ベクトル解析まとめ　その１

1　ベクトル

1.1　ベクトルとその和、スカラー倍

ベクトル $\vec{A}$ は大きさと方向を持つ。成分表示は、

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) \tag{1.1}$$

一方、普通の数はスカラーと呼ばれる。

ベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ の間で足し算が定義される。これは次のように成分ごとの足し算になる。

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) \tag{1.2}$$

スカラー a とベクトル $\vec{A}$ の間でスカラー倍が次のように定義できる。

$$a\vec{A} = \vec{A}a = (aA_x, aA_y, aA_z) \tag{1.3}$$

ベクトルの大きさ $|\vec{A}|$ は、成分を使って

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1.4}$$

と書ける。

1.2　ベクトルどうしの積

２つのベクトル $\vec{A}, \vec{B}$ から、次のようにして内積（スカラー積）を定義できる。積の結果はスカラーであり、それを成分で書くと

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{1.5}$$

$\vec{A}, \vec{B}$ のなす角を θ とすると内積は

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta \tag{1.6}$$

となる。

２つのベクトル $\vec{A}, \vec{B}$ から、ベクトルを作る外積（ベクトル積）と呼ばれる演算もある。成分で書くと

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) \tag{1.7}$$

これの大きさは $\vec{A}, \vec{B}$ のなす平行四辺形の大きさであり

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}||\sin\theta| \tag{1.8}$$

向きはこの平行四辺形に垂直で、$\vec{A}$ から $\vec{B}$ に右ねじを回した時に右ねじが進む方向である (図 1 参照)。

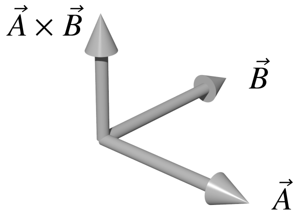

図 1

これらのベクトルの演算の間に次のような等式が成り立つ。$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ をベクトル、a, b, c をスカラーとする。

$$\vec{A} \cdot (a\vec{B} + b\vec{C}) = a\vec{A} \cdot \vec{B} + b\vec{A} \cdot \vec{C}, \tag{1.9}$$

$$\vec{A} \times (a\vec{B} + b\vec{C}) = a\vec{A} \times \vec{B} + b\vec{A} \times \vec{C}, \tag{1.10}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}, \tag{1.11}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}, \tag{1.12}$$

$$\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}, \tag{1.13}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0, \tag{1.14}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}), \tag{1.15}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}. \tag{1.16}$$

2　場の微分

2.1　偏微分

$f(x, y, z) = f(\vec{r})$ を $\vec{r} = (x, y, z)$ の関数（スカラー場）とする。この関数に関する微分を考えたい。一つの微分の仕方は次の偏微分である。

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} \tag{2.1}$$

つまりこれは、y, z を定数と思って x で微分することである。この講義の中では、

$$\partial_x f := \frac{\partial f}{\partial x} \tag{2.2}$$

という略記をよく用いる。

同様にして、y 方向、z 方向の微分も定義する。

$$\partial_y f(x,y,z) := \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h,z)-f(x,y,z)}{h}, \tag{2.3}$$

$$\partial_z f(x,y,z) := \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y,z+h)-f(x,y,z)}{h}. \tag{2.4}$$

偏微分に関する一つの重要な性質は、f が十分良い性質を持つときには、偏微分は順番によらないということである。具体的には、$\partial_x\partial_y f, \partial_y\partial_x f$ が存在して連続のとき

$$\partial_x\partial_y f = \partial_y\partial_x f \tag{2.5}$$

が成り立つ。今後は関数やベクトル場は、このような十分なめらかなもののみを考える。

2.2　全微分と勾配

$f(\vec{r})$ をスカラー場とし、$\Delta\vec{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ を非常に大きさが小さいベクトルとする。$f(\vec{r})$ と $f(\vec{r}+\Delta\vec{r})$ の差を考えたい。

$$\begin{aligned}
\Delta f := &f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z)\\
=&f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y+\Delta y, z+\Delta z)\\
&+ f(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z+\Delta z)\\
&+ f(x,y,z+\Delta z) - f(x,y,z)\\
\cong&\partial_x f\,\Delta x + \partial_y f\,\Delta y + \partial_z f\,\Delta z
\end{aligned} \tag{2.6}$$

最後のところは、偏微分の定義から導かれる近似式

$$f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z) \cong \partial_x f\,\Delta x \tag{2.7}$$

等を使った。式 (2.6) を抽象化し、$\cong$ を使わずに次のように書くことにする。

$$df = \partial_x f\,dx + \partial_y f\,dy + \partial_z f\,dz \tag{2.8}$$

この df を全微分と呼ぶ。全微分の式 (2.8) の左辺は、２つのベクトル

$$d\vec{r} = (dx, dy, dz), \qquad \vec{\nabla} f := (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f), \tag{2.9}$$

