場の理論I レポート問題　第一回

担当：山口哲

2010 年 5 月 6 日出題

問題１

実スカラー場 $\phi(x)$ と作用

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial\phi), \tag{1}$$

$$\mathcal{L}(\phi, \partial\phi) = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi), \tag{2}$$

を考える。ここで $V(\phi)$ は ϕ の関数である。座標変換 $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - \epsilon a^\mu$ (a^μ は定数ベクトル、ϵ は無限小のパラメータ) を考える。

1. 場は、$\phi'(x') = \phi(x)$ というように変換する。場の無限小変換 $\delta_\epsilon\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x)$ の形を書き下せ。
2. その変換に対して、$\delta_\epsilon\mathcal{L} = \epsilon\partial_\mu Y^\mu$ の形に書き表せ。
3. この変換に対する Noether カレント j^μ を求めよ。実際 $\partial_\mu j^\mu = 0$ となることを確かめよ。
4. Noether カレントを $j^\mu = a_\nu T^{\mu\nu}$ と表したとき、$T^{\mu\nu}$ は $\mu\nu$ について対称か？もし対称でなければ $\partial_\rho f^{\rho\mu\nu}$ ($f^{\rho\mu\nu}$ は $\rho\mu$ について反対称) のような項をつけたして対称化せよ。

問題２

次のような模型 (非線形シグマ模型) を考える。場は N 個のスカラー場 $\phi^i(x)$, $i = 1, \ldots, N$, 作用は

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial\phi), \tag{3}$$

$$\mathcal{L}(\phi, \partial\phi) = \frac{1}{2}g_{ij}(\phi)\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^i\partial_\nu\phi^j. \tag{4}$$

ただし、$g_{ij}(\phi)$, $i, j = 1, \ldots, N$ は、ϕ^k, $k = 1, \ldots, N$ の関数で $g_{ij}(\phi) = g_{ji}(\phi)$、さらに $g_{ij}(\phi)$ を ij 成分とする行列は正定値とする。この行列の逆行列の成分を $g^{ij}(\phi)$ と書くことにする。

1. 運動方程式を求めよ。

2. $\xi^i(\phi),\ i=1,\ldots,N$ を $\phi^j,\ j=1,\ldots,N$ の関数とする。変換 $\delta_{\epsilon\xi}\phi^i=\epsilon\xi^i(\phi)$ が模型の対称性となるための ξ^i に対する条件を求めよ。

3. この対称性に対する Noether カレント j^μ_ξ, Noether 電荷 Q_ξ を求めよ。

4. 正準運動量 $\Pi_i(x)$ は

$$\Pi_i(\vec{x})=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^i(\vec{x}))}, \tag{5}$$

で定義され、これを使って Poisson 括弧は

$$\{A,B\}_{\mathrm{PB}}=\int d^3\vec{x}\left(\frac{\delta A}{\delta\Pi_i(\vec{x})}\frac{\delta B}{\delta\phi^i(\vec{x})}-\frac{\delta A}{\delta\phi^i(\vec{x})}\frac{\delta B}{\delta\Pi_i(\vec{x})}\right), \tag{6}$$

で定義される。上で考えた $\xi^i(\phi)$ を使った変換が Noether 電荷 Q_ξ を使って次のように表せることを示せ。

$$\delta_{\epsilon\xi}\phi^i=\{\epsilon Q_\xi,\phi^i\}_{\mathrm{PB}}. \tag{7}$$

5. $\xi_1^i(\phi),\xi_2^i$ に対して、上で考えた変換 $\delta_{\epsilon_1\xi_1},\delta_{\epsilon_2\xi_2}$ がともに対称性であるとする。これらの対称性の Noether 電荷の間の Poisson 括弧が、ある $\zeta^i(\phi)$ を用いて

$$\{Q_{\xi_1},Q_{\xi_2}\}_{\mathrm{PB}}=Q_\zeta, \tag{8}$$

と書けることを示せ。$\zeta^i(\phi)$ の具体的な形を求めよ。変換 $\delta_{\epsilon\zeta}$ がまた系の対称性となっていることを示せ。

参考

問題等は以下のページにも置いておく。

`http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~yamaguch/j/class.html`