

まとめ no.14

[前回のまとめ]

電磁波

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$$

横波、偏光などの性質

Maxwell偉い。

[今回]

電磁気学通論総まとめ,
試験対策講座 & 質疑応答

2/4 期末試験

[教科書 p.285-298]

講義の全体像

1. 電場のGaussの法則

積分形

Coulombの法則

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}} \xrightarrow{\text{[講義4]}} \int_S dS \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) = \frac{\int_V dV \rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \xrightarrow{\text{[講義3]}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad \text{[講義1,2]}$$

2. 磁場のGaussの法則 $\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0}$ [講義 9] 磁気単極子はない。

3. Faradayの法則

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0} \begin{cases} \xrightarrow{\text{時間変化のないとき 渦なしの法則}} \phi = - \int_l d\mathbf{l} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) \quad \text{[講義4,5]} \\ \xrightarrow{\text{磁場の時間変化} \leftrightarrow \text{電場の変化}} \phi = - \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{[講義10]} \\ \text{発電機、変圧器} \end{cases}$$

総動員して導体、コンデンサの問題(練習問題6-1,6-2) [講義 6]

4. Maxwell Ampereの法則

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad \text{Biot-Savartの法則} \quad [\text{講義8}]$$

変位電流が無視できるとき
Ampereの法則

$$\int_C d\mathbf{l} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) = \mu_0 \int_S dS \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \longrightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \mathbf{i}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

積分形 [講義9] いろんな電流の作る磁束密度を理解

変位電流のあるときの方程式をMaxwellが完成。全体をまとめあげた。 [講義12]

5. Lorentz 力

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + q\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad [\text{講義8}]$$

Ohmの法則

電流に働く力(フレミングの法則)

総動員して交流回路の基礎方程式 [講義11] 電磁波の性質を調べた。 [講義13]

$$L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$$

必要な(高度な)数学 [実は秋学期から増えてない]

いろいろな3次元空間中の多重積分

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l d\mathbf{l}' I \mathbf{t}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad \int_S dS \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) = \frac{\int_V dV \rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

線積分 面積分 体積分

いろいろな微分演算

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r}) \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

勾配gradient 発散divergence 回転rotation
(スカラーからベクトル) (ベクトルからスカラー) (ベクトルからベクトル)

数学の定理[数学の授業ではないので結果だけ知っていればO.K.]

$$\int_V dV \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_S dS \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \quad \int_C d\mathbf{l} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) = \int_S dS [\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})$$

Gaussの発散定理(体積分と面積分の関係) Stokesの定理(線積分と面積分の関係)

講義のポイント1 : Gaussの法則 $\int_S dS \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})$
 万能すぎるスーパー公式なので抽象的に書かれている。

→問題ごとに具体化が必要。

例) 球対称な電荷分布と解答の書き方例

1. Sの記述:半径 r の球面をSとし、Gaussの法則を使う。
2. 電場と面の法線ベクトルの内積の記述:
 系の回転対称性より電場の向きは動径方向で r のみの関数。法線ベクトルも動径方向なので $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) = E(r)$ と書ける。
 $E(r)$ はスカラー関数。
3. 微小面要素 dS の記述:球座標を用いて球面を表す。微小面要素は $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
4. がんばって積分

$$\int_S dS \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) = \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi d\theta r^2 \sin \theta E(r) = 4\pi^2 r^2 E(r).$$

講義のポイント2 : 線積分 $\int_C d\mathbf{l} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) = \mu_0 \int_S dS \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})$
 万能すぎるスーパー公式なので抽象的に書かれている。

→問題ごとに具体化が必要。しかもAmpereの法則は複数の経路で磁束密度を求める必要がある[人によってはBiot-Savarの法則で求めるほうが楽かも]。

例) ソレノイドを流れる電流が作る磁束密度と解答の書き方例

1. 経路の記述:ソレノイドの軸(x軸)を通る平面上に、ソレノイドの軸と2辺が平行になるような長方形Cを考え、積分経路を内側の辺でx軸の正方向に向かうようにとり、Ampereの法則を適用する。
2. 磁束密度と経路の接線ベクトルの内積の記述:
 2辺のx軸からの距離をそれぞれ r_1, r_2 とし、その長さを l とする。ソレノイドの軸に垂直な辺では $\mathbf{B} \cdot \mathbf{t} = 0$ (仮定またはGaussの法則などで求めておく)。系の回転対称性およびx方向への並進対称性よりx方向の磁束密度はx軸からの距離 r のみの関数である。よって、 $r = r_1$ の辺上で $\mathbf{B} \cdot \mathbf{t} = B_x(r_1)$ $r = r_2$ の辺上で $\mathbf{B} \cdot \mathbf{t} = -B_x(r_2)$ となる。
3. 微小線要素 $d\mathbf{l}$ の記述:微小線要素はx軸に平行な辺では
4. がんばって積分 $d\mathbf{l} = dx \quad 0 \leq z \leq l$

$$\int_C d\mathbf{l} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) = l(B_x(r_1) - B_x(r_2)) \quad \text{注)右辺は長方形内部の電流を足しあげる。}$$

小テスト、練習問題で何を問われていたのか？

No.1 好きな言葉(成績には含まれません)

