AdS$_7$/CFT$_6$におけるWilsonサーフェスとM5-brane

山口　哲（大阪大学）

Mori(森), SY, arXiv:1404.0930

やること

AdS_7/CFT_6

の検証

AdS_7/CFT_6

等価

M-theory

$AdS_7 \times S^4$

6D (2,0) 理論

(Lagrangianなし)

難しい

6D (2,0) 理論

(Lagrangianなし)

等価（?）　　S^1コンパクト化

5D 最大超対称Yang-Mills

最近の発展：厳密計算

[Hosomichi, Seong, Terashima], [Kallen,Qiu,Zabzine], [Kim,Kim], [Kallen,Minahan,Nedelin,Zabzine], [Fukuda,Kawano,Matsumiya], [Imamura],[Kim, Kim, Kim], [Minahan,Nedelin,Zabzine], [Kim, Kim, Kim, Lee],…

今日やること

AdS$_7$/CFT$_6$

M-theory

$AdS_7 \times S^4$

6D (2,0) 理論

厳密計算の結果

比較

AdS_7/CFT_6

等価

M-theory

$AdS_7 \times S^4$

同一視

境界が $S^1 \times S^5$

6D (2,0) 理論

(Lagrangianなし)

$$S^1 \times S^5$$

M2-brane

M5-brane

Bubbling geometry

Wilsonサーフェス

$$S^1 \times S^1$$

5D Wilson ループ

結果

$S^1 \times S^5$

半径 R_6 r 一定

$N \to \infty$

$\ln\langle W \rangle$	重力	CFT
基本表現 [Minahan,Nedelin,Zabzine]	$N\dfrac{2\pi R_6}{r}$	$N\dfrac{2\pi R_6}{r}$
k階反対称表現 New!	$N\dfrac{2\pi R_6}{r}k(1-k/N)$	$N\dfrac{2\pi R_6}{r}k(1-k/N)$
k階対称表現 New!	$N\dfrac{2\pi R_6}{r}k(1+k/\{2N\})$	$N\dfrac{2\pi R_6}{r}k(1+k/\{2N\})$

k階反対称表現 New! $N\dfrac{2\pi R_6}{r}k(1-k/N)$ $N\dfrac{2\pi R_6}{r}k(1-k/N)$

k階対称表現 New! $N\dfrac{2\pi R_6}{r}k(1+k/\{2N\})$ $N\dfrac{2\pi R_6}{r}k(1+k/\{2N\})$

特徴

’t Hooft 極限とは違う⇒弦理論的ではない

（M理論的）

k/N 有限

結果

厳密計算 → 行列模型

重力側のBubbling geometry から予想される固有値分布と一致

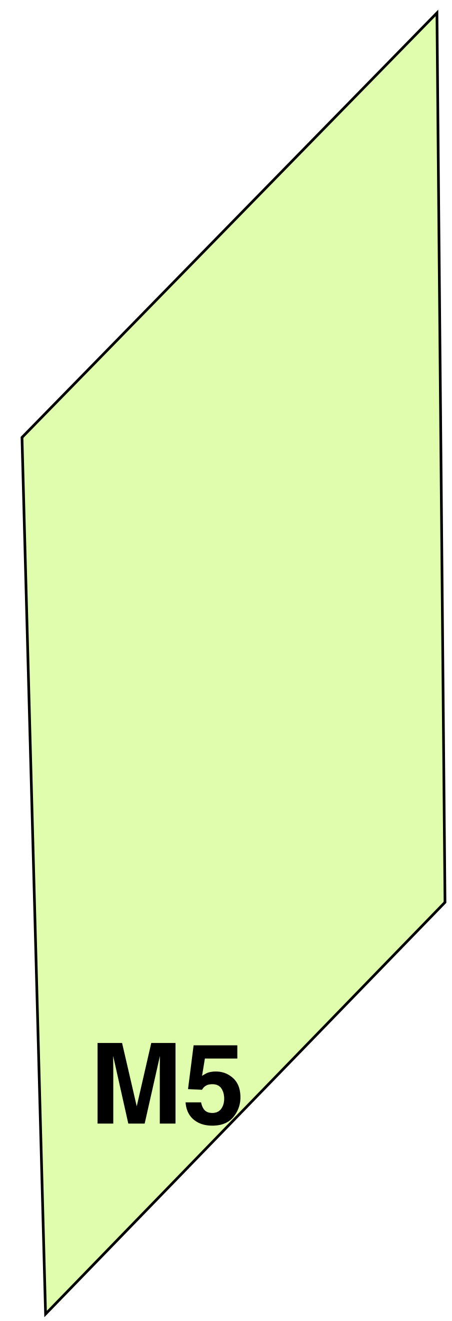
目次

Bubbling geometry

6D (2,0) 理論:

