# まとめ　no.4

[前回のまとめ]

Gauss の法則

=Maxwell方程式の第1式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\rho(\boldsymbol{r},t)}{\epsilon_0}$$

静電ポテンシャル(電位)

[教科書 p. 57-83]

[今回]

Stokesの定理

Maxwell方程式第2式

導体

[教科書　p.84-118]

## 6. 静電場の微分法則

○ Stokesの定理

外積の定義と違うので注意！

・回転　rotation の定義

$$\nabla \times \boldsymbol{A} \equiv \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

静電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r})$ の rotationを計算しよう。

$x$ 成分は

$$[\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})]_x = \frac{\partial}{\partial y} E_z(\boldsymbol{r}) - \frac{\partial}{\partial z} E_y(\boldsymbol{r})$$
$$= -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\phi(\boldsymbol{r}) + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\phi(\boldsymbol{r}) = 0.$$

他の成分もゼロ。 ⇒ $\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}$$

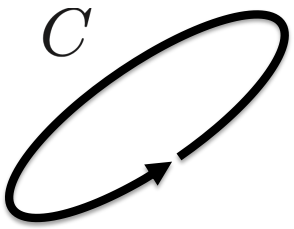
渦なしの法則：Maxwell方程式の第2式
(の時間変化のない特別版)

*本当は　$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \dfrac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \boldsymbol{0}$

磁束密度

◯積分形もある。

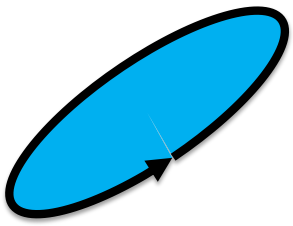
$$\int_C dl\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{t}(\boldsymbol{r}) = 0$$




閉曲線を描く線積分

曲線に沿った接線方向単位ベクトル

まず任意のベクトル場についてStokesの定理を示す。



C

Cで囲まれた面をSとする。

するとベクトル場　$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ に対して次が成り立つ。

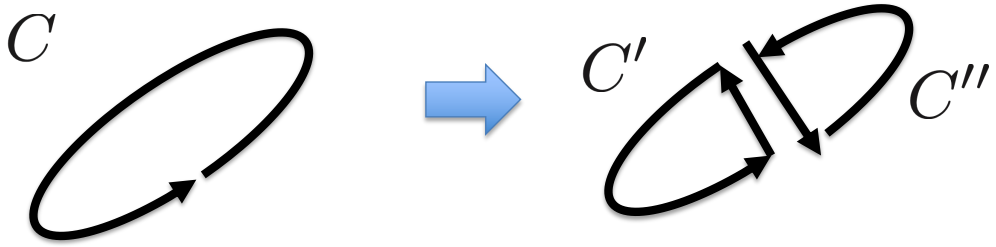
$$\int_C dl\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{t}(\boldsymbol{r}) = \int_S dS[\nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})] \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$$

面積分

法線方向単位ベクトル

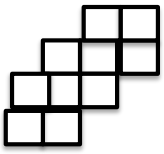
Stokesの定理証明

線積分を2つに分割してみる。




境界の寄与はキャンセルすることに注意。

もっと細かくして正方形($C_i$ で表す)で分割すると



$$\cdots \int_C dl\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r}) = \sum_i \int_{C_i} dl_i \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i)\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r}_i)$$

微小な長方形について

微小な線上のベクトルは始点または終点の値から不変と近似してよい。

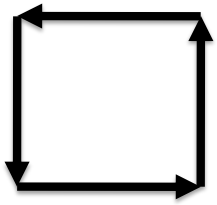
$$\int_{C_i} dl_i \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i)\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r}_i) = A_x(x,y,z)dx + A_y(x+dx,y,z)dy$$

$$- A_x(x,y+dy,z)dx - A_y(x,y,z)$$

$$= \frac{\partial A_y}{\partial x}dxdy - \frac{\partial A_x}{\partial y}dxdy$$ Taylor展開

$$= [\nabla\times\boldsymbol{A}]_z dxdy$$

$$= \int_{S_i} dS[\nabla\times\boldsymbol{A}]\cdot\boldsymbol{n}$$



* xy平面上の法線ベクトルは $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_z$

よって、

$$\int_C dl\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r}) = = \sum_i \int_{S_i} dS_i[\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i)]\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}_i)$$

$$= \int_S dS[\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})]\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$$

証明終

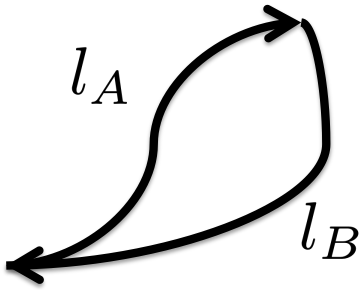
〇積分形の渦なしの法則

電場ベクトルについて代入すると、

$$\int_C dl\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r}) = \int_S dS(\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}))\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = 0.$$

