電磁気学２　レポート問題　第４回

担当：山口　哲

提出締め切り：2015 年 12 月 4 日金曜日

1 次元の分散のある波動について考える。$\psi(x,t)$ は、Fourier 変換したもの

$$\hat{\psi}(x,\omega) \coloneqq \int dt e^{i\omega t}\psi(x,t)$$

が、方程式

$$\partial_x^2\hat{\psi} + \frac{\omega^2}{v(\omega)^2}\hat{\psi} = 0 \tag{1}$$

を満たすとする。ここで、$v(\omega) > 0$ は位相速度であり

$$k = k(\omega) = \frac{\omega}{v(\omega)}$$

が単調増加関数で、しかも $-\infty < \omega < \infty$ で $-\infty < k < \infty$ の値をとるとする。このとき、$k = k(\omega)$ は逆に解くことができて、分散関係式 $\omega = \omega(k)$ を得る。[*1]

1. 微分方程式 (1) を解いて $\hat{\psi}(x,\omega)$ の一般解を求めよ。
2. これを Fourier 変換することにより、$F(k), G(k)$ を任意関数として

   $$\psi(x,t) = \int \frac{dk}{2\pi}\left(F(k)e^{ikx-i\omega(k)t} + G(-k)e^{-ikx-i\omega(k)t}\right)$$

   と表されることを示せ。
3. 以下では簡単のため $G(k) = 0$ の場合を考える。さらに $F(k)$ は $k = k_0$ 付近にのみ分布していて $\omega(k)$ を $k = k_0$ のまわりに Taylor 展開して考えてもよいとする。$\omega_0 \coloneqq \omega(k_0), \frac{d\omega}{dk}(k_0) \eqqcolon \omega_0', \frac{d^2\omega}{dk^2}(k_0) \eqqcolon \omega_0''$ と略記する。
   $\omega(k)$ を $(k-k_0)$ の 1 次まで Taylor 展開した場合、$f_0(x)$ をある関数として

   $$\psi(x,t) = e^{ik_0x-i\omega_0 t}f_0(x-\omega_0' t)$$

   と書けることを示せ。これを見ると ω_0' が「群速度」と呼ばれる理由が分かるであろう。

   裏面に続く

[*1] 一般的な書き方とは異なることに注意。分散関係式は $\mathbb{k}$ を波数ベクトルとして $\omega(\mathbb{k}) > 0$ にするのが一般的である。

4. $\omega(k)$ を $(k-k_0)$ の 2 次まで Taylor 展開して考える。

$$\psi(x,t) = e^{ik_0x - i\omega_0 t} f(x - \omega_0' t, t)$$

と書いた時、$f(x,t)$ を積分の形で表わせ。

5. 具体的に $t=0$ で Gauss 型の波束

$$f(x,0) = Ne^{-\frac{1}{2}\lambda x^2} \tag{2}$$

であったとする。ここで N,λ は実数の定数である。このとき、$F(k)$ および $f(x,t)$ を求めよ。

6. (2) のような、波束は x がだいたい幅 $1/\sqrt{\mathrm{Re}\lambda}$ の範囲内に広がっている。時刻 t での「波束の幅」を求め、横軸を t、縦軸を幅にとって、グラフに表わせ。