N枚重なったM5-brane上の低エネルギー理論。

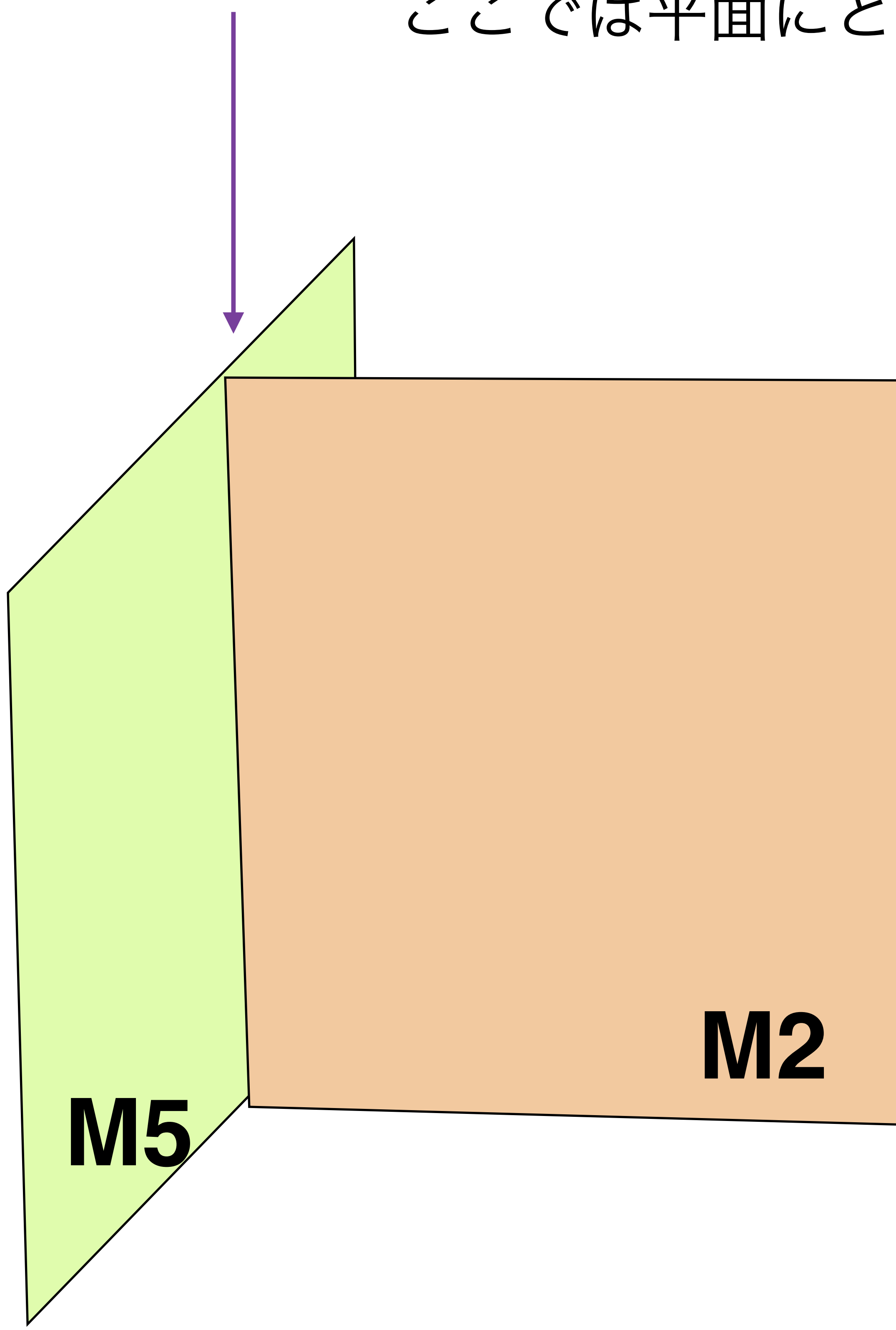
Conformal Field Theory



Wilson サーフェス: M2-braneの端 とりあえず１枚

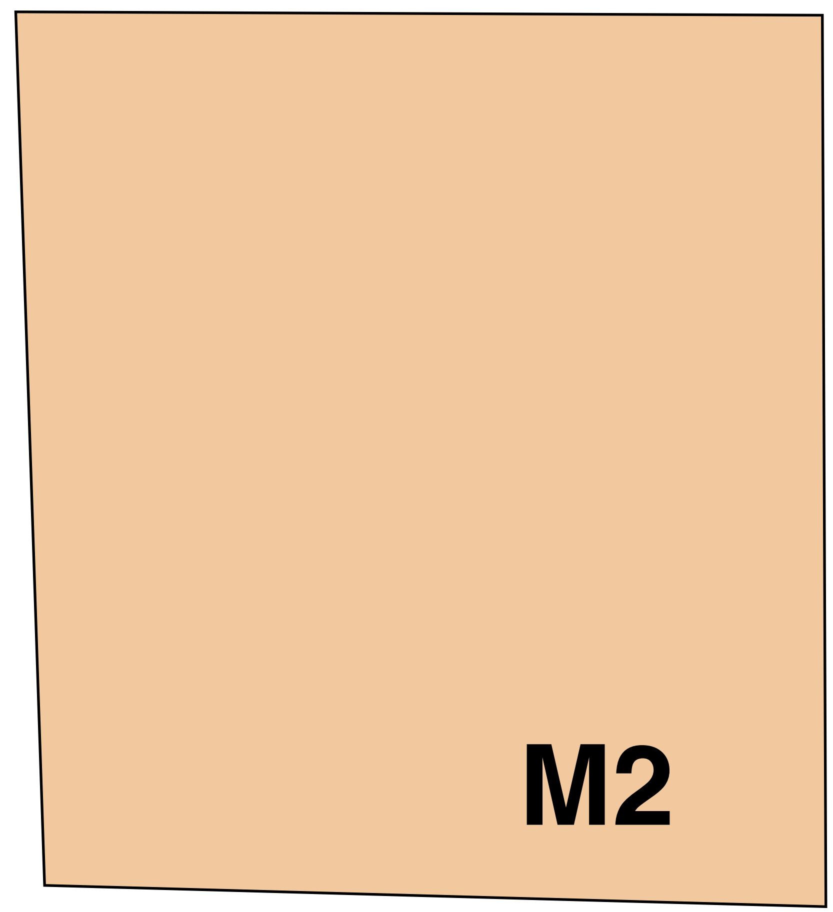
２次元に広がった非局所演算子

ここでは平面にとる



M5-braneのback-reaction

$$AdS_7 \times S^4$$



M2を沢山入れるとどうなるか？

M2を沢山入れるとどうなるか？

１．M5-braneになる

２．重力のback-reaction⇒ Bubbling geometry

（超重力理論の解）

作戦

[Lin, Lunin, Maldacena '04]

２次元Conformal

R対称性の残り

対称性 $$SO(2,2)\times SO(4)\times SO(4)$$

面に垂直な方向の回転

11D geometry includes $$AdS_3\times S^3\times S^3$$

Ansatz

SUSY 条件を調べる

$$\delta(\mathrm{gravitino})=0$$

11次元超重力の古典解

[Yamaguchi 06],
[Lunin 06],
[D'Hoker, Estes, Gutperl, Krym 08]

“Bubbling geometry”

$$ds^2 = e^{2A} d\check{\Omega}_3^2 + ds_2^2 + e^{2B} d\hat{\Omega}_3^2 + e^{2C} d\Omega_3^2,$$

$$G_4 = 6F E^0 E^1 E^2 + 6J E^5 E^6 E^7 + 6K E^8 E^9 E^{10},$$

- A, B, C: functions on the 2-dimensions.
- F, J, K: 1-forms on the 2-dimensions.

$$ds_2^2 = \frac{1}{-e^{2B+2C} + e^{2A+2B} + e^{2A+2C}}(dy^2 + dx^2),$$

$$6F = 4\frac{df_0}{g_1} - \frac{f_0 dg_1}{g_1^2} + \frac{2}{g_1^2}(f_2 \tilde{d} f_3 - f_3 \tilde{d} f_2),$$

$$6J = 4\frac{df_3}{g_1} - \frac{f_3 dg_1}{g_1^2} + \frac{2}{g_1^2}(-f_0 \tilde{d} f_2 + f_2 \tilde{d} f_0),$$

$$6K = -4\frac{df_2}{g_1} + \frac{f_2 dg_1}{g_1^2} + \frac{2}{g_1^2}(-f_0 \tilde{d} f_3 + f_3 \tilde{d} f_0),$$

