1　特殊相対論でのテンソル算

1.1　Lorentz 変換と Einstein の規約

Lorentz 変換や、それに伴う様々な物理量の変換を記述するために、次のような記法を導入する。まず、時空の座標 $x^\mu,\ (\mu = 0,1,2,3)$ を

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \tag{1}$$

とする。今後、x^μ の μ は上付きの添字であって、べき乗ではないことに注意する。S 系の座標 x^μ と S$'$ 系の座標 x'^μ の間が変換の行列成分を $a^\mu{}_\nu$ とする 1 次変換

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} a^\mu{}_\nu x^\nu \tag{2}$$

で関係していて、さらに

$$s^2 := -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^2)^2 = s'^2 := -(x'^0)^2 + (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^2)^2 \tag{3}$$

を満たすとき、この変換を Lorentz 変換と呼ぶのであった。これらの式を簡潔に表すために、まず次の Einstein の規約を導入する。式 (2) では、2 回出てきている添字 ν について和をとっている。今後このような和がたくさん出てくるので、約束として 1 つの項に 2 回同じ添字が出てきたら、和の記号を書かなくても、その添字が走る範囲で和を取るということにする。例えば

$$x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu \tag{4}$$

は、式 (2) と全く同じ式である。注意することは、式 (4) は、式 (2) と同じであり、ν は和をとっている添字なので、別の文字にしても、全く同じである。

$$a^\mu{}_\nu x^\nu = a^\mu{}_\rho x^\rho \tag{5}$$

である。このことを利用して 1 つの項に同じ添字が 3 回以上出てこないように注意する。

さらに s^2 の表式を簡潔に表すために、次の記号を導入する。

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{cases} -1 & (\mu = \nu = 0), \\ +1 & (\mu = \nu = 1,2,3), \\ 0 & (\mu \neq \nu). \end{cases} \tag{6}$$

そうすると s^2 は

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \tag{7}$$

という簡潔な形に書ける。ここでは、μ,ν ともに２回ずつ出てきているので、それぞれについて $0,1,2,3$ の和をとっていることに注意する。そうすると、Lorentz 変換の条件 $s^2 = s'^2$ は

$$\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = \eta_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu \tag{8}$$

と書ける。右辺の x' を (4) も用いて x で書き換え、先ほどの添字の置き換えの操作を駆使すると

$$\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = \eta_{\rho\sigma}a^\rho{}_\mu a^\sigma{}_\nu x^\mu x^\nu \tag{9}$$

となる。x^μ は時空の任意の点なので $x^\mu x^\nu$ の係数を比較して

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma}a^\rho{}_\mu a^\sigma{}_\nu \tag{10}$$

を得る。これが変換 (4) が Lorentz 変換になるための行列成分 $a^\mu{}_\nu$ に対する条件である。

次に、並進も含めて考えることにする。b^μ を４成分ある定数として、S 系と S$'$ 系が

$$x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu \tag{11}$$

で結びついている場合を考える。ただし $a^\mu{}_\nu$ は条件 (10) を満たすとする。このような変換を Poincare 変換と呼ぶ。このときには、並進があるので、原点からの４次元的距離 s^2 は不変ではない。代わりに２つの時空点の座標の差 Δx^μ を用いて作ったこの２点の間の４次元的距離

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu \tag{12}$$

が

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2 \tag{13}$$

を満たす。あるいは、無限小の場合を考えて

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{14}$$

が不変になる。

後のため、次の記号を導入しておく。一つめはクロネッカーのデルタで

$$\delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu), \\ 0 & (\mu \neq \nu). \end{cases} \tag{15}$$

これを使うと、上付きの $\eta^{\mu\nu}$ と下付きの $\eta_{\mu\nu}$ の間には、

$$\eta^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu \tag{16}$$

の関係があることが分かる。もう一つは a^μ_ν の逆行列 $a^{-1\mu}{}_\nu$ である。つまりこれは

$$a^\mu{}_\rho a^{-1\rho}{}_\nu = a^{-1\mu}{}_\rho a^\rho{}_\nu = \delta^\mu_\nu \tag{17}$$

を満たす。

1.2 スカラーとベクトル

以下、上の Poincare 変換を考え、S 系から見た量と S′ 系から見た量を ′ を付けて区別する。

1.2.1 スカラー

1 成分の量 f が、$f = f'$ を満たすとき、f をスカラーと呼ぶ。例えば、2 つの時空点間の 4 次元的距離の 2 乗 Δs^2、光速 c などはスカラーである。また、1 成分の関数 $f(x)$ が、$f'(x') = f(x)$ のとき、これをスカラー場と呼ぶ。

1.2.2 反変ベクトル

4 成分の量 A^μ が

$$A'^\mu = a^\mu{}_\nu A^\nu \tag{18}$$

を満たすとき、これを（4 元）反変ベクトルと呼ぶ。Δx^μ は反変ベクトルの例である。4 成分の関数 $A^\mu(x)$ が、

$$A'^\mu(x') = a^\mu{}_\nu A^\nu(x) \tag{19}$$

を満たすとき、これを反変ベクトル場と呼ぶ。

1.2.3 共変ベクトル

一方、4 成分の量 A_μ が

$$A'_\mu a^\mu{}_\nu = A_\nu \tag{20}$$

を満たすとき、これを（4 元）共変ベクトルと呼ぶ。4 成分の関数 $A^\mu(x)$ が、

$$A'_\mu(x') a^\mu{}_\nu = A_\nu(x) \tag{21}$$

を満たすとき、これを共変ベクトル場と呼ぶ。共変ベクトルの 1 つの重要な例は A^μ を反変ベクトルとしたとき、$A_\mu := \eta_{\mu\nu} A^\nu$ で定義した A_μ は共変ベクトルとなることである。これ

