場の理論I レポート問題　第二回

担当：山口哲

2010年5月27日出題

問題1

以下 ϕ の積分範囲はすべて $-\infty < \phi < \infty$ とする。必要なら Gauss 積分の公式

$$\int d\phi e^{-\frac{1}{2}\phi^2} = \sqrt{2\pi} \tag{1}$$

を使え。

a を正の実数とする。確率変数 ϕ に対して確率密度が $\exp(-\frac{1}{2}a\phi^2)$ に比例するような確率分布を考える。すなわち $X(\phi)$ の期待値が

$$\langle X(\phi)\rangle_0 := \frac{1}{Z}\int d\phi X(\phi)\exp\left(-\frac{1}{2}a\phi^2\right), \tag{2}$$

$$Z_0 := \int d\phi \exp\left(-\frac{1}{2}a\phi^2\right) \tag{3}$$

と定義される。

1. Z_0 を計算せよ。
2. $\langle\phi\rangle_0$ を計算せよ。また、$\langle\phi^2\rangle_0$ を計算せよ。
3. J を ϕ によらない数として、$\langle\exp(J\phi)\rangle_0$ を計算せよ。
4. $\langle\phi^n\rangle_0$ の一般形を求めよ。

問題2

次のような確率分布を考える。

$$\langle X(\phi)\rangle := \frac{1}{Z}\int d\phi X(\phi)\exp\left(-\frac{1}{2}a\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right), \tag{4}$$

$$Z := \int d\phi \exp\left(-\frac{1}{2}a\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right) \tag{5}$$

λ が小さいとして、問題1の結果を利用し λ のべき展開で計算することを考える。

1. Z を λ の一次までで計算せよ。つまり $Z = Z_0 + \lambda Z_1 + O(\lambda^2)$ と書いたときの Z_1 を求めよ。

2. $\langle\phi^2\rangle$ を λ の一次までで計算せよ。

3. Z を λ のべき級数展開の形 $Z=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n Z_n$ と書いた時、このべき級数は 0 でないどんな小さな λ に対しても収束しないこと、つまり収束半径は 0 であることを示せ。

参考

問題等は以下のページにも置いておく。

http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~yamaguch/j/class.html