$$y = e^{A+B+C}$$

$$f_0 = e^A, \qquad f_3 = pe^B, \qquad f_2 = qe^C,$$

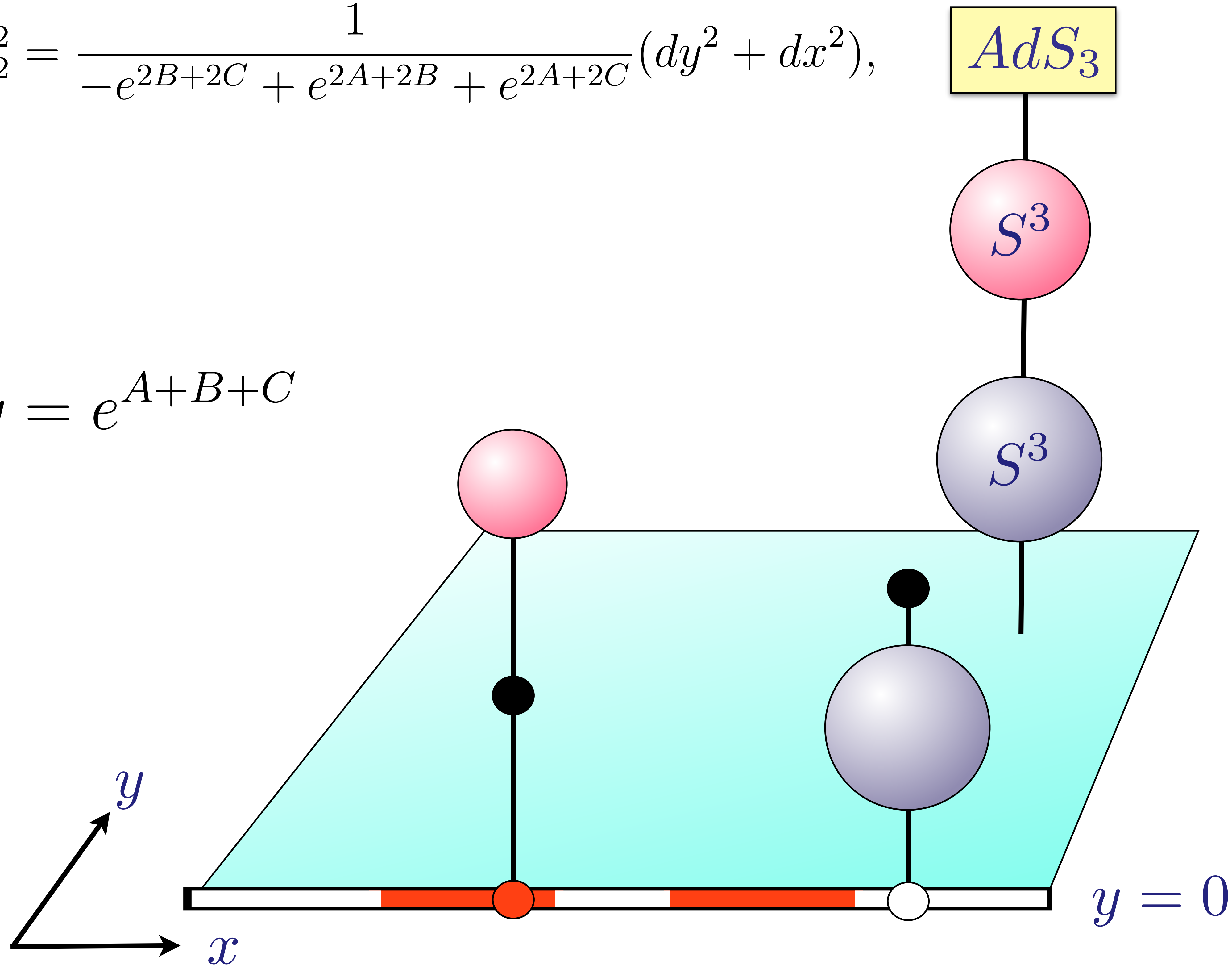
$$(p, q : \text{constants}), \qquad g_1 = \sqrt{f_0^2 - f_2^2 - f_3^2}.$$

and differential equations

$$ds^2 = e^{2A} d\check{\Omega}_3^2 + ds_2^2 + e^{2B} d\hat{\Omega}_3^2 + e^{2C} d\Omega_3^2,$$

