

まとめ no.1

[前回のまとめ]

0. 電磁気学で学ぶこと
=Maxwell方程式の理解。

1.Coulombの法則
ベクトル復習(外積！)
Coulomb力

[今回]

Coulombの法則を
連続的に電荷密度が分
布する物体の体積積分と
して理解する。

[教科書 p. 18-44]

[教科書 p. 1-18]

2. 静電場の性質

目標：電場を導入し、Coulombの法則を書き直す。

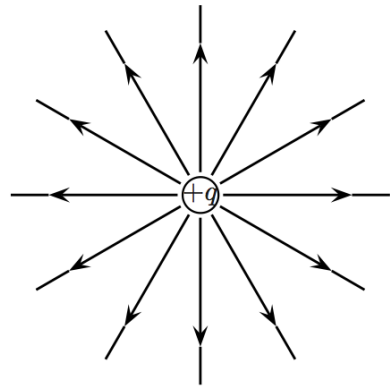
○電場

$$\begin{aligned} F_{12} &= q_1 E_2, & E_2 &= \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \\ &= -q_2 E_1, & E_1 &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \\ &= -F_{21} \end{aligned}$$

作用反作用の原理を満たす！

○ 電気力線

矢印の向き=電場の向き
密度=電場の強さ



来週やるGaussの法則のイメージには有用。

時間変化するときは役に立たない。
重ね合わせの原理も説明できない。
講義ではほとんど使わない。

○重ね合わせの原理

r_i の位置にある電荷 q_i が r の位置に作る電場は

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

N個の電荷が作る電場は、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i^N \mathbf{E}_i(\mathbf{r})$$

で与えられる。

重ね合わせの原理は当たり前ではなく、電磁気学の重要な性質

(Maxwell方程式の線形性に起因する)。

○領域V内に連続分布しているとき

$\boldsymbol{r}' = (x', y', z')$ の位置にある電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r}')$ を持つ微小領域 $dV' = dx' dy' dz'$ が $\boldsymbol{r}$ に作る微小電場は

$$d\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho(\boldsymbol{r}')dV'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$

これを積分して体積積分で表す。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \rho(\boldsymbol{r}') \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$

面上Sに面電荷密度 $\sigma(\boldsymbol{r}')$ で分布しているとき面積分

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S dS' \sigma(\boldsymbol{r}') \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$

線上 l に線電荷密度 $\lambda(\boldsymbol{r}')$ で分布しているとき線積分

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l dl' \lambda(\boldsymbol{r}') \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$

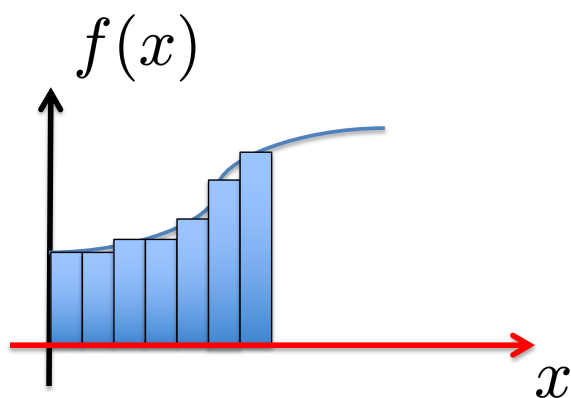
○線積分復習

普通の積分

= 底辺 dx 高さ $f(x)$

の長方形の面積の和

$\int dx f(x)$
(底辺はまっすぐで一樣)



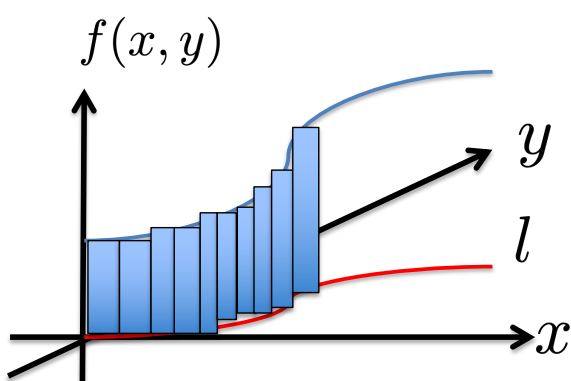
線積分

底辺がぐにゃぐにゃしている

[ここがポイント]

長方形の和をとることは同じ。

$$\int_l dl' f(\mathbf{r}'(l'))$$



○線積分の手順 $\int_l dl' f(\mathbf{r}'(l'))$

1. 積分したい曲線をパラメータ化、被積分関数をそのパラメータで表す。(被積分関数がベクトルの場合は、各成分がそれぞれ独立な関数で3つの積分を実行すると思えばよい。)

例) 直線 $f(\mathbf{r}'(l')) \rightarrow f(x)$ 円弧 $f(\mathbf{r}'(l')) \rightarrow f(\theta)$

2. パラメータが微小量動くときに実際の曲線が動く長さを計算する。[ここがポイント]

例) 直線 $dl' = dx$ 円弧 $dl' = d\theta \times \frac{2\pi a}{2\pi} = a d\theta$

3. 積分を実行。

例) 直線 $\int_l dl' f(\mathbf{r}'(l')) = \int_0^l dx f(x)$ 円弧 $\int_l dl' f(\mathbf{r}'(l')) = \int_0^{\theta_1} d\theta a f(\theta)$

