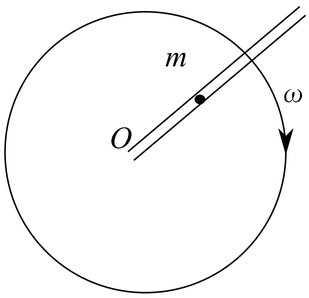
力学１演義 問題　第９回

1. 図のように、十分長くて細いパイプに入った質点がある。この質点はパイプに沿った方向には滑らかに動くことができる。このパイプをパイプ上の一点 O を中心として角速度 ω で水平に回転させる。時刻 t での質点の O からの距離を $r(t)$ とする。
   (a) 質点の質量を m として $r(t)$ に対する運動方程式を書き表せ。
   (b) 時刻 $t=0$ で $r(0)=r_0,\ \dot{r}(0)=0$ のとき、時刻 t での r を求めよ。



2. 次の連立微分方程式を考える。

$$\mathbf{r}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix},\qquad K=\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix},$$
$$\ddot{\mathbf{r}}=K\mathbf{r} \tag{1}$$

この微分方程式を次のようにして解くことを考えよう。

(a) $\mathbf{0}$ でない、あるベクトル $\mathbf{e}$ に対して、スカラー λ が存在して

$$K\mathbf{e}=\lambda\mathbf{e} \tag{2}$$

が、成り立っていたとする。このとき λ を求めよ (解は２つ存在する)。このような λ は K の固有値と呼ばれる。またこのときの $\mathbf{e}$ は固有ベクトルと呼ばれる。

(b) 上で求めた２つの解を $\lambda_1,\ \lambda_2\ (\lambda_1>\lambda_2)$ とし、それぞれの固有値に対する固有ベクトル $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ とする。$\mathbf{e}_1=\binom{1}{a_1},\ \mathbf{e}_2=\binom{1}{a_2}$ としたとき、a_1,a_2 を求めよ。

(c) $\mathbf{r}(t)=u(t)\mathbf{e}_1+v(t)\mathbf{e}_2$ と書き表したとき $u(t),v(t)$ に対する微分方程式を導け。この方程式はよく知っている解ける形になっているはずである。

3. 図のように自然長 ℓ、バネ定数 k のバネでつなげられた二つの質点 1,2 （質量はそれぞれ m_1, m_2）を水平で滑らかな床面に置く。

(a) 図の右向きに x 軸をとり、質点 1,2 の位置をそれぞれ x_1, x_2 とする。運動方程式を書け。

(b) 重心の位置を X、2 つの質点の相対位置を $x = x_2 - x_1$ とする。上の運動方程式から X, x に対する運動方程式を求めよ。

(c) 最初、質点を手で持って間の距離を a まで引き延ばし、時刻 $t = 0$ で静かに同時に放した。時刻 t での二つの質点の距離を求めよ。

4. 図のように単位長さあたりの質量 ρ で長さ ℓ のひもを、なめらかで水平な机の上から垂らす。最初、机の端から垂れ下がっている部分の長さが a になっている状態で、ひもの左端を手で持って静かに放した。するとひもはすべり落ち出した。垂れ下がっている部分の長さが x, $(a < x < \ell)$ のときのひもの速さを求めよ。ただし、重力加速度を g とし、摩擦等は無視する。