a_\varphi\mathbf{e}_\varphi$ と書いたとき、a_r, a_θ, a_φ を求めよ。