

力学1 演義 問題 第7回

1. xy 平面上で方程式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, (a, b は正の定数) で表される楕円は、点 $(x, y) = (a, 0)$ 付近では、放物線によく近似されることを示せ。(ヒント: $x = a - \xi$ とおいて、 $|\xi| \ll a$ として近似せよ。)
2. 太陽 (質量 M) からの万有引力を受けて運動する惑星 (質量 m) を考える。万有引力定数を G とする。惑星は平面上を運動するので太陽を中心として第6回の2. のような極座標をとって考える。

(a) 第6回の2.の結果を使って運動方程式を書け。また、 $h = r^2\dot{\varphi}$ が時間変化しないことを示せ。

(b) まず r と φ の関係を調べたい。次のような微分方程式が成り立つことを示せ。

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right) - \frac{1}{r} = -\frac{1}{l}$$

ただし $l = \frac{h^2}{GM}$ とした。

(c) 上の微分方程式の解は、 e, α を定数として

$$r = \frac{l}{1 + e \cos(\varphi + \alpha)}$$

と書けることを示せ。(ヒント: $u = l/r$ として微分方程式を書き換えよ。)

3. 2.(c) で求めた解のエネルギー E を m, h, e, l を使って表せ。ただし無限遠点を位置エネルギーの基準とせよ。また軌道が周期的になるのは E どの範囲にある場合か?
4. 空に向かって物体を投げ上げ、地球の重力圏外に脱出させるためには、最低いくらの初速度を与えなければならないか。地球の質量を M 、重力定数を G 、地球の半径を R とする。空気抵抗等は無視する。