ゼータ関数の解析接続

山口 哲

1　Hurwitz ゼータ関数

Hurwitz ゼータ関数は、$\mathrm{Re}\, a > 0$ として、$\mathrm{Re}\, s > 1$ で収束する級数

$$\zeta(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s} \tag{1}$$

を解析接続したものとして定義される。ここではこの解析接続についてまとめる。特に $s = -1$ の場合が弦理論でよく現れる。また η 不変量の計算に $s = 0$ の場合が現れる。Hurwitz ゼータ関数については文献 [1] の 12 章に詳しい解説がある。

2　積分表示

解析接続において有用なのは積分表示

$$\zeta(s,a) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{z^{s-1} e^{az}}{1-e^z} dz \tag{2}$$

である。ここで C は図 1 のように実軸の負の部分（s が整数ではない場合にカットを入れる）を囲む経路である。

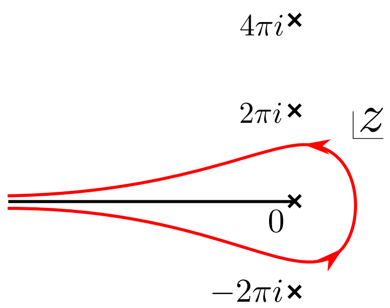

図 1

式 (2) を証明しよう。$\mathrm{Re}\, s > 1$, $\mathrm{Re}\, A > 0$ の場合、

$$\frac{1}{A^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-At} \tag{3}$$

が成り立つことを利用すると、式 (1) は

$$\zeta(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-(n+a)t} \tag{4}$$

となる。和と積分の順序を入れ替えて（入れ替えてよいことの証明は省略）和をとると

$$\zeta(s,a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt \frac{t^{s-1} e^{-at}}{1-e^{-t}} \tag{5}$$

を得る。さて、(2) の積分

$$I = \int_C \frac{z^{s-1} e^{az}}{1-e^z} dz \tag{6}$$

について考えよう。経路 C を実軸の下を $-\infty$ から 0 付近まで来る部分 C_1 と原点まわりの小さな円を反時計回りに一周する部分 C_2 と実軸上を原点付近から $-\infty$ までの部分 C_3 に分けて考える。$\mathrm{Re}\, s > 1$ の場合、C_2 の部分の積分は半径を小さくする極限で消える。

$$I_2 = \int_{C_2} \frac{z^{s-1}e^{az}}{1-e^z}dz = 0 \tag{7}$$

一方 C_1 に関する積分は $t = -z$ とおいて t について ∞ から 0 の積分に書きかえる。分岐のとり方の注意すると

$$I_1 = \int_{C_1} \frac{z^{s-1}e^{az}}{1-e^z}dz = \int_\infty^0 \frac{(-t)^{s-1}e^{-at}}{1-e^{-t}}(-dt) = -e^{-\pi is}\int_0^\infty \frac{t^{s-1}e^{-at}}{1-e^{-t}}dt = -e^{-\pi is}\Gamma(s)\zeta(s,a) \tag{8}$$

となる。最後のところでは、式 (5) の結果を用いた。同様にして C_3 の積分も

$$I_3 = \int_{C_3} \frac{z^{s-1}e^{az}}{1-e^z}dz = e^{\pi is}\Gamma(s)\zeta(s,a) \tag{9}$$

となる。まとめると

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = (e^{\pi is} - e^{-\pi is})\Gamma(s)\zeta(s,a) \quad = 2i\sin(\pi s)\Gamma(s)\zeta(s,a) = 2\pi i\frac{1}{\Gamma(1-s)}\zeta(s,a) \tag{10}$$

を得る。最後の変形では Gamma 関数の公式

$$\sin(\pi s)\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi \tag{11}$$

を用いた。したがって

$$\zeta(s,a) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}I = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_C \frac{z^{s-1}e^{az}}{1-e^z}dz \tag{12}$$

となって式 (2) を得る（証明終わり）。

3　s が 0 以下の整数の場合の値

　さて式 (2) を用いて $s = -m$ が 0 以下の整数の場合に $\zeta(-m, a)$ を評価してみよう。この場合カットがなくなるので原点での留数を拾うだけである。$s = -m$ として

$$\zeta(-m,a) = m!\,\mathrm{Res}_{z\to 0}\frac{z^{-m-1}e^{az}}{1-e^z}dz \tag{13}$$

となる。留数は、$\frac{e^{az}}{1-e^z}$ を原点まわりでローラン展開したときの z^m の係数となる。これは次のようにして計算できる。まず、Bernoulli 数 B_n が

