熱物理学演義 No.2 (2025 年 10 月 08 日)

小テスト問題：以下の Pfaff 形式が完全微分か否かを判定せよ．完全微分である場合には原始関数 $F(x, y)$（Pfaff 形式が dF に等しくなるような $F(x, y)$）を求めよ．

(1) $(4x + 3y)dx + (3x + 2y)dy$.

(2) $xydx + 2xdy$.

———————————————- ここまで小テスト ———————————————-

問題 1：

物質量 n を固定して考えたとき，状態方程式が成り立っているため，圧力 p，温度 T，体積 V は互いに独立な変数でない．体膨張率を $\alpha = V^{-1}(\partial V/\partial T)_p$，等温圧縮率を $\kappa_T = V^{-1}(\partial V/\partial p)_T$ と定めると，

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{V}\left(\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp\right) = \alpha dT + \kappa_T dp$$

が成り立つ．

(1) 上式と，変数 x を固定することが $dx = 0$ に等価であることに注意して，以下の偏微分係数を α，κ_T，V のうち必要なものを用いて表せ．

 (a) $(\partial p/\partial V)_T$

 (b) 定積圧力係数 $\beta = (\partial p/\partial T)_V$

(2) 理想気体の状態方程式は，$pV = nRT$ である．理想気体の体膨張率 α，等温圧縮率 κ_T，定積圧力係数 β をそれぞれ直接的に求め，(1) の (b) に対して導いた式が成立していることを確認せよ．

【ヒント＆コメント】例えば (a) の偏微分係数は T を固定する（つまり $dT = 0$ の）条件の下で dp/dV を計算したものだから，与式に $dT = 0$ を代入してこの比を計算すればよい．(b) も同様である．このように考えていくと，X，Y，Z を p，T，V の並べ替えとして，$(\partial X/\partial Y)_Z$ の形の偏微分係数をすべて α，κ_T と V だけで表せることがわかる．

問題 2：

(1) Pfaff 形式 $(2x - y)dx + (2y + x)dy$ が全微分でない（不完全微分である）ことを示せ．

(2) (1) の Pfaff 形式を $x^2 + y^2$ で割ると全微分になることを示せ．

(3) (1) の Pfaff 形式を $x^2 + y^2$ で割った，$\dfrac{2x - y}{x^2 + y^2}dx + \dfrac{2y + x}{x^2 + y^2}dy$ の原始関数 $F(x, y)$ を求めよ．

【コメント】不完全微分を関数で割ったものが完全微分になるとき，この関数を積分分母と呼ぶ．

問題 3：

(1) Pfaff 形式 $ydx + xdy$ が完全微分であることを示し，原始関数 $F(x, y)$ を求めよ．

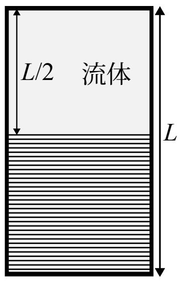
(2) 媒介変数 s を使って $(x, y) = (\cos s, \sin s)$ $(0 \le s \le \pi)$ と表される，$(1, 0)$ から $(-1, 0)$ に至る半円を C とし，$\displaystyle\int_C ydx + xdy$ を原始関数を使わずに直接計算せよ．

(3) $\displaystyle\int_C ydx + xdy = F(-1, 0) - F(1, 0)$ を確認せよ．

———————————————- 裏に続く ———————————————-

問題 4：

以下の過程 (1) および (2) の $N \to +\infty$ 極限は，無限回の操作を含むという意味で，とどちらも無限に時間をかけておこなわれる過程と言える．それぞれが準静的か否かを判定し，その理由も簡単に述べよ．なお,「準静的過程」の定義は文献によって異なるので（参考文献を読む際には，準静的過程の定義をはじめに確認することを勧める），ここでは講義で採用した定義にしたがって解答せよ．



(1) 温度 $T_i = T_\mathrm{A} + i(T_\mathrm{B} - T_\mathrm{A})/N$（$i = 1, 2, \cdots, N$）の N 個の熱源を用意する．温度 T_A の平衡状態に達した体積一定の系に，温度 T_1 の熱源を接触させて平衡に達するまで待ち，温度 T_2 の熱源を接触させて平衡に達するまで待つという作業を $i = 1, 2, \cdots, N$ の順に繰り返し，最終的に系の温度を T_B に変化させる過程.

(2) 右図のように，高さ L の断熱壁製の箱に，厚さ $L/2N$ の板を N 枚隙間なく積み重ね，積み重ねた板より上部に残った高さ $L/2$ の空間に平衡状態に達した流体を入れる．流体に接している側から順に，板を一枚瞬間的に除去して平衡に達するのを待ち，次の板を瞬間的に除去して平衡に達するのを待つという操作を繰り返して，最終的にすべての板を除去して流体の体積を二倍にする過程.

【ヒント】厚みを持つ仕切り壁を瞬間的に除去したら，そのあとに何が残るか？

問題 5 [アドバンストクラス追加問題]：

2 変数関数 $z(x, y) = xy^3$ を考える。

1. x を y と z の関数として表わせ。また、この結果を用いて $(\partial x/\partial y)_z$ を計算せよ。
2. z の全微分は $dz = (\partial z/\partial x)_y dx + (\partial z/\partial y)_x dy$ と書ける。ここから $(\partial x/\partial y)_z$ を得るには、$dz = 0$ として dx/dy を計算すればよい。この結果が 1 と一致することを確かめよ。
   さらに、別の 2 変数関数 $f(x, y) = x^2y^2$ を考える。
3. この関数を、y と z の関数として書き直せ (z を使って x を消去する)。また、この結果を用いて $(\partial f/\partial y)_z$ および $(\partial f/\partial z)_y$ を計算せよ。
4. f の全微分は $df = (\partial f/\partial x)_y dx + (\partial f/\partial y)_x dy$ と書ける。この式から x の全微分表示を用いて dx を消去し、df を dy と dz で書き表せ。またこの結果で $dy = 0$ および $dz = 0$ とすることで $(\partial f/\partial y)_z$ および $(\partial f/\partial z)_y$ を計算し、3 の結果と一致することを確かめよ。