ベクトル解析まとめ　その2

1　場の積分

1.1　様々な積分

1.1.1　体積積分

$f(\vec{r})$ をスカラー場とし、V をある領域とする。このとき体積積分とは次のようなものである。V を細かい領域に分割する。それぞれの微小領域に i というラベルを付け、その体積を ΔV_i、中心の位置を $\vec{r}_i$ とする。体積積分は

$$\int_V f(\vec{r})dV := \lim_{\text{分割を細かくする}} \sum_i f(\vec{r}_i)\Delta V_i \tag{1.1}$$

と定義される。例えば電荷密度を $\rho(\vec{r})$ とすると領域 V の中の電荷の総量 Q は、

$$Q = \int_V \rho(\vec{r})dV \tag{1.2}$$

と定義される。

1.1.2　面積分

$\vec{A}(\vec{r})$ をベクトル場、S を向きのついた面とする。このとき面積分とは次のようなものである。面 S を細かく分割する。それぞれの微小面に i というラベルを付け、その面積を Δa_i、単位法線ベクトルを $\vec{n}_i$、中心の位置を $\vec{r}_i$ とする。面積分は

$$\int_S \vec{A}(\vec{r})\cdot\vec{n}da := \lim_{\text{分割を細かくする}} \sum_i \vec{A}(\vec{r}_i)\cdot\vec{n}_i\Delta a_i \tag{1.3}$$

と表される。これを流束、あるいはフラックスと呼ぶこともある。例えば電流密度を $\vec{j}(\vec{r})$ としたとき、面 S を通過する電流（単位時間あたりに通過する電荷）I は、

$$I = \int_S \vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{n}da \tag{1.4}$$

と表される。

1.1.3　線積分

$\vec{A}(\vec{r})$ をベクトル場、C を経路とする。このとき線積分とは次のようなものである。経路 C を細かく分割する。それぞれの微小経路に i というラベルを付け、その微小変位ベクトル（微小経路の始点から終点に向かうベクトル）を $\Delta\vec{r}_i$、中心の位置を $\vec{r}_i$ とする。線積分は

$$\int_C \vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{r} := \lim_{\text{分割を細かくする}} \sum_i \vec{A}(\vec{r}_i)\cdot\Delta\vec{r}_i \tag{1.5}$$

と定義される。例えば、位置のみによる力 $\vec{F}(\vec{r})$ を受ける粒子が経路 C に添って動いた時、この力がした仕事 W は、

$$W = \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{1.6}$$

となる。

1.2　微分との関係

微分と積分に関して、次のような等式が成り立つ。

1. 面 S を領域 V の表面として、

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV = \int_S \vec{A} \cdot \vec{n} da \tag{1.7}$$

が成り立つ。これはガウスの定理と呼ばれる。

2. 経路 C を面 S の境界として

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{n} da = \int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} \tag{1.8}$$

が成り立つ。これはストークスの定理と呼ばれる。

3. $\vec{a}, \vec{b}$ をそれぞれ経路 C の始点と終点として、

$$\int_C (\vec{\nabla} f) \cdot d\vec{r} = f(\vec{b}) - f(\vec{a}) \tag{1.9}$$

が成り立つ。

2　電荷の保存則

マックスウェル方程式

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \tag{2.1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}, \tag{2.2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{2.3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}. \tag{2.4}$$

において、式 (2.4) の両辺の発散 $\vec{\nabla} \cdot$ をとる。$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$ であることに注意すると

$$-\epsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \tag{2.5}$$

を得る。左辺の微分の順序を入れ替え、式 (2.1) を代入し、整理すると

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{2.6}$$

を得る。この式は次に見るように電荷の保存則を表している。任意の領域 V で、(2.6) の両辺を体積積分する。ガウスの定理 (1.7) を用いると

$$(\text{ 左辺 }) = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{j}dV = \int_S \vec{j}\cdot\vec{n}da \tag{2.7}$$

を得る。ただし S は V の表面である。この式は、(単位時間あたり V の表面から出て行く電荷) を意味する。また、右辺は微分と積分を入れ替えて

$$(\text{ 右辺 }) = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = -\frac{\partial Q}{\partial t} \tag{2.8}$$

となる。これは (V の中の電荷の単位時間あたりの減少量) を意味する。つまり式 (2.6) は、

$$(V\text{ の表面から出ていく電荷 }) = (V\text{ の中の電荷の減少量 }) \tag{2.9}$$

となるので、電荷が現れたり消えたりすることがないという電荷の保存則を表す。

演習問題

1. z 軸を中心とする断面積 S の円柱状の無限に長い管があり、その中に電荷 q の荷電粒子が粒子数密度 n で一様に分布し、z 軸正の方向に一定の速さ v で動いている。電荷密度、電流密度（ベクトルであることに注意)、この管を流れる電流（固定した断面を単位時間あたりに通過する電荷）を求めよ。
2. 総電荷 Q が一様に分布した半径 a の球体を考える。この球体が中心を原点とし、z 軸を中心軸として角速度 ω で回転している。位置 $\vec{r} = (x, y, z)$ での電荷密度、電流密度を求めよ。またこれが電荷の保存則の式 (2.6) を満たしていることを確かめよ。