電磁気学通論 (水曜 4 限深谷) 中間試験問題　　Dec 3 2025

秋学期の授業では、位置 $\boldsymbol{r}$ における静的な電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ のふるまいのすべてが Maxwell 方程式の 2 式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})/\varepsilon_0, \qquad \nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}$$

で記述できることを学んだ。この試験でもこれを確かめよう。ただし、太字はベクトルを表し、ε_0 は真空の誘電率である。また、電荷密度を $\rho(\boldsymbol{r})$ とおいた。以下の問いに答えよ。(ベクトル量を問われている問題には 3 成分答えること。また、高校で習った公式を説明なく利用しないこと。)

1. [積分形の Gauss の法則] Maxwell 方程式の第一式を任意の体積領域 V で積分すると、Gauss の発散定理を用いて積分形の Gauss の法則が得られる。積分形の Gauss の法則を書け。答えのみでよい。ただし、V の境界面を S とし、その面における微小面要素を dS、面上の各点 $\boldsymbol{r}$ における法線ベクトルを $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ と表すこと。また、V 内部の電荷の合計を Q と表すこと。[10 点]

2. [電位] 時間変化のない電場については、任意の面 S 上で Maxwell 方程式の第 2 式と面の法線ベクトルとの内積を積分し、Stokes の定理を用いることで、経路によらない電位 (差)ϕ が定義できることがわかる。電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ が与えられたとき、任意の 2 点の電位差を与える式を書け。答えのみでよい。ただし、2 点をつなぐ線積分の経路を l とし、その微小線要素を dl、経路上の点 $\boldsymbol{r}$ における l の接線ベクトルを $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r})$ と表すこと。[10 点]

3. [導体球殻の電場、コンデンサー] 半径 a の導体でできた球殻に正の電荷 $Q > 0$ を与える。導体球殻の厚さは無視できるものとする。

   (a) [10 点] 導体球殻内外に作られる電場ベクトルの大きさを求めよ。また、電場ベクトルの向きを図示せよ。(積分形の Gauss の法則を用いる場合は、どのような表面をとるか明確に説明すること。また、その表面に対する法線と電場の内積について明確に説明すること。)

   (b) [10 点] もう一つ半径 $b > a$ の球殻を上記の球殻と中心をそろえて置き、負の電荷 $-Q < 0$ を与えるとコンデンサーができる。内側の球殻と外側の球殻の間、および外側の球殻の外側の電場ベクトルの大きさをそれぞれ求めよ。電場の様子を図示せよ。なお、重ね合わせの結果ゼロとなった電場は図に描かないこと。

   (c) [10 点] 上記のコンデンサーの内側の導体球殻と外側の導体球殻の間の電位差を求めよ。(この結果より、コンデンサーに蓄えられる電荷 Q と電位差 ϕ の間に比例関係 $Q = C\phi$ があることがわかり、係数 C を電気容量として定義できる。)

   (d) [10 点] 導体が大きさを持つとき、電荷は導体の表面に分布し、導体内部の電場はゼロになる。このことから、b の導体球殻の厚み Δb が無視できないとき、球殻の内側 (b の位置) の表面に Q_1, 外側の表面 (半径 $b + \Delta b$ の位置) に $-Q - Q_1$ の電荷が分布することになる。Q_1 の値を求めよ。

   (e) [10 点](d) と同様の問題。外側の球殻に大きさの無視できる穴があり、そこから太さの無視できる電極線を差し込み、半径 a の内側の球殻の電荷を Q から $Q/2$ に変化させた。外側の導体球殻は $-Q$ の電荷を保っているとする。この場合でも導体内部の電場はゼロでなければならず、b の導体球殻の厚み Δb が無視できないとき、球殻の内側 (b の位置) の表面に Q_2, 外側の表面 (半径 $b + \Delta b$ の位置) に $-Q - Q_2$ の電荷が分布することになる。Q_2 の値を求めよ。

(裏へ続く)

4. [微分演算] 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ における電位が定数 ρ を用いて

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\rho \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{6\varepsilon_0} \right),$$

と表されているとき、以下の問に答えよ。

(a) [10 点] $\phi(\boldsymbol{r})$ の $\boldsymbol{r}$ の位置における勾配 (gradient) を計算し、電場ベクトル $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r})$ を求めよ。ただし、$\boldsymbol{r}$ は原点以外の点とする。

(b) [10 点] (a) で得られた電場の発散 (divergence) $\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を計算せよ。

(c) [10 点] (a) で得られた電場の回転 (rotation) $\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を計算せよ。