

この授業では、位置 \mathbf{r} , 時間 t における電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 、磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ に関する現象の (ほぼ) 全てが、Maxwell 方程式

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \rho(\mathbf{r}, t)/\epsilon_0, & \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t},\end{aligned}$$

および、速度 \mathbf{v} で動く位置 \mathbf{r} にある点電荷 q に働く Lorentz 力の式

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + q\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t),$$

で理解できることを学んでいる。この試験でもこれを確かめよう。ただし、太字はベクトルを表し、 ϵ_0 は真空の誘電率、 μ_0 は真空の透磁率である。また、電荷密度を $\rho(\mathbf{r}, t)$ 、電流密度を $\mathbf{i}(\mathbf{r}, t)$ とおいた。(線積分、面積分を扱う際は積分する曲線、曲面および接線方向単位ベクトルや法線方向単位ベクトルとの内積について正確に記述すること。)

1. [ソレノイドの磁場] x 軸を中心に導線を単位長さあたり n 回巻いた、(充分長い) ソレノイドに電流 I を x 方向の正の側から見て反時計回りに流す。
 - (a) [10 点] Maxwell 方程式より、 $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$ (変位電流) が無視できるときの Ampère の法則の積分形を求めよ。Stokes の定理は証明なしに用いてよい。
 - (b) [5 点] x 軸まわりに回転対称な系では、 x 軸を中心とする円筒座標の動径方向成分の磁束密度は存在しない。磁場の Gauss の法則積分形を用いて、これを示せ。
 - (c) [5 点] さらにソレノイドの表面の接線方向 (電流の向き) への磁束密度も存在しない。Ampère の法則の積分形または Biot-Savart の法則を用いてこれを示せ。[以下の間は磁束密度が x 成分しか持たないとして解いてよい。]
 - (d) [5 点] ソレノイド外部で磁束密度の x 成分がゼロとなることを示せ。
 - (e) [5 点] ソレノイド内部では磁束密度が位置によらずに一定になることを示せ。
 - (f) [10 点] ソレノイド内部の磁束密度の x 成分を求めよ。
2. [平面状導体板の電場、コンデンサー] (充分に広い) 面積 A の平面状の導体板に負の電荷 $-Q$ を与え、 $z = 0$ の xy 平面上に置く。導体板の厚みは無視できるものとし、面電荷密度は一様に $-Q/A$ となったとする。以下の問いに答えよ。
 - (a) [10 点] 電場、電荷密度が時間 t によらないとき、電場に関する Gauss の法則積分形を Maxwell 方程式から導出せよ。Gauss の発散定理の証明は省いてよい。
 - (b) [5 点] 以下はこの系の対称性に関する記述である。空欄①②③に入る語句をそれぞれ下の選択肢 (あ～き) から選び、記号で答えよ。
 導体板が無限に広がっていると近似しよう。このとき、系を平行移動しても状況が変わらない (①) が存在するので、電場は z のみの関数である。またその x 成分 $E_x(z)$, y 成分 $E_y(z)$ が存在すると仮定すると、(②) と矛盾するのでこれらはゼロである。さらに (③) を使うと、電場の z 成分が $E_z(-z) = -E_z(z)$ という関係を満たすこともわかる。
 - あ. x 軸まわりの回転対称性 い. y 軸まわりの回転対称性
 - う. z 軸まわりの回転対称性 え. z 軸反転に対する (鏡映) 対称性
 - お. x 軸反転および y 軸反転に対する (鏡映) 対称性
 - か. x および y 方向への並進対称性 き. z 方向への並進対称性

(裏へ続く)

- (c) [5点] 導体板の両側に作られる電場の大きさを求めよ。また、電場の向きを図示せよ。(積分形の Gauss の法則を用いる場合は、どのような表面をとるか、その表面の法線ベクトルと電場の内積について明確に説明すること。) (b) の結果を用いてよい。
- (d) [5点] もう一枚同様の形状の導体板を距離 d 離して $z = d$ の位置に平行に置き、正の電荷 Q を与えるとコンデンサーができる。2枚の板の間、外側それぞれにおける電場の大きさを求めよ。また、電場の向きを図示せよ。重ね合わせの結果、ゼロとなった電場は描かないこと。
- (e) [5点] (d) で作ったコンデンサーの間にさらにもう一枚、厚みが $d/2$ 、面積 A の導体板を下の方が $z = d/4$ 、上の方が $z = 3d/4$ の位置になるよう xy 平面に平行に挿入する。導体板に電荷は与えない。しかし、導体内部に電場は存在できないことから、 $z = d/4$ の位置の下の方に電荷 Q_1 、 $z = 3d/4$ の位置の上の方に電荷 Q_2 が一様に誘発される。 Q_1, Q_2 を求めよ。

3. [回路の方程式] 抵抗 R を持つ抵抗、自己インダクタンス L を持つソレノイド、電気容量 C を持つコンデンサーを直列につないだ回路を考えよう。

- (a) [5点] Maxwell 方程式より、Faraday の電磁誘導の法則の積分形を求めよ。Stokes の定理は証明なしに用いてよい。
- (b) [5点] 回路の方程式は Ohm の法則の外部起電力 $\phi(t)$ にソレノイドの自己誘導起電力、コンデンサーに蓄えられた電位差を足すことによって得られる。さらに、コンデンサーに蓄えられた電荷 $Q(t)$ について、保存則 $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$ が成り立つことを用いて、回路に流れる電流 $I(t)$ に関する 2 階常微分方程式は以下のようになる。

$$L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}.$$

外部起電力 $\phi(t)$ がないときに方程式を解いてみよう。時刻 $t = 0$ でコンデンサーに電荷 Q が蓄えられ、電流は流れていないものとする。また、 $R^2 < 4L/C$ とする。微分方程式を解き、 $I(t)$ を求めよ。

4. [電磁波]

電荷密度 $\rho(\mathbf{r}, t) = 0$ 、電流密度 $\mathbf{i}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$ の真空中で、Maxwell 方程式を解くと、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - c|\mathbf{k}|t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - c|\mathbf{k}|t)$$

の形の解が存在する。これらは波数ベクトル $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ の方向に進む電磁波を表す。ただし $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ は光速、 $\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = (e_x, e_y, e_z)$ 、 $\mathbf{B}_{\mathbf{k}} = (b_x, b_y, b_z)$ はそれぞれ定数ベクトルである。また、位置ベクトルの成分表示は $\mathbf{r} = (x, y, z)$ とする。以下の問いに答えよ。

- (a) [5点] 真空中の電場の Gauss の法則微分形に上の解を代入し、 $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ が \mathbf{k} に対して垂直であることを示せ。
- (b) [5点] $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$ を計算せよ。
- (c) [5点] 磁束密度の rotation の x 成分、 $[\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)]_x$ を計算せよ。(成分表示 $b_x, b_y, b_z, k_x, k_y, k_z$ を用いてよい)
- (d) [5点] Faraday の法則から磁束密度の定数ベクトルは $\mathbf{B}_{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k}}}{c|\mathbf{k}|}$ となっていることがわかる。これを b_x, b_y, b_z に代入し、 $[\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)]_x$ が $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$ の x 成分と等しいことを示せ。(これにより、Maxwell-Ampère の法則も満たされることがわかる。)