$$ds_2^2 = \frac{1}{-e^{2B+2C} + e^{2A+2B} + e^{2A+2C}} (dy^2 + dx^2),$$

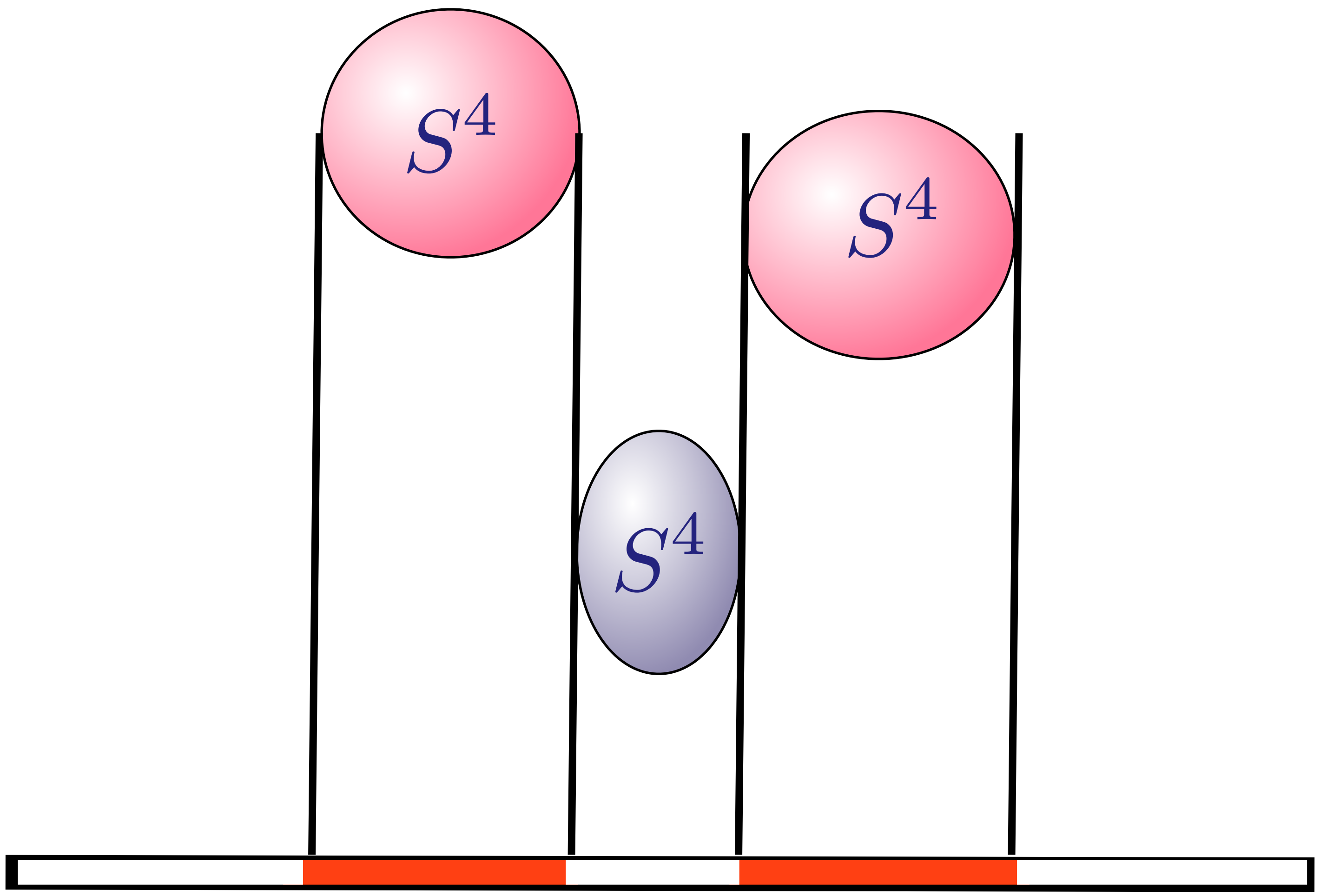
$$y = e^{A+B+C}$$



Bubbling geometry次のようなものでラベルされる

Non-contractable S^4

4-form flux through S^4



4-form fluxの量子化条件

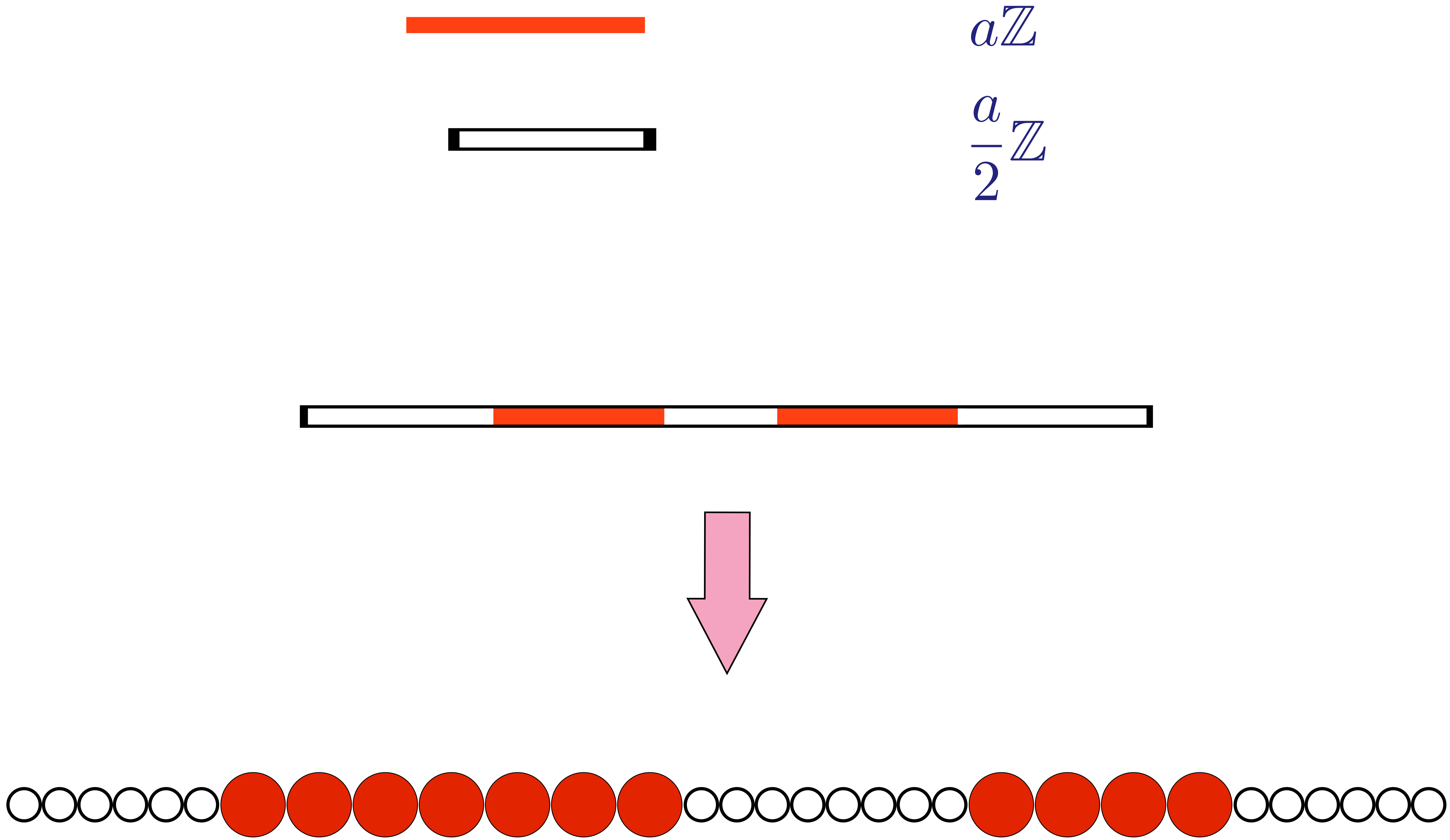
線分の長さが量子化される

$a\mathbb{Z}$

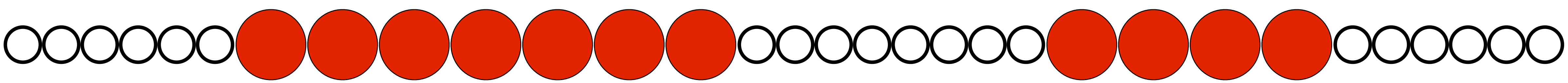
$\frac{a}{2}\mathbb{Z}$

$$a = 2\pi\ell_P$$

線分の長さが量子化される

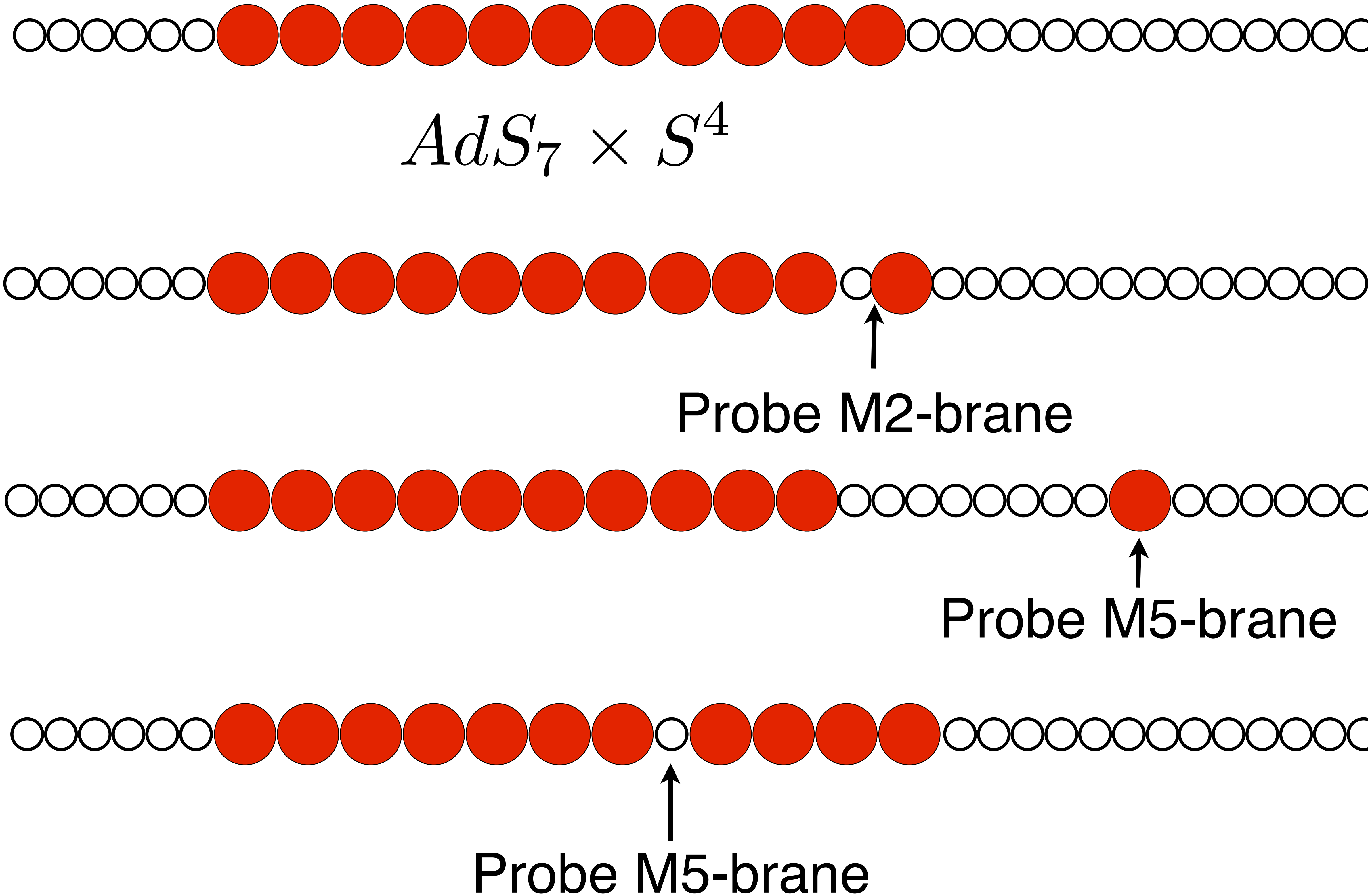


Bubbling geometry のラベル

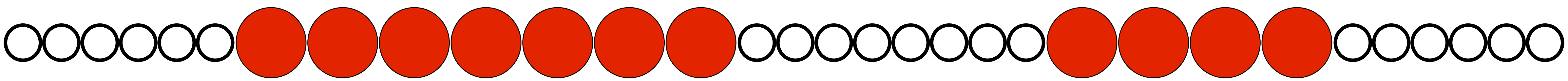


“Maya 図”