○面積分の手順 $\int_S dS' f(\mathbf{r}')$

1. 積分したい曲面をパラメータ化、被積分関数をそのパラメータで表す。

例) 平面 $f(\mathbf{r}') = f(x, y)$ 球面 $f(\mathbf{r}') = f(\theta, \phi)$

2. パラメータが微小量動くときに実際の曲面が動く面積を計算する。

例) 平面 $dS' = dxdy$ 球面

3. 積分を実行。 $dS' = a \sin \theta d\phi \times a d\theta = a^2 \sin \theta d\theta d\phi$

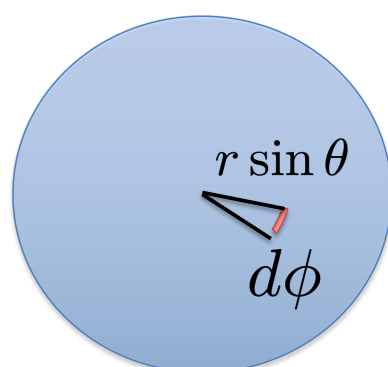
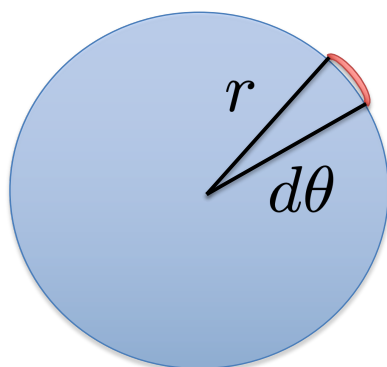
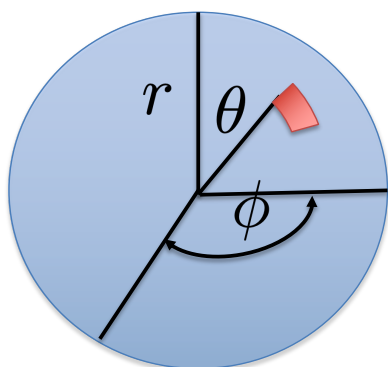
例) 平面 球面

$$\int_S dS' f(\mathbf{r}') = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy f(x, y) \quad \int_S dS' f(\mathbf{r}') = \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta \int_{\phi_0}^{\phi_1} d\phi a^2 \sin \theta f(\theta, \phi)$$

○球面上の微小面積

横から見た図

上から見た図



$$dS' = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

結果が不安だったら $f=1$ を積分して球面の面積になることを確かめればよい。

$$\int dS' = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta = 4\pi r^2$$

○体積積分の手順 $\int_V dV' f(\mathbf{r}')$

1. 積分したい体積をパラメータ化、被積分関数をそのパラメータで表す。

例) 直方体 $f(\mathbf{r}') = f(x, y, z)$ 球 $f(\mathbf{r}') = f(r, \theta, \phi)$

2. パラメータが微小量動くときに実際の領域が動く体積を計算する。

例) 直方体 $dV' = dx dy dz$ 球 (半径 r の微小球面に高さ dr をかけるだけ)

3. 積分を実行。 $dV' = r \sin \theta d\phi \times r d\theta \times dr = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$

例) 直方体

球

$$\int_V dV' f(\mathbf{r}') = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{z_0}^{z_1} dz f(x, y, z) \quad \int_V dV' f(\mathbf{r}') = \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta \int_{\phi_0}^{\phi_1} d\phi \int_{r_0}^{r_1} dr r^2 \sin \theta f(r, \theta, \phi)$$

○線積分、面積分、体積積分の覚え方

直交座標ではごく普通の積分。

$$\int dx f(x) \quad \int dx dy f(x, y) \quad \int dx dy dz f(x, y, z)$$

曲がるとおつりがくつつく。

円: $dl' = a d\theta$

円柱側面: $dS' = a d\theta dz$ 球面:

球: $dV' = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$ $dS' = a^2 \sin \theta d\theta d\phi$

円柱: $dV' = r d\theta dr dz$

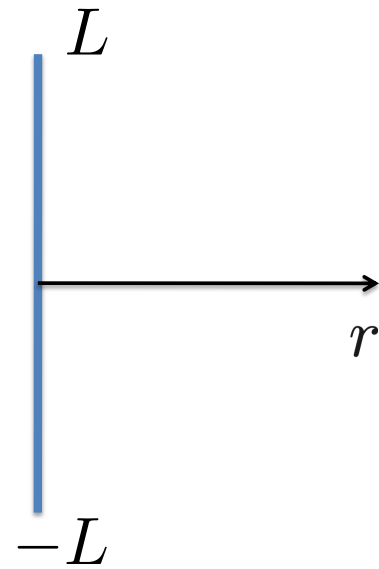
くらいを覚えておけばO.K. (自信のないときは $f=1$ を積分して確かめる。)

練習問題1 (教科書 p.28-34
棒状の電荷分布による電
場と同じ)

公式

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l d\mathbf{l}' \lambda(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

を用いて、太さを無視できる
長さ $2L$ の線分上に電荷が
一様に線電荷密度 λ で
分布しているとき、この線
分の中心から垂直に距離
 r 離れた位置における電
場を求めよ。



まとめ no.2

[今日のまとめ]

Coulombの法則を

連続的に電荷密度が分

布する物体の体積(面、線) [教科書 p. 45-57]

積分の与える電場を用い
て理解した。

[次回]

Gauss の法則

[教科書 p. 18-44]