

まとめ no.13

[前回のまとめ]

[今回]

Maxwell – Ampere の法則

電磁波

Maxwell 方程式完成!

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0}$$

[教科書 p.285-298]

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

[教科書 p.278-284]

(続き) → 波動方程式が得られる。

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$$

$c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ において書き直すと、

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$$

なんだか振動してそう。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_k e^{ik_x x + ik_y y + ik_z z - i\omega t}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}$$

の形の解を探してみよう。(*係数がベクトル、関数がスカラー)

ただし $\mathbf{E}_k$ は定数ベクトル。

$$\left[-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \mathbf{E}_k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} = 0$$

より $\omega = c|\mathbf{k}|$ なら解になっている。元の式に代入、実部をとると、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_k \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - c|\mathbf{k}|t)$$

という形の解が存在することがわかる。

この解は、 $\mathbf{k}$ の方向へ進む波を表す = 電磁波

$\mathbf{k}$ の方向は任意にとれるので、 $\mathbf{k} = (k, 0, 0)$

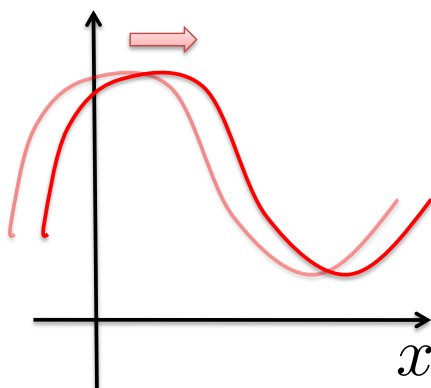
としてみると、確かにx方向への進行波。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_k \cos(k(x - ct))$$

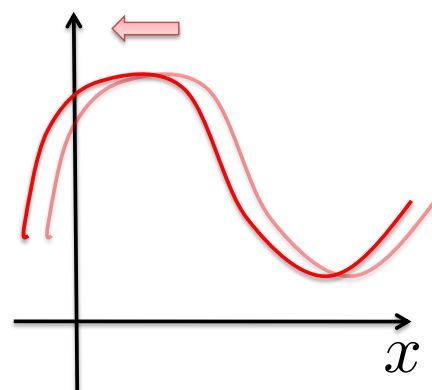
同じ位相を与える角度をみると、時間が増えると、xも増える。
= x方向へ波が進んでいる。

* $\cos, \sin$ に限らず、 $x \pm ct$ の関数は波を表す。

$$f(x - ct)$$



$$f(x + ct)$$



波の速さ : $x=ct$ より、

$$c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$$

が光の速さであることがわかる。

→ Maxwell が **光も電磁波である** とつきとめた。

電磁波のいろいろ(波長)

>1m : 電波

100 μm -1m : マイクロ波(電子レンジ) 水分子と**共鳴**

1 μm -1mm : 赤外線 (暖房器具)

380nm-760nm : 可視光

10nm-380nm: 紫外線

0.01nm-10nm: X線 (レントゲン写真) 骨の透過率低

0.01nm 以下: ガンマ線 (放射線)

○電場の向き

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_k \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - c|\mathbf{k}|t)$$

Gaussの法則微分形 $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$ より、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{i=1,2,3} \frac{\partial}{\partial x_i} E_i(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1,2,3} (\mathbf{E}_k)_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cos\left(\sum_{j=1,2,3} k_j x_j - c|\mathbf{k}|t\right) \\ &= - \sum_{i=1,2,3} (\mathbf{E}_k)_i k_i \sin\left(\sum_{j=1,2,3} k_j x_j - c|\mathbf{k}|t\right) = 0. \end{aligned}$$

* ($x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ の置き換えを利用した。)

つまり、 $\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{k} = 0$.

振動は波の進行方向に対して**垂直**。

○ 磁束密度

$$\frac{\partial B(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k}}) \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - c|\mathbf{k}|t)$$

あとで練習問題で確認。

時間積分すると(静磁場はないとする)、

$$B(\mathbf{r}, t) = \frac{(\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k}})}{c|\mathbf{k}|} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - c|\mathbf{k}|t)$$

磁束密度は、 $\mathbf{k}$ と電場の両方に直交。

電磁波は横波。

振動方向が一定の場合=偏光しているという。

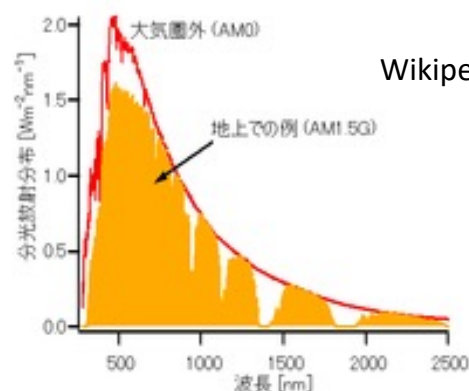
○ 一般解

$\mathbf{k}$ (波数ベクトル)の方向、大きさは任意。
一般解はいろんな $\mathbf{k}$ の重ね合わせ (Fourier 変換) で与えられる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int d^3k \mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - c|\mathbf{k}|t - \theta_{\mathbf{k}})$$

$$B(\mathbf{r}, t) = \int d^3k \frac{(\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k}})}{c|\mathbf{k}|} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - c|\mathbf{k}|t - \theta_{\mathbf{k}})$$

地表まで届く太陽光は
可視光領域380-760nm
の $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ が大きい。



Wikipediaより

○ 真空中の電磁場のエネルギー保存

$$e = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \quad \text{の時間微分をとってみよう。}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

練習問題13-2
↓

Poynting ベクトル(電磁場のエネルギー流) :

を定義すると、 $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0. \quad \text{電荷の保存則と同じ形!}$$

電磁波はエネルギーを持ち出す。

まとめ

Maxwell 方程式:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0} & \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

+ Lorentz力

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + q\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

で**電磁気のすべてがわかる。**

各積分形 -> Coulomb, Biot-Savart の法則、静電ポテンシャル、オームの法則、コンデンサー、電流の作る磁場、電磁誘導、複素インピーダンス、電磁波

○ この授業で伝えたかったこと

1. 高校の電磁気の公式は忘れてよい。
2. Maxwell 方程式+Lorentz力で全てが理解できる。
3. Maxwell 偉い。
4. ごくわずかの法則から多様な現象が生じる。それを数式のみを用いて紐解いていくという経験は、論理的な思考の訓練として、いろんな場面で役立つ(かも)。* シラバスにも「電磁気現象を題材として、(1) 物理学的なものの方と(2) 物理学の基本法則、を理解する事を目的とする。複雑に見える自然現象の中から簡潔で美しい規則性が隠れていることを実感する。」と書いてある。

練習問題14

電磁波の電場ベクトルが

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_k \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - c|\mathbf{k}|t)$$

という波動で表せるとき、Faradayの法則微分形を用いて磁束密度ベクトルを求めよ。ただし、時間によらない静磁場の成分はゼロとする。

まとめ no.14

[今日のまとめ]

電磁波

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = 0$$

横波、偏光などの性質

Maxwell偉い。

[次回]

1/29 電磁気学通論総まとめ&試験対策講座&質疑応答

2/4 期末試験

[教科書 p.285-298]