らは逆に、$A^{mu} = \eta^{\mu\nu} A_\nu$ とも書ける。このように $\eta_{\mu\nu}, \eta^{\mu\nu}$ を使って添字を上げ下げし、共変ベクトルと反変ベクトルを行き来することができる。

共変ベクトル場のもう一つの重要な例は、$f(x)$ をスカラー場としたとき

$$\partial_\mu f(x) := \frac{\partial}{\partial x^\mu} f(x) \tag{22}$$

は、共変ベクトル場となることである。別の見方をすると、ナブラの 4 次元バージョンである微分演算子 ∂_μ は共変ベクトル演算子である。

1.2.4 内積

A^μ、B_μ をそれぞれ反変ベクトルと共変ベクトルとする。この 2 つから作った $A^\mu B_\mu$ はスカラーになる。これを A^μ と B_μ の内積と呼ぶことにしよう。特に自分との内積 $A^\mu A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$ は、「大きさの自乗」と呼んでもよさそうなものである。ただし Euclid 空間の場合と異なり、Minkowski 空間の場合にはこの「大きさの自乗」は正にも負にもなりうる。$A^\mu A_\mu > 0$ のベクトルを「空間的」、$A^\mu A_\mu < 0$ のベクトルを「時間的」、$A^\mu A_\mu = 0$ のベクトルを「光的」と呼ぶ。

1.3 テンソル

1.3.1 2階反変テンソル

上付きの足を二つもっている量 $T^{\mu\nu}$ が

$$T'^{\mu\nu} = a^\mu{}_\rho a^\nu{}_\sigma T^{\rho\sigma} \tag{23}$$

と変換するとき、これを 2 階反変テンソルと呼ぶ。2 階反変テンソル場も同様に定義する。

1.3.2 対称（反対称）テンソル

このテンソルが

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} \tag{24}$$

という性質を満たす場合、S′ 系から見ても $T'^{\mu\nu} = T'^{\nu\mu}$ となるので、この性質は見る系によらない。このようなテンソルを対称テンソルと呼ぶ。同様に

$$T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu} \tag{25}$$

の性質も系によらないので、この性質を持つテンソルを反対称テンソルと呼ぶ。例としては、A^μ, B^μ を反変ベクトルとしたとき

$$T^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu \pm A^\nu B^\mu \tag{26}$$

は、それぞれ2階反変対称（反対称）テンソルである。

1.3.3　一般のテンソル

さらに一般に下付きの足や上付きの足をたくさん持っているテンソルを考えることができる。上付きの足を p 個、下付きの足を q 個持っている量 $T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ が、変換性

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} = a^{\mu_1}{}_{\rho_1}\cdots a^{\mu_p}{}_{\rho_p} T^{\rho_1\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q} a^{-1\sigma_1}{}_{\nu_1}\cdots a^{-1\sigma_q}{}_{\nu_q} \tag{27}$$

を満たすとき（足の付き方から決まるタイプの）テンソルと呼ぶ。テンソル場も同様に定義する。テンソルには、次のような性質がある。

- スカラー、反変ベクトル、共変ベクトルはテンソルである。
- $\eta_{\mu\nu}$, $\eta^{\mu\nu}$, δ^μ_ν は、テンソルである。
- すべての成分が 0 の量はテンソルである。単に 0 と書く。
- 同じタイプのテンソルの和はテンソルである。つまり、$T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ $U^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ がテンソルであるとすると

  $$V^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} := T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} + U^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} \tag{28}$$

  もテンソルである。
- テンソルの成分ごとの積もテンソルである。つまり $T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ $U^{\mu_1\cdots\mu_r}{}_{\nu_1\cdots\nu_s}$ がテンソルであるとすると

  $$V^{\mu_1\cdots\mu_{p+r}}{}_{\nu_1\cdots\nu_{q+s}} := T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} U^{\mu_{p+1}\cdots\mu_{p+r}}{}_{\nu_{q+1}\cdots\nu_{q+s}} \tag{29}$$

  もテンソルである。
- テンソルにおいて、次の「縮約」の操作をしたものもテンソルである。$T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ をテンソルとすると

  $$V^{\mu_1\cdots\mu_{p-1}}{}_{\nu_1\cdots\nu_{q-1}} := T^{\mu_1\cdots\mu_{p-1}\lambda}{}_{\nu_1\cdots\nu_{q-1}\lambda} \tag{30}$$

  もテンソルである。
- （テンソル）=（テンソル）という方程式が、S 系で成り立っていたとすると同じ方程式が S′ 系でも成り立つ。なので物理法則をこのような方程式の形に書くことができれば、それはどの慣性系でも同じ形になる。