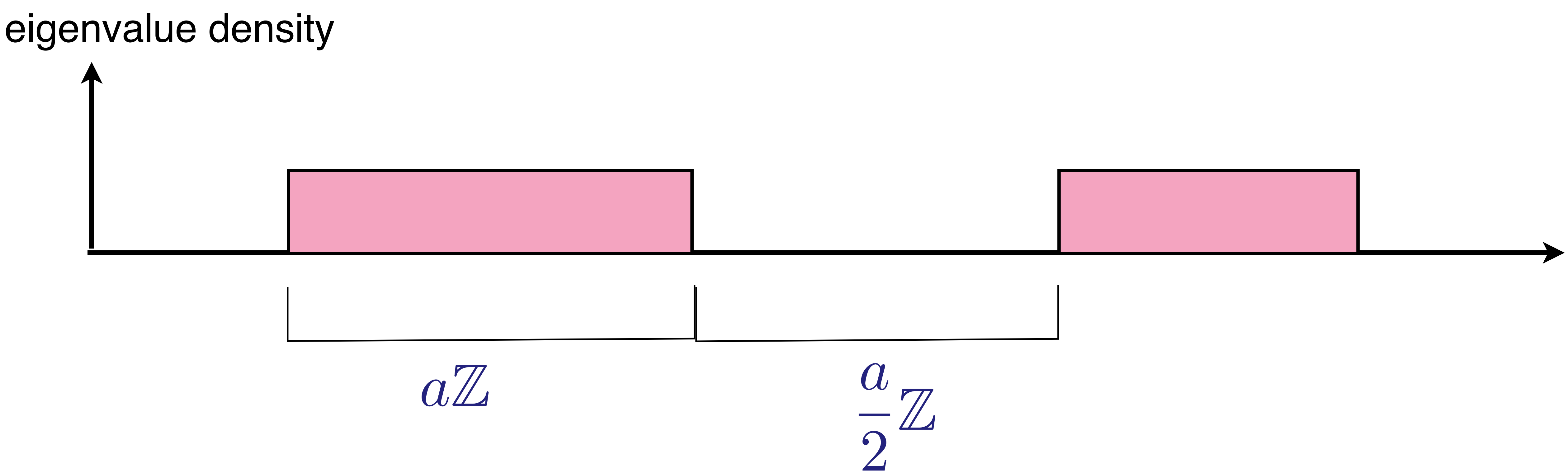
例：



他の例の経験から、もしWilson サーフェスが行列模型で表されるなら



Maya 図 ⇒ 固有値分布



目次

行列模型

6D (2,0) on $S^5 \times S^1$ Wilson サーフェス

$$R_6 = \frac{g_{YM}^2}{8\pi^2}$$

5D MSYM on S^5 Wilson ループ

Chern-Simons 行列模型

[Kim,Kim,Lee 12], [Kallen, Zabzine 12], [Kim,Kim 12]

$$\langle W_R \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_i d\lambda_i \prod_{i \neq j} \left| \sinh \frac{\lambda_i - \lambda_j}{2} \right| \exp \left[-\frac{1}{\beta} \sum_i \lambda_i^2 \right] \mathrm{Tr}_R e^{\lambda}$$

$$\beta = \frac{g_{\mathrm{YM}}^2}{2\pi r}.$$

$$\langle W_R \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_i d\lambda_i \prod_{i \neq j} \left| \sinh \frac{\lambda_i - \lambda_j}{2} \right| \exp\left[-\frac{1}{\beta} \sum_i \lambda_i^2 \right] \mathrm{Tr}_R e^{\lambda}$$

$$\beta = \frac{g_{\mathrm{YM}}^2}{2\pi r}.$$

β 一定、 $N \to \infty$ で評価したい。

※ ’t Hooft 極限とは異なる

$$\lambda_i = N\nu_i$$

$$\langle W_R \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_i d\nu_i \exp\left[-\frac{N^2}{\beta} \sum_i \nu_i^2 + \sum_{i \neq j} \ln \left| \sinh N \frac{\nu_i - \nu_j}{2} \right| \right] \mathrm{Tr}_R e^{N\nu}$$

$$O(N^3) \qquad\qquad O(N^3)$$

鞍点法で評価

分配関数

$$Z = \int \prod_i d\nu_i \exp\left[-\frac{N^2}{\beta}\sum_i \nu_i^2 + \sum_{i\neq j} N \left|\frac{\nu_i - \nu_j}{2}\right|\right]$$

鞍点方程式

$$-\frac{2}{\beta}\nu_i + \frac{1}{N}\sum_{j,j\neq i} \mathrm{sign}(\nu_i - \nu_j) = 0$$

順序を仮定　$\nu_i > \nu_j \text{ if } i < j$

$$\nu_i = \beta\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{N}\right)$$

$$\nu_i = \beta\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{N}\right)$$

固有値密度 $\rho(\nu) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} & (|\nu| \le \beta/2) \\ 0 & (|\nu| > \beta/2) \end{cases}$

