まとめ　no.3

[前回のまとめ]
Gauss の法則積分形

$$\int_S dS\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = \frac{\int_V dV\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0}$$

Gauss の法則の微分形
(途中)

[教科書 p. 45-57]

[今回]
Gauss の法則の微分形
続き

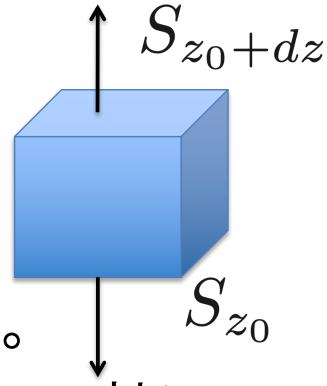
[教科書 p. 57-83]

・Gaussの発散定理(数学)
任意のベクトル$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ について

$$\int_V dV\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int_S dS\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$$

がなりたつ。中身の情報　=　境界の情報

・ちゃんとした3次元の証明



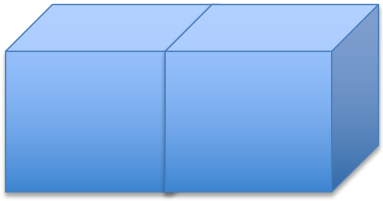
$\boldsymbol{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ の位置にある
辺の長さ dx, dy, dz の
微小な直方体の表面積分を考える。
z座標が z_0 および $z_0 + dz$ にある xy 軸に
平行な面 S_{z_0}, S_{z_0+dz} に対し法線ベクトルは
$-\boldsymbol{e}_z$ および $+\boldsymbol{e}_z$ 。よって、

$$\int_{S_{z_0}+S_{z_0+dz}} dS\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = \int dxdy\,[A_z(x,y,z_0+dz) - A_z(x,y,z_0)]$$
$$\sim \int dxdy \frac{\partial A_z(x,y,z_0)}{\partial z} dz \sim \frac{\partial A_z(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} dxdydz$$

他の面も同様に、

$$\int_S dS\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) \sim \left[\frac{\partial A_x(x_0,y_0,z_0)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(x_0,y_0,z_0)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\right] dxdydz$$
$$= \nabla\cdot\boldsymbol{A}(x_0,y_0,z_0)dxdydz$$

次に2つの微小直方体を(x方向に)くっつけてみる。くっつけた面の積分は相殺するので、



$$\int_{S_1+S_2} dS\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = \int_{S_{1+2}} dS\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$$
$$= (\nabla\cdot\boldsymbol{A}(x_0,y_0,z_0) + \nabla\cdot\boldsymbol{A}(x_0+dx,y_0,z_0))dxdydz$$

これを無限個積み重ねて、

$$\int_S dS\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = \int_V dV\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

が得られる。これをGaussの発散定理という。

これを用いてGaussの法則を書き直すと、

$$\int_V dV\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\int_V dV\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0}$$

どんな体積でも成り立つはずなので、被積分関数が等しい:

$$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0}}$$

微分形
Gaussの法則

注) Gaussの法則(微分形)を求めるために必要なのはCoulombの法則だけ。 逆にGaussの法則からCoulombの法則を導くこともできることが知られている。しかもGaussの法則は時間変化する電場についても成り立つ。

[Gauss 偉い。]

$$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\rho(\boldsymbol{r},t)}{\epsilon_0}}$$

実は、これがMaxwell方程式の一つ目。

(Coulombの法則は忘れてよい。)

5. 静電ポテンシャル(電位)

目標：時間依存しない静電場には

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r}) = -\left(\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial x}, \frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial y}, \frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial z}\right)$$

この微分を勾配(gradient)という。

となる$\phi(\boldsymbol{r})$が存在することを理解する。

スカラー量なので電場より便利なこともある。

Gaussの法則　　->　　Poisson 方程式

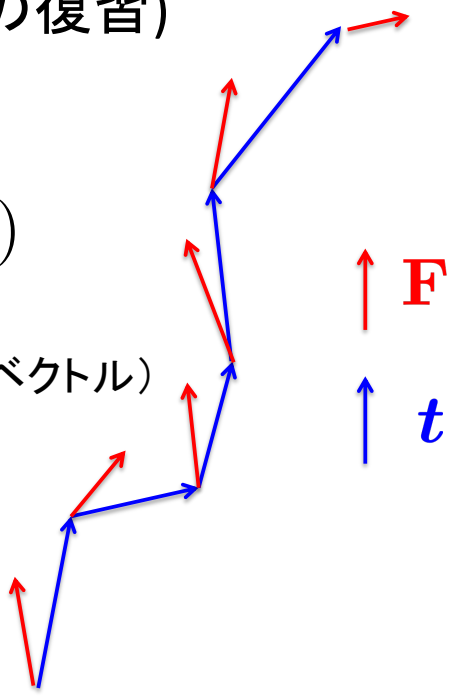
$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad -\nabla^2\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}$$