Maxwell方程式第二式

これは、電位が経路によらないことと等価：




$$\int_{l_A} dl\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r}) = \int_{l_B} dl\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r})$$

* 経路を逆向きに線積分すると符号が変わる。

# 7. 導体と静電場

〇導体と絶縁体

導体=電場がかかると電流が流れる物質

絶縁体=電流が流れない物質

導体の内部で、

時間変化のないとき=電流がない=電場がない

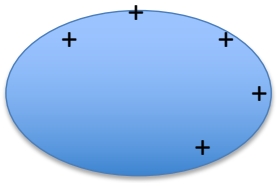
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0. \qquad -\nabla\phi(\boldsymbol{r}) = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \phi(\boldsymbol{r}) = \text{定数}$$

導体表面で電位が一定という境界条件が与えられるので、問題が解きやすい場合がある。

## ○導体と静電場

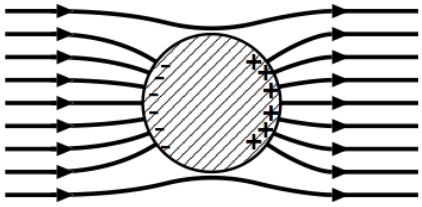
・導体に電荷を与えると、全て表面に集まる。



(内部にあるとすると、
Gaussの法則より内部に
電場が生じてしまう。)

・導体表面のすぐ外側の電場は表面に垂直(平行成分があるとその方向に電荷が流れてしまう。)

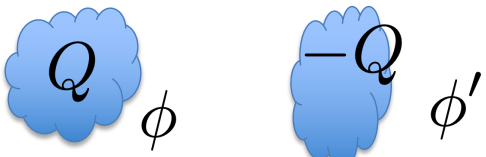
・電荷ゼロの導体に電場をかけると、
電場を打ち消すために誘発電荷が生じる。



## ○コンデンサ

2個の導体に電荷Q, -Qを与えると、コンデンサができる。

コンデンサとは




「電気を蓄える・放出する機能」、「直流電流を遮り、交流電流を通す」機能をもったもの。

それぞれの電位の差と電荷Qには比例関係がある。

$$Q = C\Delta\phi \qquad \Delta\phi = \phi - \phi'$$

Cを電気容量という。単位は F(ファラッド) = C/V.
電気容量はコンデンサの形状などに依存する。

# 講義では説明しなかったが教科書には書いてあることまとめ

極座標表示の gradient, rotation

デルタ関数：一点だけで無限大、あとはゼロ、積分すると1という不思議な(超)関数。点電荷を表すとき使える。[電子の電荷は点電荷なのか、広がりを持っているのかは実は深淵な問題。今のところ素粒子論では点として扱う。]

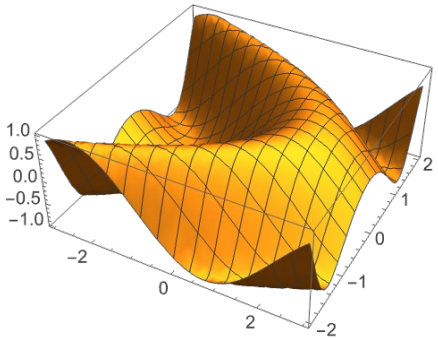
補足

## 1. Gradient[勾配]の意味

1次元だったら $\nabla\phi(x) = \dfrac{d\phi(x)}{dx}$

これは $\phi(x)$ という関数の点 $x$ における傾きを表す。

では3次元空間の関数 $\phi(\boldsymbol{r})$
の"傾き"はどう表せばよいか？




x, y, z それぞれの方向にどれだけ傾いているかを計算すればよい。

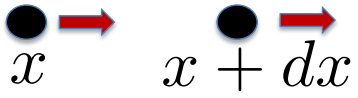
$$\nabla\phi(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial x}, \frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial y}, \frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial z}\right)$$

このベクトルは点 $\boldsymbol{r}$ における最も急な傾きの方向を指す。

2. divergence [発散]の意味

1次元のx, x+dx の2点における電場 Ex の値の差を比べてみる。同じ方向、同じ大きさのときは

$$E_x(x+dx) - E_x(x) = 0.$$




電場はxとx+dxの間を素通りしている(出入りが同じ)。

電場が逆方向を向いていたら-> 差がゼロでなくなる。

(図の場合出ていくほうが多い)




* 間に電場の源があるはず(電荷)。

これを長さdxで割ると単位長さあたりの電場の “出入り(発散、湧き出し)”が得られる。$dx$ がゼロの極限で

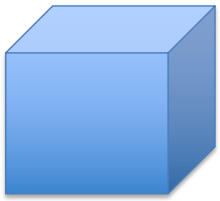
$$\lim_{dx\to 0} \frac{E_x(x+dx) - E_x(x)}{dx} = \frac{\partial E_x(x)}{\partial x} = \nabla \cdot \boldsymbol{E}$$