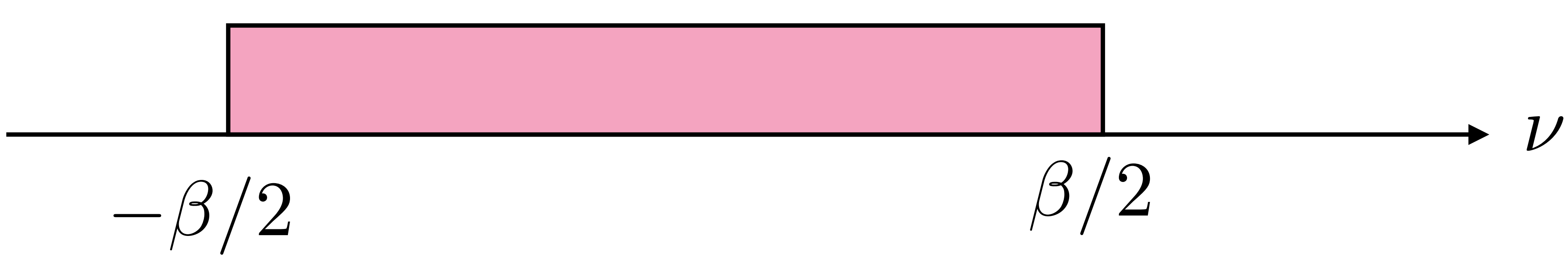
Bubbling geometry と無矛盾

基本表現 $\mathrm{Tr}_{\Box}\, e^{N\nu} = \sum_i e^{N\nu_i}$

$$\langle W_{\Box} \rangle = \sum_i e^{N\nu_i}\Big|_{\text{saddle point}}$$

$$\sim e^{N\nu_1}\Big|_{\text{saddle point}}$$

$$\sim e^{N\beta/2}$$



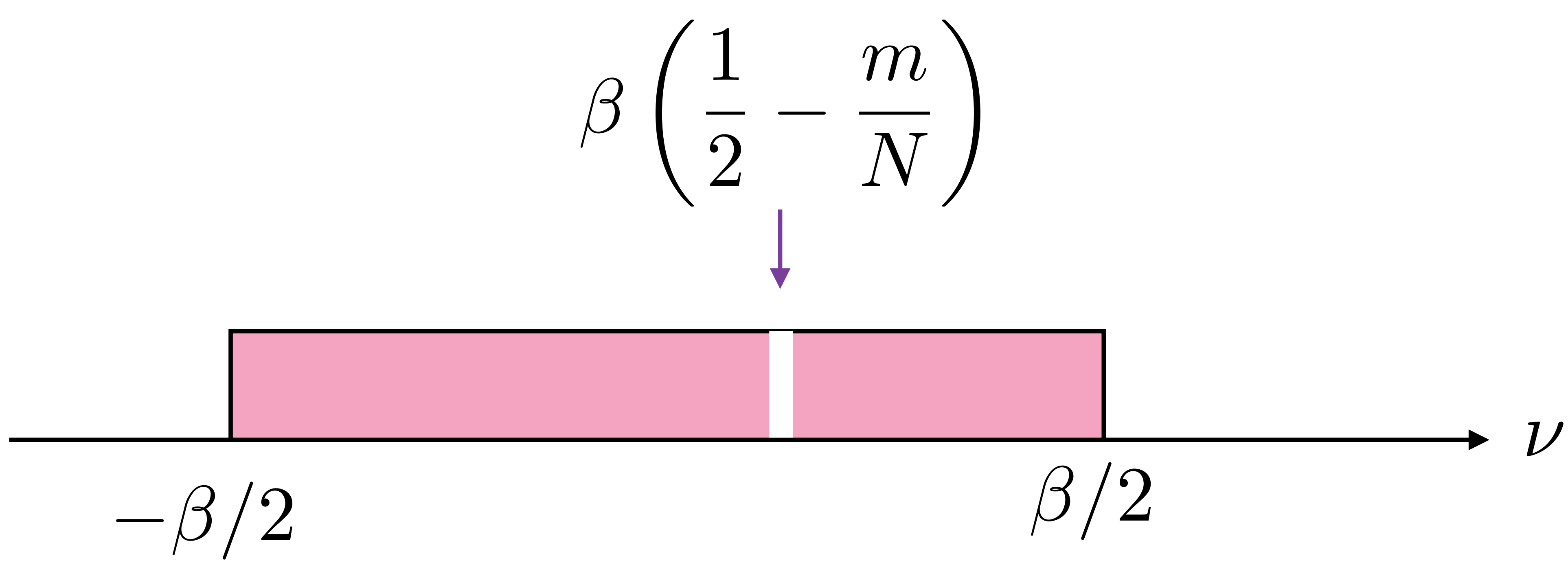
反対称表現

$$\mathrm{Tr}_{A_m}\, e^{N\nu} = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_m} \exp\left[N\sum_{\ell=1}^{m}\nu_{i_\ell}\right]$$

鞍点を変えない

$$\langle W_{A_m}\rangle \sim \exp\left[N\sum_{i=1}^{m}\nu_i\right]\Bigg|_{\text{saddle point}}$$

$$= \exp\left[\frac{\beta}{2}m(N-m)\right].$$



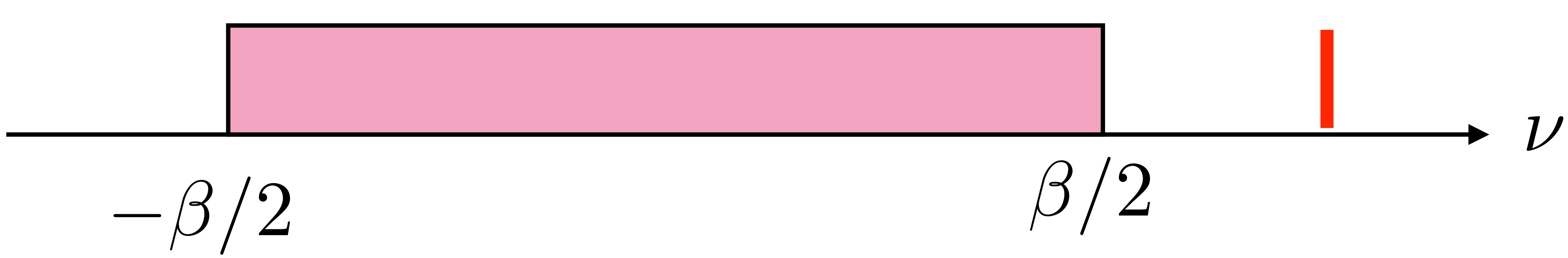
対称表現

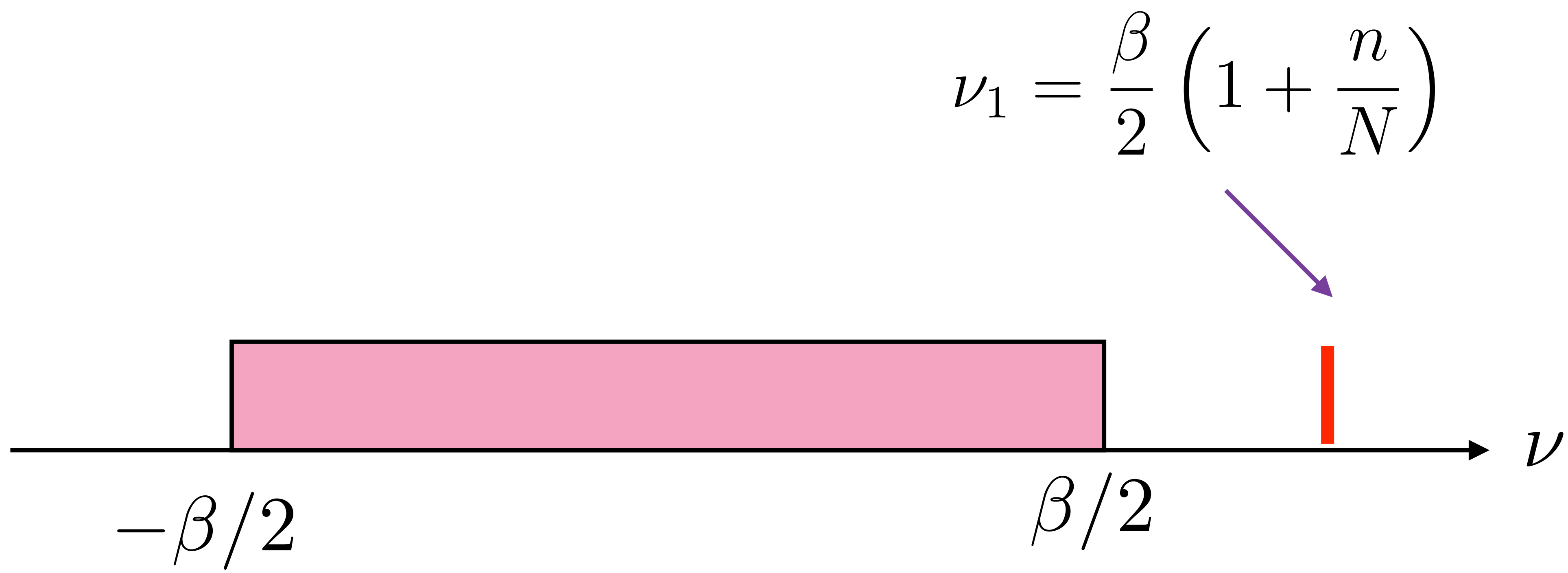
$$\mathrm{Tr}_{S_n}\, e^{N\nu} = \sum_{i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_n} \exp\left[N \sum_{\ell=1}^{n} \nu_{i_\ell}\right].$$

