熱物理学演義 No.3 (2025 年 10 月 15 日)

以下断らぬ限り，T は系の温度，p は系の圧力，V は系の体積を表す．

小テスト： ピストンに 1mol の理想気体を入れ，圧力 p_1，体積 V_1，温度 T_1 を保つようにシリンダーを手で押さえている（状態 A）．ピストン外部は真空だと仮定する．理想気体の定積 mol 比熱を気体定数で割ったものを c として，以下の問いに答えよ．

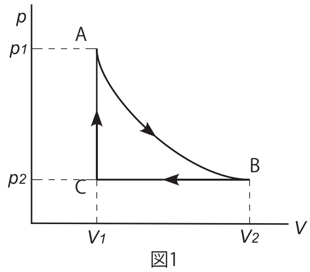

図1

(1) 状態 A から気体の温度を T_1 に保ったまま，ゆっくりシリンダーを動かし，圧力を $p_2(< p_1)$ に，体積を $V_2(> V_1)$ に変化させた（状態 B）．この準静的等温過程で気体が外界にした仕事 $\bar{W}_1$ と，気体に与えられた熱 Q_1 を求めよ．

(2) 状態 B から気体の圧力を p_2 に保ったまま，ゆっくりシリンダーを動かし，体積を V_1 に変化させた（状態 C）．この準静的定圧過程で気体が外界にした仕事 $\bar{W}_2$ と気体に与えられた熱 Q_2 を求めよ．

(3) 定積過程により状態 C から状態 A に戻した．この過程で気体が外界にした仕事 $\bar{W}_3$ と気体に与えられた熱 Q_3 を求めよ．

(4) 状態 A→B→C→A のサイクルで気体が外界にした仕事は，図のどの部分の面積に相当するか．

———————————- ここまで小テスト ———————————-

問題 1： 理想気体の状態方程式 $pV = nRT$ を修正した van der Waals の方程式,

$$\left(p + a\left(\frac{n}{V}\right)^2\right)(V - nb) = nRT$$

を満たす気体がある．a、b は正の定数である．気体の温度を T に保ったまま，気体を体積 V_1 から $V_0(< V_1)$ に準静的に圧縮するのに要する仕事 W を求めよ．

問題 2： 弾性を持った固体を，図のように状態 A から状態 B まで変化させることを考える．単純化されたモデルでは，この系の無限小準静的過程に対し，

$$dV = -\kappa_T V_{\mathrm{A}} dp + \alpha V_{\mathrm{A}} dT$$

が成り立つ．ここで κ_T は等温圧縮率，α は体膨張率，V_{A} は状態 A における固体の体積であり，これらはいずれも定数である．図に示した三つの準静的過程により固体の状態を変化させるとき，系に与えられる仕事 W を求め，W が大きいものから順に過程を並べよ．

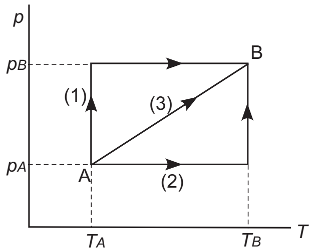

図3

ヒント：$W = -\int_{V_{\mathrm{A}}}^{V_{\mathrm{B}}} pdV = V_{\mathrm{A}} \int_{(T,p)\text{ 平面上の経路}} \kappa_T pdp - \alpha pdT$ に注意し，(1), (2), (3) の経路それぞれに対し線積分を計算せよ．

——————————— 裏に続く ———————————

問題 3： ある一成分気体 1mol を測定したところ，以下の二点が明らかになった．このとき，n mol の気体の内部エネルギー $U(T, V, n)$ の関数形を定めよ．

(1) 1mol の気体の定積比熱 c_V は T にも V にもよらない正の定数．

(2) 断熱自由膨張によって 1mol の気体の体積を V_0 から $V_1(> V_0)$ へ変化させると，気体の温度が，

$$\Delta T = -\frac{a}{c_V}\left(\frac{1}{V_0} - \frac{1}{V_1}\right)$$

だけ変化する（ただし a は正の定数）．

注：体積 V_1 の容器を仕切壁で体積 V_0 の部分と体積 $V_1 - V_0$ の部分に分割し，前者の部分に気体を封入し，後者の部分を真空にしておく．容器全体を断熱材で覆ったのち，仕切壁を除去すると，気体の体積が V_0 から体積 V_1 に増大する．この過程を断熱自由膨張と呼ぶ．

問題 4： 講義ノートの式 (3.12) によると，一成分流体の定積比熱 C_V と 定圧比熱 C_p の間には，内部エネルギーを U として，

$$C_p = C_V + \left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

の関係がある．エンタルピーを $H = U + pV$ として，上の関係式から，

(1) $C_p = C_V + \left(\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - V\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$ を示せ．

(2) $C_p = C_V + \left(V - \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T\right)\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ を示せ．

ヒント：T を固定している間，$H(T, V)$ は V の一変数関数，$H(T, p)$ は p の一変数関数だから，一変数関数の合成関数の微分公式を用いて $(\partial H/\partial V)_T$ と $(\partial H/\partial p)_T$ を結び付けることができる．

問題 5： [アドバンストクラス追加問題]

あるシリンダーの中が、熱は通すが、気体を通さないピストンによって二つの領域 L と R に分割されている。シリンダーの断面積は S,　長さを l とし、シリンダー全体は断熱壁で囲まれているとする。ピストンの厚みは無視できるものとする。以下の問題では状態方程式 $pV = nRT$ および n モルの理想気体の得る熱量 Q と温度変化 ΔT の関係は C を定数として $Q = nC\Delta T$ であることを用いてよい。

1. L に温度 T_L の理想気体、R に温度 $T_R(>T_L)$ の同種の理想気体を入れたところ、両者の圧力 p_0 は等しく、ピストンはちょうど真ん中の位置で釣り合った。このとき L,R の物質量の比はいくらか？
2. その後、R から L に熱が移動し、L と R は熱平衡状態となった。このときの気体の温度を求めよ。
3. 1 から 2 の状態変化におけるピストンの移動距離を求めよ。
4. はじめの圧力 p_0 と終状態の圧力 p の比を求めよ。