熱物理学演義 No.4 (2025 年 10 月 22 日)

以下では特に断らぬ限り，T は系の温度，p は系の圧力，V は系の体積を表す．

小テスト：

(1) ごく一般的に，閉じた一成分流体系が無限小準静的過程で受け取る熱を，

$$\delta Q = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right) dV$$

と表せることを示せ．ただし，U は系の内部エネルギーである．

(2) 1mol の van der Waals 気体の状態方程式と内部エネルギーは，それぞれ，

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT, \quad U = cT - \frac{a}{V}, \quad (a, b, c \text{ は定数，} R \text{ は気体定数 })$$

である．この気体の定積比熱 c_V と定圧比熱 c_p を T と V の関数として書き表せ．

ヒント：$(\partial U/\partial V)_T + p = p + a/V^2 = RT/(V - b)$ に注意．

—————————- ここまで小テスト —————————-

問題 1: 小テストで考えた 1mol の van der Waals 気体について，(T, V) 平面上の断熱曲線を表す方程式を導け．

ヒント：小テスト (2) のヒントはここでも有効です．

問題 2: 閉じた一成分流体系の等温圧縮率 $\kappa_T = -V^{-1}(\partial V/\partial p)_T$ および断熱圧縮率 $\kappa_S = -V^{-1}(\partial V/\partial p)_S$ を考察する（添え字の S は準静的断熱過程における変化を考えていることを表す）．

(1) 定積比熱 $C_V = (\delta Q/dT)_V = (\partial U/\partial T)_V$ に関する以下の公式を示せ（U は系の内部エネルギー）．

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_V = C_V \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \quad \cdots (\text{あ})$$

(2) 一般の無限小準静的過程 $(V, p) \to (V + dV, p + dp)$ で系が受け取る熱を，

$$\delta Q = \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_V dp + \left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p + p\right) dV \quad \cdots (\text{い})$$

と表せることを示せ．

(3) 式 (い) に注意して，定圧比熱 $C_p = (\delta Q/dT)_p$ に関する以下の公式を示せ．

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p + p = C_p \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p \quad \cdots (\text{う})$$

(4) 式 (い) に，式 (あ) と式 (う) を代入した結果と，無限小準静的断熱過程で $\delta Q = 0$ が成立することに注意して，断熱圧縮率 κ_S を，C_V，C_p，$(\partial T/\partial p)_V$，$(\partial T/\partial V)_p$，$V$ を用いて表せ．

(5) 無限小準静的等温過程 $(V, p) \to (V + dV, p + dp)$ において，

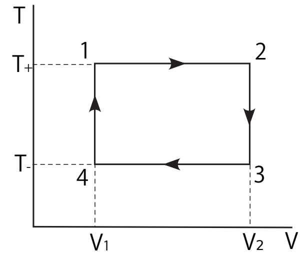
$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V dp + \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV = 0$$

が成立することに注意して，等温圧縮率 κ_T を $(\partial T/\partial p)_V$，$(\partial T/\partial V)_p$，$V$ を用いて表せ．

(6) (4) と (5) の結果から，熱力学関係式 $C_V/C_p = \kappa_S/\kappa_T$ を導け．

—————————- 裏面に続く —————————-

問題 3： 1 mol の理想気体に右図のサイクル（始状態と終状態が同じ過程）をおこなわせる．状態 1 から 2 への変化は温度 T_+ の高温熱源 R_+ に接触させながらおこなう体積 V_1 から $V_2(> V_1)$ への準静的等温膨張，2 から 3 への変化は定積過程，3 から 4 への変化は温度 $T_-(< T_+)$ の低温熱源 R_- に接触させながらおこなう体積 V_2 から V_1 への準静的等温圧縮，4 から 1 への変化は定積過程である．ただし，温度が，



$$T_i = T_- + i\Delta T, \quad \left(\Delta T = \frac{T_+ - T_-}{N+1}\right)$$

の N 個の熱源 R_i（$i = 1, 2, \cdots, N$）を用意して，$2 \to 3$ の定積過程は「気体に R_i を接触させて平衡に達するまで待つ」という操作を $i = N$ から $i = 1$ まで順番におこなったあと，気体に低温熱源 R_- に接触させて平衡に達するまで待って実現する．また，$4 \to 1$ の定積過程は「気体に R_i を接触させて平衡に達するまで待つ」という操作を $i = 1$ から $i = N$ まで順番におこなったあと，気体に高温熱源 R_+ に接触させて平衡に達するまで待って実現する．以下では，1mol の理想気体の定積比熱を c_V，気体定数を R とせよ．

(1) サイクルを通して気体が熱源 $\mathrm{R}_+, \mathrm{R}_-, \mathrm{R}_i$ から吸収した熱 Q_+, Q_-, Q_i をそれぞれ求め，$Q_+ > 0, Q_- < 0, Q_i = 0$ を確認せよ．また，サイクルを通して気体が外界にする仕事 $\bar{W}$ を求め，$\bar{W} > 0$ を確認せよ．

(2) このサイクルを熱機関（エンジン）とみなすと，$Q_+ > 0$ は（燃料を燃やすなどして）系に供給した熱，$Q_- < 0$ は排熱を表す．系に供給した熱 Q_+ から，系が外部になす仕事 $\bar{W}$ への変換率（熱効率）$\eta = \bar{W}/Q_+$ を求めよ．

(3) 熱効率 η が N の増加関数であることを示せ．$N \to +\infty$ における η の極限値（η の最大値）を T_+ と T_- のみを用いて表せ．

コメント：上記のサイクルは Stirling エンジンと呼ばれ，その熱効率の高さから，他の内燃機関の排熱を利用して動く動力源として，特に船舶内での実用化が期待されている．熱源 R_i は過程 $2 \to 3$ で系が外界へ捨てた熱を，過程 $4 \to 1$ で系に戻す役割をしており，このような熱源をリジェネレーター（熱再生器）と呼ぶ．

[アドバンストクラス追加問題]

問題 4： 大気温度の高度変化を考えよう。

（a）90 度のお湯では火傷をするが、90 度のサウナでは火傷をしない。なぜか？

（b）前問の結果から、空気の高度による変化は断熱的であると近似してよい。高度 z における圧力を $p(z)$、空気の質量密度を $\rho(z)$ とするとき、重力とのつりあいから高度が dz 変化した時の圧力の変化を $\rho(z)$ で表せ。

（c）密度 $\rho(z)$ を $p(z)$ および z における温度を $T(z)$ を用いて表せ。ただし空気は 1mol あたりの質量 M の理想気体であると近似する。

（d）高度 z の変化に対する空気の圧力、温度の変化は準静的であると仮定する。$\frac{dT}{dz}$ を単位を K/km として有効数字一桁で求めよ。ただし、空気の $\gamma = C_p/C_V = 7/5$, 重力加速度 $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$, $M = 29 \times 10^{-3}$kg、気体定数を $R = 8.3$J/K mol とする。