No.2 Coulombの法則の線積分を実行できるか

No.3 Gaussの法則の面積分を実行できるか

No.4 divergenceの演算ができるか、常微分方程式

No.5 gradient演算、rotation演算ができるか

No.6 いろいろ総動員してコンデンサの問題を解けるか

No. 7, 8は休み。

No.9 Biot-Savartの法則の線積分を実行できるか？ ベクトルの外積を計算できるか？

No.10 Ampereの法則のための適切な経路を選び、線積分を実行できるか？

No.11 変圧器の仕組みが理解できるか？

No.12 Ohmの法則の拡張である、コイル、コンデンサのある交流回路の方程式を解けるか？

No.13 複雑なベクトル微分演算ができるか？

No. 14 Maxwell方程式から電磁波の性質が理解できるか？(複雑なベクトル微分演算ができるか？)

期末試験前最終チェックポイント

1. 積分形Gaussの法則が書けるか？具体例での式の形、意味がわかるか？
2. 球や平面の電荷分布においてGaussの法則を用いて電場ベクトルを求められるか？
3. 電位を与える線積分の式が書けるか？具体例での式の形、意味がわかるか？
4. Ampereの法則のための適切な経路を選び、線積分を実行できるか？あるいは外積を含むBiot-Savartの法則を正しく計算できるか？
5. Gradient, divergence, rotation の定義が書けるか？
6. 交流回路の微分方程式が解けるか？(少なくとも交流電圧のない線形な場合)

ラスト1週間の勉強(例)

目標

- 60点 レポート問題、No.9以降の小テストの解答例を丸暗記する。
- 70点 レポート問題、No.9以降の小テストの解答例を理解しておく。
- 80点 レポート問題、No.9以降の小テストを自力で解けるようにしておく。
- 90点 No.1-8の小テスト、練習問題も自力で解けるようにしておく。

まとめ

Maxwell 方程式:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} & \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \mathbf{0} & \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}\end{aligned}$$

+ Lorentz力

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + q\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

で電磁気のすべてがわかる。

各積分形 -> Coulomb, Biot-Savart の法則、静電ポテンシャル、オームの法則、コンデンサー、電流の作る磁場、電磁誘導、複素インピーダンス、電磁波

(余談) Maxwell 方程式、Lorentz力の式が大事なのはわかった。ではそれらはどこから来たのか？
(質問:一つにまとめられませんか？)

実はLagrangian という一つのスカラー量を最小にするという条件がMaxwell 方程式、Lorentz力の式になることがわかっている。電磁気だけでなく(相対性理論の)重力、強い相互作用をするクォーク、グルーオン、弱い相互作用をするレプトン、WZボゾン、ヒッグス粒子、すべて一つのLagrangianを最小にするという条件に従っている。

つまり、世界を記述するたった一つの数式 [Lagrangian]があります。

$$S = \int d^4x \sqrt{-\det G_{\mu\nu}(x)} \left[\frac{1}{16\pi G_N} (R[G_{\mu\nu}(x)] - \Lambda) \right.$$

(元)阪大教授の
橋本幸士氏筆

$$- \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 \text{tr} (F_{\mu\nu}^{(i)}(x))^2 + \sum_f \bar{\psi}^{(f)}(x) i \not{D} \psi^{(f)}(x)$$

Maxwell方程式
の素はココ i=1.

$$+ \sum_{g,h} \left(y_{gh} \Phi(x) \bar{\psi}^{(g)}(x) \psi^{(h)}(x) + h.c. \right)$$

$$+ |D_\mu \Phi(x)|^2 - V[\Phi(x)] \Big]$$



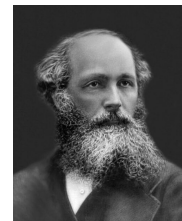
なんと指輪にもなってamazonで結構売れたらしい(今は在庫切れ)。

[驚いたことに、理論物理学者である私がデザインに関わった「指輪」が、Amazon.co.jpのレディース・リング部門で上位1〜3位を独占してしまった(2018年6月)...リングの売り上げは非営利団体である大阪大学生協の収益となるが、大学生協から大学の基金への寄付が行われているため、広い意味で科学研究へのサポートにもつながる。]

詳細は橋本さんの記事

<https://www.ameet.jp/column/2343/>

Wikipediaより



1831-1879

○ この授業で伝えたかったこと

1. 高校の電磁気の公式は忘れてよい。
2. Maxwell 方程式+Lorentz力で全てが理解できる。
3. **Maxwell 偉い**。[ちなみに熱力学にも多大な貢献]
4. ごくわずかの法則から多様な現象が生じる。それを数式のみを用いて紐解いていくという経験は、論理的な思考の訓練として、いろんな場面で役立つ(かも)。* シラバスにも「電磁気現象を題材として、(1) 物理学的なものの方と(2) 物理学の基本法則、を理解する事を目的とする。複雑に見える自然現象の中から簡潔で美しい規則性が隠れていることを実感する。」と書いてある。

R7(2025) 年度 秋冬学期

「授業改善のためのアンケート」
へのご回答をお願いします

WEB

対象者：秋冬学期の全学共通教育科目受講生

内容

秋冬学期の全学共通教育科目について

実施期間

1 月 **19** 日 (月) ~ **2** 月 **28** 日 (土)



KOAN(学務情報システム) にログイン

<https://koan.osaka-u.ac.jp/> QRコードはこちら↓

【PC版】

上部の“アンケート”タブから

【スマホ版】

HOMEの“アンケート”バナーから



学外からのアクセスOK!
PC / スマホで実施可



全学教育推進機構 全学教育企画開発部 全学共通教育部門