電磁気学２　レポート問題　第３回

担当：山口　哲

提出締め切り：2015 年 11 月 20 日金曜日

一定の速度 $\mathbb{v}$ で等速直線運動をする荷電粒子（電荷 q）について考える。

1. この粒子が作る電場、磁場を求めよ。（余裕があれば、等速でない場合についても求めよ。）

   ヒント：　まず、講義中にやったように電磁ポテンシャル $\mathbb{A},\phi$ を求める。それを微分すれば電場、磁場が求まる。注意するのは、t' が $\mathbb{r},t$ に依存していることである。なので、まず $\partial_t t', \nabla t'$ を計算し、さらに $\partial_t s, \nabla s$ も計算しておくとよい。最後に $\mathbb{E},\mathbb{B}$ を計算する。途中の式は以下のとおり（間違いを含んでいるかもしれないので必ず自分でチェックすること）。

$$
\begin{aligned}
\partial_t t' &= \frac{1}{1-\mathbb{n}\cdot\beta} = \frac{R}{s},\\
c\nabla t' &= -\frac{\mathbb{n}}{1-\mathbb{n}\cdot\boldsymbol{\beta}} = -\frac{\mathbb{R}}{s},\\
\partial_t s/c &= \alpha\frac{R}{s},\\
&\quad \alpha := -\mathbb{n}\cdot\boldsymbol{\beta} + \beta^2 - \frac{1}{c}\mathbb{R}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}},\\
\nabla s &= \mathbb{n} - \boldsymbol{\beta} - \alpha\frac{\mathbb{R}}{s}.
\end{aligned}
$$

   ただし、等速度の場合は $\dot{\boldsymbol{\beta}} = 0$ である。最終的な答えは授業中に書いたもので $\dot{\boldsymbol{\beta}} = 0$ とおいたものに等しい。しつこいようだが、間違いを含んでいるかもしれないので必ず自分でチェックすること。

2. 具体的に $\mathbb{v} = (v, 0, 0)$ とし、粒子は $t = 0$ で原点を通過したとする。このときの電磁ポテンシャルを $\phi(\mathbb{r},t), \mathbb{A}(\mathbb{r},t)$ が、静止している荷電粒子の静電ポテンシャル $\phi^{(0)}(x,y,z)$ を用いてとすると

$$
\phi(\mathbb{r},t) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\phi^{(0)}\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, y, z\right), \tag{1}
$$

$$
\mathbb{A}(\mathbb{r},t) = \frac{\boldsymbol{\beta}}{c\sqrt{1-\beta^2}}\phi^{(0)}\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, y, z\right) \tag{2}
$$

   と表されることを示せ。ただし、$\boldsymbol{\beta} = \mathbb{v}/c,\ \beta = |\boldsymbol{\beta}|$ である。

   ※　この式は、Lorenz ゲージでの $(\phi/c, \mathbb{A})$ が特殊相対論で４元ベクトル場として Lorentz 変換されることを示唆している。特殊相対論については、後の講義で取りあつかう。