○保存力

経路によらない位置エネルギーが定義できる力を保存力という。(力学の復習)

仕事＝エネルギー

$$W = \int_l dl' \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{t}(\boldsymbol{r})$$



$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r})$：接ベクトル（接線方向単位ベクトル）

重力のとき

$$W = mgh$$

は“高さ”のみの関数。

(先週の復習) 静電場も保存力

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$$

q は変化しないので電場の線積分だけ考える。

-> 静電ポテンシャル＝電位の存在。

$$\phi = -\int_l dl\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r})$$ 単位はV.

l：電位差をみる経路　　$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r})$：経路上の接線方向単位ベクトル

エネルギーに直すときは、動かした電荷をかけて

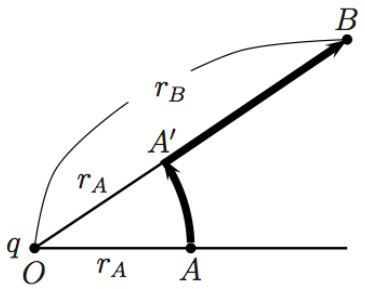
$$W = q\phi$$

教科書ではVを用いていますが体積Vと間違えやすいのでφ(ファイ)を使います。

〇点電荷で確かめよう。

原点に電荷q があるときの電場

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$$



AからBに動かしたとき、電位差は

$$\phi = -\int_l dl\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r})$$

$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r})$ はAA′間は円周方向、A′B間は動径方向。

$$= -\int_A^{A'} dl0 - \int_{A'}^{B} dl\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$$

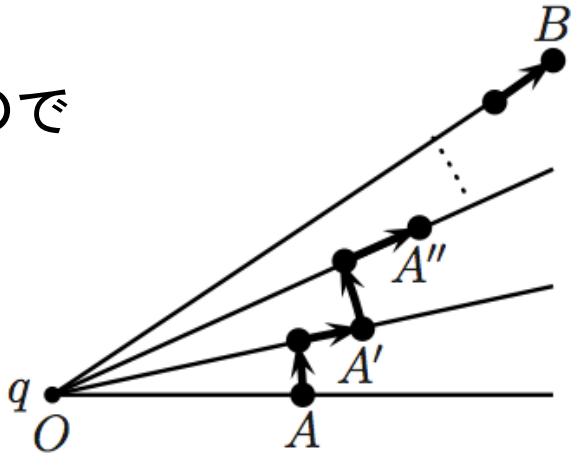
$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B} dr\frac{1}{r^2}$$

A′B間は動径方向の座標rをパラメータとして $\int_{A'}^{B} dl = \int_{r_A}^{r_B} dr$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right].$$

結果は r_A と r_B にしかよらない。

もっと複雑な経路のとき
円周方向積分はゼロなので



$$\phi_B - \phi_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{A'}} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_A} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{A''}} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{A'}} + \cdots + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_B} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_B} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_A}$$

ギザギザを細かくしていけば
任意の経路が描けるから結局電位差
は経路によらない。

$\boldsymbol{r}_A$ を無限遠にとり、そこの電位をゼロとすると
(位置エネルギーはどこをゼロとしてもよい)
$\boldsymbol{r}_B$ を任意の座標　$\boldsymbol{r}$　でおきかえて

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}$$　(単位はＶ)

(例題) 重要！このとき、点電荷の作る電場が

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$$

を満たす。

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{|\boldsymbol{r}|} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{x}{|\boldsymbol{r}|^3}\right]$$

を使う。

・複数の電荷

重ね合わせの原理より

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|}$$

・連続分布しているとき

体積分布 $$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV' \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

面分布 $$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dS' \frac{\sigma(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

線分布 $$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dl' \frac{\lambda(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

電位はスカラーなので電場より便利なことがある。

練習問題

4-1 点電荷 q の作る電場は電荷の位置を原点として成分表示すると

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x,y,z)}{r^3}$$

である。ただし、$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ である。

$\boldsymbol{r}$ の位置で $\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めよ。

ただし $r \neq 0$ とする。Maxwell方程式は成り立つか？

4-2 (教科書 p.65 に類似問題)

無限に広い平らな厚さ d の板の内部に一様な密度 ρ で電荷が分布している。

微分形のGaussの法則を用いて電場を求めよ。

まとめ　no.4

[今日のまとめ]

Gauss の法則

=Maxwell方程式の第1式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\rho(\boldsymbol{r},t)}{\epsilon_0}$$

静電ポテンシャル(電位)

[教科書 p. 57-83]

[次回]

Stokesの定理

Maxwell方程式第２式

Poisson 方程式

[教科書　p.84-]