の内積と思える。ベクトル $\vec{\nabla} f$ を「f の勾配（gradient)」と呼ぶ。

さらに、$\vec{\nabla} f$ から抽象的に f を取り去ったものを考える。

$$\vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \tag{2.10}$$

これは、「ナブラ」と呼ばれ、ベクトルであって演算子である。

2.3 ベクトル場の微分

空間の各点ごとに、ベクトルが決まっているものを、ベクトル場と呼ぶ。

$$\vec{A}(\vec{r}) = (A_x(\vec{r}), A_y(\vec{r}), A_z(\vec{r})) \tag{2.11}$$

ベクトル場の微分は、形式的に $\vec{\nabla}$ を「掛ける」ことによって得られる。ベクトル同士の積には、内積 $\cdot$ と外積 $\times$ があったが、それらに応じて２種類の微分のしかたがある。

- 一つめは、

  $$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z \tag{2.12}$$

  で、微分の結果はスカラー場になる。この微分は「$\vec{A}$ の発散（divergence）」と呼ばれる。
- もう一つのベクトルの微分は、

  $$\vec{\nabla} \times \vec{A} = (\partial_y A_z - \partial_z A_y, \partial_z A_x - \partial_x A_z, \partial_x A_y - \partial_y A_x) \tag{2.13}$$

  で、微分の結果はベクトル場になる。この微分は「$\vec{A}$ の回転（rotation）」と呼ばれる。

2.4 場の２階微分

これまで、スカラー場の 1 階微分 1 種類 $\vec{\nabla} f$、ベクトル場の 1 階微分 2 種類 $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}, \vec{\nabla} \times \vec{A}$ があることを見た。次に２階微分について調べよう。

$\vec{\nabla} f$ は、ベクトル場なのでもう一回微分するのは２種類の仕方がある。

- $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f =: \nabla^2 f$。ここから、抽象的に f を取り去ったものは、

  $$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \tag{2.14}$$

  これは、「ラプラシアン（Laplacian）」と呼ばれ、スカラーであり演算子である。
- $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{0}$。この演算の結果はいつも $\vec{0}$ である。これは、 式 (1.13) と同様にして示せる。

$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ はスカラー場なので、一種類の微分の仕方がある。これは、$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$ で、結果はベクトル場になる。

$\vec{\nabla} \times \vec{A}$ はベクトル場なので、２種類の微分の仕方がある。

- $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$。これはいつも 0。これは、式 (1.14) と同様にして示せる。

- $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$。これは、式 (1.16) と同様に次のように書き直せる。

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} \tag{2.15}$$

これらの中でいつも 0 あるいは $\vec{0}$ になる組み合わせ

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}f) = \vec{0}, \qquad \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0 \tag{2.16}$$

があったが、これらについては次のように「逆」が成り立つ。

- ベクトル場 $\vec{B}$ が、$\vec{\nabla}\times\vec{B} = 0$ を満たすなら $\vec{B} = \vec{\nabla}f$ となるようなスカラー場 f が存在する。
- ベクトル場 $\vec{B}$ が、$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ を満たすなら $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ となるようなベクトル場 $\vec{A}$ が存在する。

演習問題

1. $\vec{A} = (1,2,0), \vec{B} = (0,1,2)$ のとき、$\vec{A}+\vec{B}$、$\vec{A}\cdot\vec{B}$、$\vec{A}\times\vec{B}$ をそれぞれ計算せよ。
2. スカラー場 $f(\vec{r}) = ar^n$ の勾配 $\vec{\nabla}f$ を計算せよ。ただし、a,n は定数、$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ である。
3. ベクトル場 $\vec{A} = (ax, ay, 0)$ の発散 $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ と回転 $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ をそれぞれ計算せよ。ただし、a は定数とする。
4. ベクトル場 $\vec{A} = (-ay, ax, 0)$ の発散 $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ と回転 $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ をそれぞれ計算せよ。ただし、a は定数とする。
5. 任意のなめらかなスカラー場 f に対して $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}f) = \vec{0}$ であることを確かめよ。
6. 任意のなめらかなベクトル場 $\vec{A}$ に対して $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$ であることを確かめよ。
7. b を定数として、ベクトル場 $\vec{B} = (0,0,b)$ を考える。これは、$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ なので、$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ となるベクトル場 $\vec{A}$ が存在する。$\vec{A}$ を一つ求めよ。
8. a,n を 0 でない定数として、スカラー場 $f(\vec{r}) = ar^n$ を考える。$\vec{r}\neq\vec{0}$ で $\nabla^2 f = 0$ となるような n を求めよ。