3次元では、dx dy dz の直方体の中で

電場が複雑な流れを作っている可能性があるが、

3方向それぞれの “出入り”を足せば

合計の出入りがわかる。

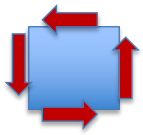


$$\frac{\partial E_x(\boldsymbol{r})}{\partial x} + \frac{\partial E_y(\boldsymbol{r})}{\partial y} + \frac{\partial E_z(\boldsymbol{r})}{\partial z} = \nabla \cdot \boldsymbol{E}$$

3. rotation [回転]の意味

z方向を軸としてzが一定平面の一辺が$dl$の長方形にそって電場ベクトルが渦を巻いていたとする。Q.この渦をどう測ればよいか？ A. 全部足せば良い。

*それぞれの電場は辺の中点の位置におけるベクトルとする。



$$E_x(x+dl/2,y,z)+E_y(x+dl,y+dl/2,z)$$
$$-E_x(x+dl/2,y+dl,z)-E_y(x,y+dl/2,z)$$

$dl$ で割って整理すると単位長さあたりの渦が

$$\frac{E_y(x+dl,y+dl/2,z)-E_y(x,y+dy/2,z)}{dl}-\frac{E_x(x+dl/2,y+dl,z)-E_x(x+dl/2,y,z)}{dl}$$

$dl\to 0$ の極限をとると、

$$\to \frac{\partial E_y(x,y,z)}{\partial x}-\frac{\partial E_x(x,y,z)}{\partial y}$$

つまり、rotation のz成分はz軸に巻く渦を測っている。

電場はz軸だけでなくx,y軸まわりにも渦を作っているかもしれない。それを全部まとめて表したベクトルが

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\left(\frac{\partial E_z(\boldsymbol{r})}{\partial y}-\frac{\partial E_y(\boldsymbol{r})}{\partial z},\frac{\partial E_x(\boldsymbol{r})}{\partial z}-\frac{\partial E_z(\boldsymbol{r})}{\partial x},\frac{\partial E_y(\boldsymbol{r})}{\partial x}-\frac{\partial E_x(\boldsymbol{r})}{\partial y}\right)$$

*静電場のときrotationはゼロなので電場は決して渦を作らない。

まとめると、

1. Gradient[勾配] は関数の3次元的な傾きを表す。

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi$$ 電位の傾きが電場

2. divergence[発散]は微小領域における電場の出入り。

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\rho(\boldsymbol{r},t)}{\epsilon_0}$$ 電場の出入りが中の電荷密度と等しい

3. rotation[回転]は微小領域の電場の渦を(x,y,z)軸まわりにそれぞれ測ったもの

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{0}$$ 電場は渦を作らない

https://irobutsu.a.la9.jp/mybook/ykwkrEM/HintAndAnswer.pdf

練習問題 5　(教科書p.131章末演習問題3-1参照)

3次元空間に $\phi = kx^2$ ( $k$ は定数)
で表される電位があったとする。

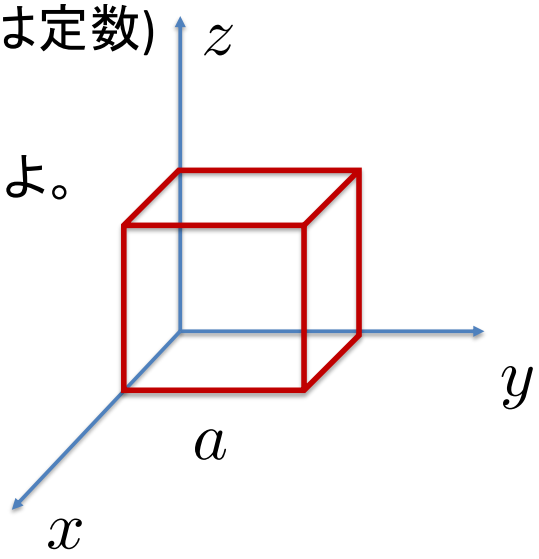
a) 電場 $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ を求めよ。

b) 電場のdivergence

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}$$

を計算せよ。

c)電場の rotation $\nabla \times \boldsymbol{E}$
を計算せよ。




d) 図のような一辺 $a$ の立方体
の中にはどれだけの電荷が
入っているか微分形のGaussの法則から計算せよ。

# まとめ　no.5

[今日のまとめ]

静電ポテンシャル(電位)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r})$$

Stokesの定理

$$\int_C dl\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{t}(\boldsymbol{r}) = \int_S dS[\nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})] \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$$

Maxwell方程式第2式

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}$$

導体

[教科書 p. 84-118]

[次回]

コンデンサー

[教科書　p. 119-142 ]