一番大きな寄与は、 $\exp\left[Nn\nu_1\right]$

$$\langle W_{S_n}\rangle = \frac{1}{Z}\int \prod_i d\nu_i \exp\left[-\frac{N^2}{\beta}\sum_i \nu_i^2 + \frac{N}{2}\sum_{i,j,i\neq j}|\nu_i - \nu_j| + Nn\nu_1\right]$$

鞍点の配位が　変わる $\nu_1 = \frac{\beta}{2}\left(1 + \frac{n}{N}\right)$





$$\langle W_{S_n}\rangle \sim \exp\left[-\frac{N^2}{\beta}\sum_i \nu_i^2 + \frac{N}{2}\sum_{i,j,i\neq j}|\nu_i-\nu_j| + Nn\nu_1\right]\Bigg|_{\text{saddle point}}$$

$$\sim \exp\left[-\frac{N^2}{\beta}\nu_1^2 + N\sum_{j=2}^{N}(\nu_1-\nu_j) + Nn\nu_1 + (n\text{-independent terms})\right]\Bigg|_{\text{saddle point}}$$

$$\sim \exp\left[\frac{\beta}{4}n(n+2N)\right]$$

まとめ

行列模型の計算結果 $R_6 = \frac{g_{YM}^2}{8\pi^2}$ $\beta = \frac{g_{\mathrm{YM}}^2}{2\pi r}.$

反対称表現 $\exp\left[N\frac{2\pi R_6}{r}k(1-k/N)\right]$

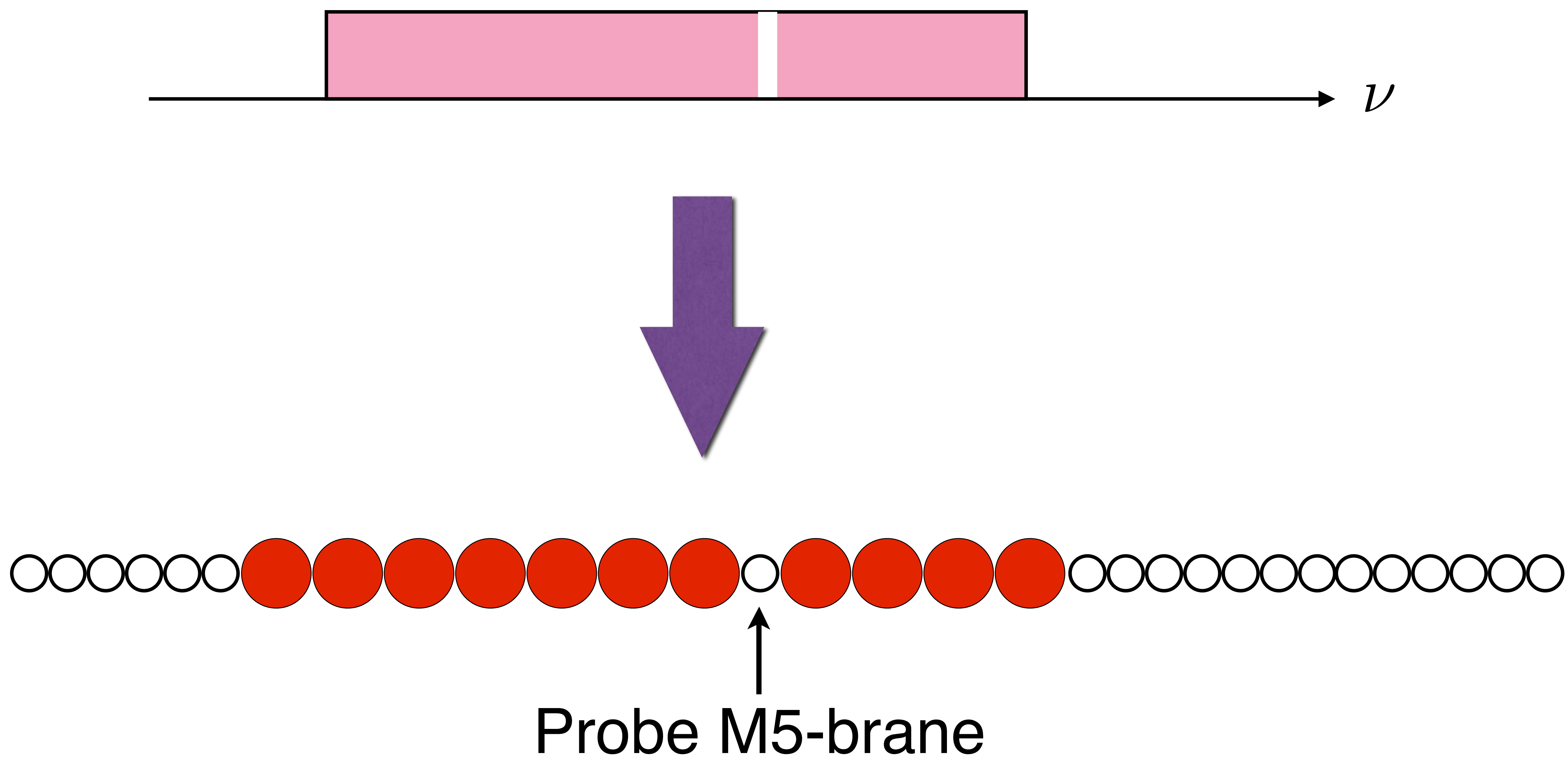
対称表現 $\exp\left[N\frac{2\pi R_6}{r}k(1+k/\{2N\})\right]$

