

力学1 演義 問題 第3回

1. オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ と指数関数の和の公式 $e^{i\alpha+i\beta} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$ を用いて、 \cos と \sin に対する和の公式

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

を導け。

2. $x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{a}{x}$ (k, a は正の定数) を考える。
- (a) この関数を最小とする x の値 x_0 と最小値 $f(x_0)$ を求めよ。
 - (b) この関数のグラフの概形を描け。
 - (c) $f(x)$ を $x = x_0$ のまわりで $(x - x_0)^2$ のオーダーまで Taylor 展開せよ。
3. バネ定数 k のフックの法則に従うバネにつながれた、質量 m の質点の運動を考える。質点は x 軸上を動くとし、つり合いの位置を $x = 0$ とする。質点はバネ以外からは力を受けないとする。
- (a) 運動方程式を書け。
 - (b) 時刻 $t = 0$ で質点は $x = a$ の位置にいて速度が 0 であったとする。時刻 t での質点の位置を求めよ。
 - (c) 質点の位置が $x = 0$ に来た時の質点の速さ (速度の大きさ) を求めよ。
4. 3. と同じようにバネにつながれた質点を考える。今度は、バネ以外に一定の外力 $f > 0$ を x 軸の正の方向に受けている。
- (a) 時刻 $t = 0$ での位置、速度がそれぞれ $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ であったとき、時刻 t における位置 $x(t)$ を求めよ。
 - (b) $x(t)$ の最大値、 a を求めよ。
 - (c) $t = T$ のとき、質点は x の最大値、 $x = a$ にいるとする。このとき、突然一定の外力が消えた。この後の質点の運動 (時刻 $t > T$ における位置) を求めよ。