まとめ　no.12

[前回のまとめ]

静磁場のエネルギー

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2\mu_0}\int_V dV \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)^2$$

交流回路の方程式

$$L\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}I(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}.$$

[教科書 p.274-277]

[今回]

Maxwell – Ampere の法則

Maxwell 方程式完成!

[教科書 p.278-284]

8. Maxwell 方程式と電磁波

○　Maxwell-Ampere の法則

Faraday の法則復習：

磁場の時間変化が電場に影響

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \boldsymbol{0}.$$

Ampere の法則も変更が必要。

電場の時間変化が磁場に影響するはず。

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \mu_0 \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t) + C\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$$

定数Cを求めよう。

両辺の発散(divergence)をとってみる。

左辺 = $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)) = 0.$ 磁場のGaussの法則と同じ計算

右辺= $$\mu_0 \nabla \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t) + C \frac{\partial \nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}$$
$$= -\mu_0 \frac{\partial \rho(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} + C \frac{\partial \rho(\boldsymbol{r}, t)/\varepsilon_0}{\partial t}$$

電荷の保存則　　Gaussの法則

より、 $C = \mu_0 \epsilon_0$ のはず

(Maxwellが理論的に発見。後に実験で検証)。

→ Maxwell-Ampere の法則

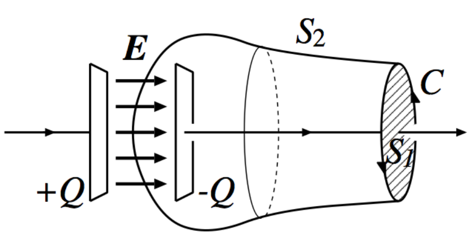
$$\boxed{\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \mu_0 \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}}$$

$$\boxed{\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \mu_0 \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}}$$

○変位電流

$i_d(\boldsymbol{r}, t) = \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}$ を電流とみなしてもよさそう。

コンデンサーのある交流回路での整合性



S_1 には電流が流れているがS_2では流れていない -> 変位電流が流れていると考えればよい。

ただし、変位電流は小さい。

交流回路で $\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{E}_0 \sin(\omega t)$

の電場が与えられているとき、

普通の電流(オームの法則) $\boldsymbol{i} \sim \sigma \boldsymbol{E}_0 \sin(\omega t)$

変位電流 $\boldsymbol{i}_d \sim \varepsilon_0 \omega \boldsymbol{E}_0 \cos(\omega t)$

よって

$\omega \ll \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ ならば変位電流は無視してよい。

普通の金属でσ ~ 10^7 Ω^{-1} m^{-1}

ε_0 ~ 10^{-11} A^2 s^2 /Nm^2 → $\omega \ll 10^{18} s^{-1}$

普通の交流回路 ω~ 50-60 Hz では無視してO.K.

○ Maxwell 方程式完成

Gaussの法則
$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\rho(\boldsymbol{r}, t)}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = 0$$

Faraday の法則
$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$

Maxwell-Ampere の法則
$$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \mu_0 \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}$$

(+ Lorentz力)
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, t) = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + q\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$$

で電磁気のすべてがわかる！

Maxwell 方程式 = スカラーが2つ、ベクトルが2つ全部で8つの方程式。未知変数は $\boldsymbol{E}, \ \boldsymbol{B}$ ベクトル の6つ。方程式が多すぎる？

実は Gaussの法則は初期条件を定めているだけ。Faraday の法則とMaxwell Ampere の法則の発散(divergence)をとると、、、

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t))+\frac{\partial\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t))=0.$$

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)-\frac{\rho(\boldsymbol{r},t)}{\varepsilon_0}\right)=0.$$

()の中身がゼロならその条件は任意の時刻で成り立つ。

Maxwell 方程式のすごいところ

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\rho(\boldsymbol{r},t)}{\varepsilon_0}\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\mathbf{0}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\mu_0\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t)+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)=q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+q\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$$

それぞれ積分系でバラバラの法則として知られていたものが、時空の各点で成り立つ一つの閉じた連立偏微分方程式系であることを示した。

○電磁波

真空中のMaxwell 方程式　$\rho = 0, \boldsymbol{i} = 0.$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = \boldsymbol{0} \quad \nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$

Faraday の法則の回転(rotation)をとってみよう。

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)) = -\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t))$$

$$= -\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$$

確かめよう。

$$\frac{\partial \nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$$

→　波動方程式が得られる。

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{0}$$

$c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$　とおいて書き直すと、

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{0}$$

なんだか振動してそう。

練習問題

13-1. Maxwell 方程式x4を覚えましょう。

13-2.（No.12の磁場のエネルギーで使った公式）

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})-\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

となることを示せ。

13.3 任意のベクトル場 Aについて

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t))=-\nabla^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t))$$

となることを示せ。

注) 外積とrotationは別物です。外積の公式はrotationには使えません。

まとめ　no.13

[今日のまとめ]

Maxwell – Ampere の法則

Maxwell 方程式完成!

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\rho(\boldsymbol{r},t)}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\boldsymbol{0}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\mu_0\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t)+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$$

[教科書 p.278-284]

[次回]

電磁波

[教科書 p.285-]