目次

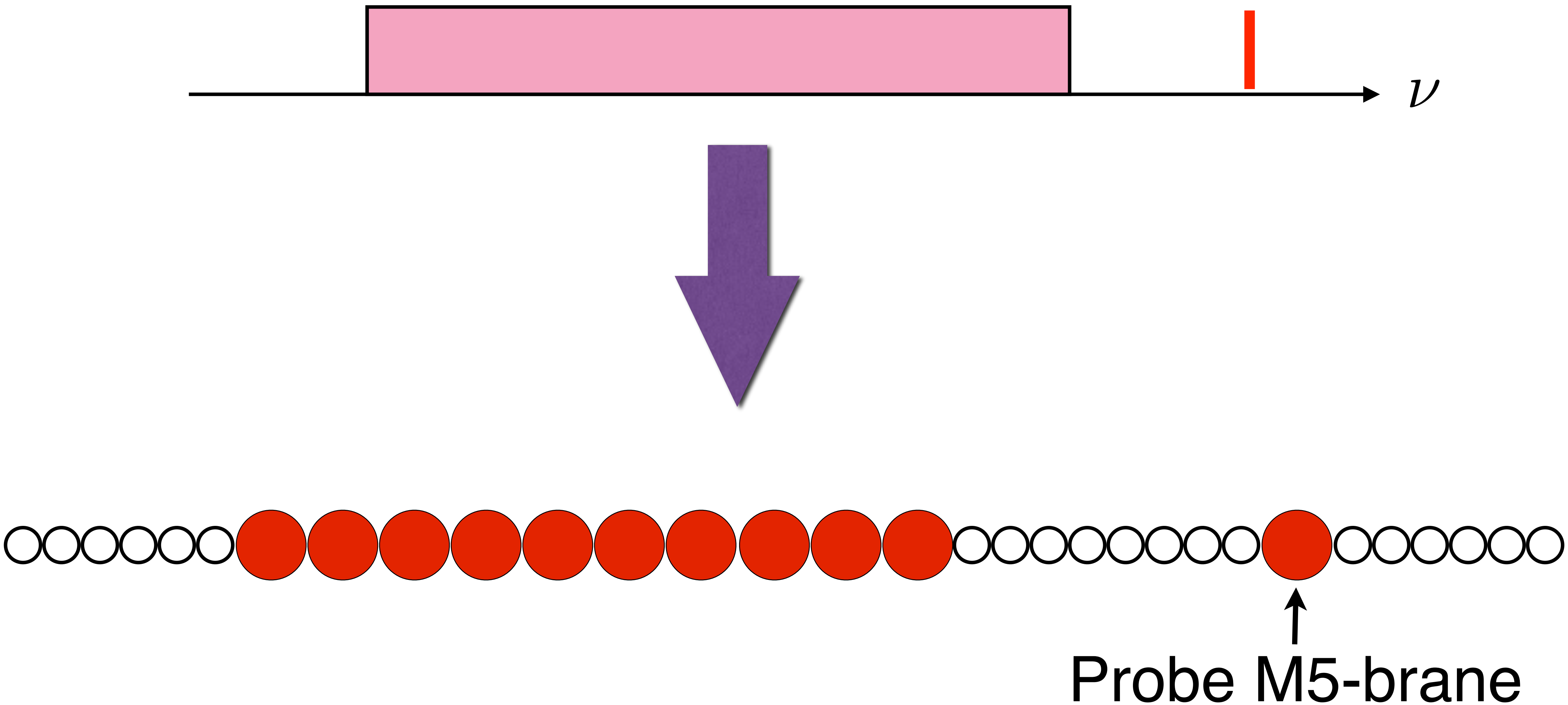
M5-braneによる計算

さっきのWilsonサーフェスの重力側の対応物は？

反対称表現の固有値分布



対称表現の固有値分布



AdS/CFT対応

$$\langle W \rangle \sim \exp(-S_{M5})$$

作用 [Pasti, Sorokin, Tonin]

$$S = T_5 \int d^6\xi \sqrt{-g} \left(\mathcal{L} + \frac{1}{4} \widetilde{H}^{MN} H_{MN} \right) - T_5 \int \left(C_6 - \frac{1}{2} C_3 \wedge H_3 \right),$$

$$T_5 = \frac{1}{(2\pi)^5 \ell_p^6}.$$

g_{MN} : induced metric,

$$\mathcal{L} = \sqrt{\det(\delta_M{}^N + i\widetilde{H}_M{}^N)}$$

$$H_3 = dA_2 + C_3$$

$$v_M := \frac{\partial_M a}{\sqrt{-g^{PQ}\partial_P a \partial_Q a}},$$

$$H_{MN} = H_{MNL} v^L, \qquad \widetilde{H}^{MN} = (*H)^{MNL} v_L$$

$AdS_7 \times S^4$

計量

$$ds^2/\ell^2 = \cosh^2\rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2\rho(d\chi^2 + \cos^2\chi d\phi^2 + \sin^2\chi d\Omega_3^2) \\ + \frac{1}{4}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\tilde{\Omega}_3^2)$$

同一視

$$\tau \sim \tau + 2\pi\frac{R_6}{r}$$

境界は $S^1 \times S^5$

Wilsonサーフェスの場所 τ, ϕ ではられる

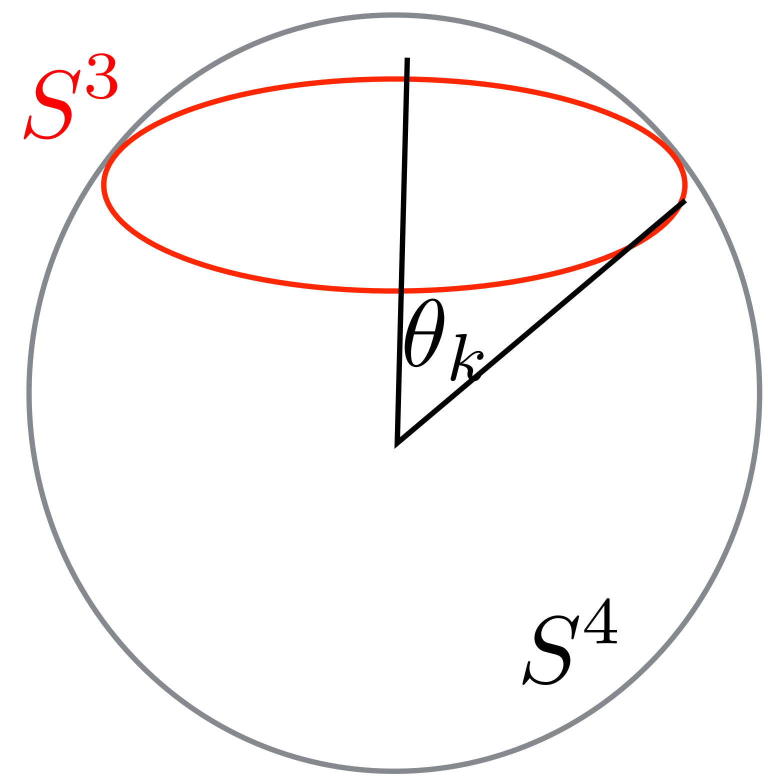
反対称表現

$$AdS_7 \times S^4$$

$$\cup \qquad \cup$$

M5 $$AdS_3 \times S^3$$

minimal



量子化条件

$$\cos\theta_k = 1 - \frac{2k}{N}$$

$$ds^2/\ell^2 = \cosh^2\rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2\rho(d\chi^2 + \cos^2\chi d\phi^2 + \sin^2\chi d\Omega_3^2)$$
$$+ \frac{1}{4}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\tilde{\Omega}_3^2)$$

on-shell作用

cut-off

$$S = 4\pi\frac{R_6}{r}Nk\left(1 - \frac{k}{N}\right)\sinh^2\rho_0$$

local counter term=境界の面積 $\propto \sinh\rho_0 \cosh\rho_0$

$$S_{\mathrm{reg}} = -2\pi\frac{R_6}{r}Nk\left(1 - \frac{k}{N}\right)$$

$$S_{\mathrm{reg}} = -2\pi \frac{R_6}{r} N k \left(1 - \frac{k}{N}\right)$$

$$\langle W \rangle \sim \exp(-S_{\mathrm{reg}}) = \exp\left[2\pi \frac{R_6}{r} N k \left(1 - \frac{k}{N}\right)\right]$$

行列模型の計算と一致

対称表現

$$AdS_7 \times S^4$$

$$\cup$$

M5

$$AdS_3 \times S^3$$

反対称の時と同様にすると

$$\langle W \rangle \sim \exp(-S_{\rm reg}) = \exp\left[2\pi \frac{R_6}{r} N k \left(1 + \frac{k}{2N}\right)\right]$$

行列模型の結果と一致

やったこと

AdS_7/CFT_6

の検証

結果

$$S^1 \times S^5$$

半径　R_6　r　一定

$$N \to \infty$$

$$\ln\langle W \rangle$$

	重力	CFT
基本表現 [Minahan,Nedelin,Zabzine]	$N\frac{2\pi R_6}{r}$	$N\frac{2\pi R_6}{r}$
k階反対称表現 New!	$N\frac{2\pi R_6}{r}k(1-k/N)$	$N\frac{2\pi R_6}{r}k(1-k/N)$
k階対称表現 New!	$N\frac{2\pi R_6}{r}k(1+k/\{2N\})$	$N\frac{2\pi R_6}{r}k(1+k/\{2N\})$

今後の課題

Bubbling geometryを用いた期待値の計算

重力側から行列模型の作用を出せないか？