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^\infty B_n\frac{z^n}{n!} \tag{14}$$

と定義されているのを思い出す。ちなみに B_n の具体的な値は、

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42}, \dots, \tag{15}$$

$$B_{2k+1} = 0,\ (k \geq 1 \text{ 整数 }) \tag{16}$$

である。また、$e^{az} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} z^k$ であることも用いると

$$\frac{e^{az}}{1-e^z} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)\frac{B_n a^k}{n!k!} z^{k+n-1} \tag{17}$$

となる。求める留数は、z^m の係数なので $k+n-1=m$ のところの係数を拾ってくればよい。

$$\mathrm{Res}_{z\to 0} \frac{z^{-m-1}e^{az}}{1-e^z} dz = -\sum_{k=0}^{m+1} \frac{B_{m+1-k}a^k}{(m+1-k)!k!} = -\frac{1}{(m+1)!}\sum_{k=0}^{m+1} B_{m+1-k}a^k \binom{m+1}{k} \tag{18}$$

となるので、

$$\zeta(-m,a) = -\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m+1} B_{m+1-k}a^k \binom{m+1}{k} \tag{19}$$

を得る。これを用いると、例えば

$$\zeta(0,a) = -\frac{1}{1}(B_1a^0 + B_0a^1) = \frac{1}{2} - a, \qquad \zeta(-1,a) = -\frac{1}{2}(B_2a^0 + 2B_1a^1 + B_0a^2) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a^2 \tag{20}$$

などを得る。

ちなみに、a の多項式

$$B_n(a) := -n\zeta(-n+1,a) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} B_{n-k}a^k \tag{21}$$

は Bernoulli 多項式と呼ばれる。

4 物理的手法

ここで物理的な手法（正則化と繰り込み）を用いて、発散する級数から有限の値を得ることを考えよう。結果として、上で解析接続で得た値と同じ値を得る。この部分は [2] の１章を参考にした。

ゼータ関数を定義する級数を正則化したしたもの

$$\zeta_{\mathrm{reg}}(-m,a,\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+a)^m \exp(-\epsilon(n+a)). \tag{22}$$

を考えよう。ここで ϵ は小さな正則化のためのパラメーターである。$m \geq -1$ のときには $\epsilon \to 0$ の極限でこの和は発散する。

m が非負の整数の場合、関係式

$$\zeta_{\mathrm{reg}}(-m, a, \epsilon) = \left(-\frac{\partial}{\partial \epsilon}\right)^m \zeta_{\mathrm{reg}}(0, a, \epsilon) \tag{23}$$

が成り立つ。また、$\zeta_{\mathrm{reg}}(0, a, \epsilon)$ は簡単に評価できて

$$\zeta_{\mathrm{reg}}(0, a, \epsilon) = \frac{e^{-a\epsilon}}{1 - e^{-\epsilon}} \tag{24}$$

を得る。

さて、これの繰り込みをやるわけだが、ここでは ϵ の負ベキの項のみを引き算し、$\epsilon \to 0$ の極限をとるスキーム[1)]を採用しよう。

$$\zeta_{\mathrm{ren}}(-m, a) := \lim_{\epsilon \to 0} (\zeta_{\mathrm{reg}}(-m, a, \epsilon) - (\text{ 負ベキの項 })) \tag{25}$$

言い換えると繰り込まれた値 $\zeta_{\mathrm{ren}}(-m, a)$ はローラン展開で ϵ^0 の項である。式 (23) と式 (24) を組み合わせ $z = -\epsilon$ の変数を用いると

$$\zeta_{\mathrm{ren}}(-m, a) = m! \times (\frac{e^{az}}{1 - e^z} \text{のローラン展開で } z^m \text{の係数 }) \tag{26}$$

を得る。この $\zeta_{\mathrm{ren}}(-m, a)$ は解析接続で定義された $\zeta(-m, a)$ と一致する（式 (13) とその下の文を見よ）。

参考文献

[1] T. M. Apostol, “Introduction to Analytic Number Theory,” Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.

[2] J. Polchinski, “String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string,” Cambridge University Press, 1998.

---

1) スキームによって答えが変わる場合、局所性、対称性などの観点からどのスキームを採用すべきかを考える必要がある。弦理論においては、このスキームは、(1) 導入する相殺項が局所的であることと、(2)Weyl 対称性を壊さない、という意味で正しいスキームである。有限部分を余分に引くことは (1) あるいは (2) に抵触する。