まとめ　no.2

[前回のまとめ]

Coulombの法則を

連続的に電荷密度が分

布する物体の体積(面、線)

積分の与える電場を用い

て理解した。

[教科書 p. 18-44]

[今回]

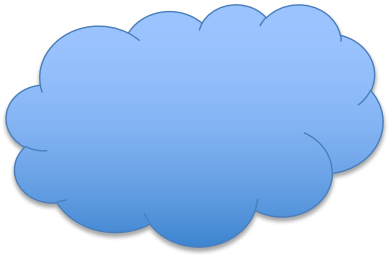
Gauss の法則

[教科書 p. 45-57]

3. Gauss の法則(積分形)

目標 :

$$\int_S dS\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



Q : Sの内部にある全電荷。

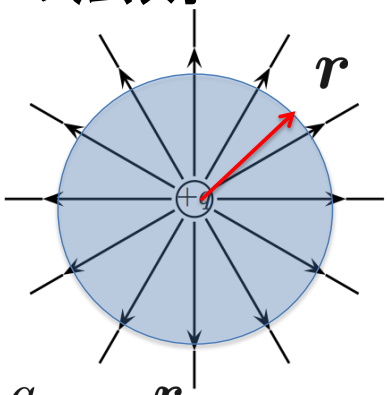
左辺は面積分。

$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$:　法線ベクトル (面Sに垂直な単位ベクトル)

をCoulombの法則から導く。

・点電荷におけるGauss の法則

電荷 qを原点におき、
半径 r の球面で囲まれた
領域Vを考える。



球面上の点 $\boldsymbol{r}$ では

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}|^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$$

Coulombの法則

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

は半径rの球面上の定数。

なので、

$$\int dS\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{2\pi} d\phi r^2\sin\theta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\times 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

- 半径 r によらない！
- 球面を変形しても同じ結果！

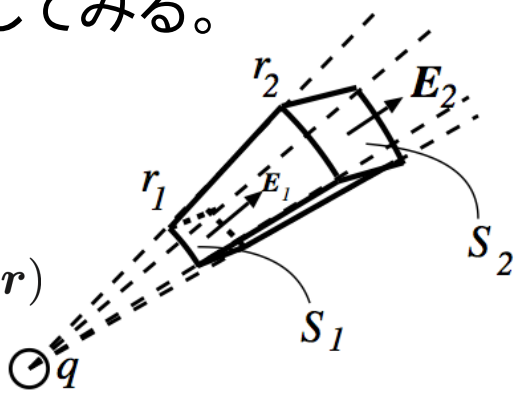
(証明)一部分を引っぱりだしてみる。

側面では、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n} = 0.$

なので

$$\int_{S_1} dS\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = \int_{S_2} dS\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$$

を示せばよい。



S_1, S_2 の面積はr_1,r_2の2乗に比例。

電場はr_1,r_2の2乗に反比例。両辺 $= \dfrac{qd\Omega}{4\pi\varepsilon_0}$

注)dΩ: 立体角(単位球面で切り取られる面積)

よって、任意の閉曲面Sについて

$$\int_S dS\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

・重ね合わせの原理より、複数電荷があっても同じ。

$$\int_S dS\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

・連続分布しているときも同じ。

$$\int_S dS\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = \frac{\int_V dV\,\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0}$$

V：Sの囲む体積

積分形のGaussの法則

注1) 内部に電荷がないときは、、、

$$\int_S dS\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = 0.$$

（電場=0ではない！表面Sへの出入りが同じ。）

注2) Gauss の法則を導くのに使ったのはCoulombの法則のみ。

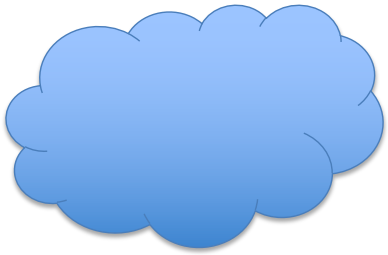
* Coulombの法則とGaussの法則は等価！

* 系の対称性が高いとき、Gaussの法則のほうが楽に電場を求められる。

4. Gauss の法則(微分形)

目標 :

積分形のGaussの法則



$$\int_S dS\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = \frac{\int_V dV\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0}$$

をGaussの発散定理を用いて書き直して、



$$\int_V dV\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\int_V dV\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0}$$

微分形のGaussの法則を導く。

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0}$$

・発散(divergence)の定義

任意のベクトル$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ について

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{\partial A_x(\boldsymbol{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\boldsymbol{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\boldsymbol{r})}{\partial z}$$

※

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$ と覚えてもよい(直交座標)。

$\frac{\partial}{\partial x}$ は偏微分。ほかの変数を定数だと思って行う微分のこと。

・Gaussの発散定理(数学)

任意のベクトル$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ について

$$\int_V dV \nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int_S dS \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$$

がなりたつ。中身の情報　=　境界の情報

・1次元の例

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}(x) = \frac{dA(x)}{dx}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \nabla \cdot \boldsymbol{A}(x) = \int_{x_0}^{x_1} dx \frac{dA}{dx} = A(x_1) - A(x_0)$$

直感的な理解：　要するに、微分された関数の積分=境界の値で書ける。

3次元のちゃんとした証明は次回。

[Gaussの法則を用いるときは、どのような曲面をとるか明確に説明すること。また、法線ベクトルと電場の内積を明確に示すこと。]

練習問題3-1

半径Rの球面上に一様な面電荷密度σで分布する電荷による半径rの位置における電場を求めよ。(r<R, r>=Rで場合分け)全電荷をQとする。

練習問題3-2

無限平面に一様な電荷密度 σで分布する電荷を考える。

平面から距離 z の位置における電場を求めよ。

まとめ　no.3

[今日のまとめ]

Gauss の法則積分形

$$\int_S dS\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = \frac{\int_V dV\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0}$$

Gauss の法則の微分形

(途中)

[教科書 p. 45-57]

[次回]

Gauss の法則の微分形　続き

[教科書　p. 57-83]