熱物理学演義 No.5 (2025 年 10 月 29 日)

特に断らぬ限り，T は系の温度，p は系の圧力，V は系の体積を表す．

小テスト： (V, p) 平面上で断熱曲線と等温曲線を考察しよう．断熱曲線および等温曲線はともに V を大きくするとき単調に減少するものとする．

(1) 点 (V, p) を通る断熱曲線と等温曲線を考えたとき，この点における断熱曲線の勾配が等温曲線の勾配より急であること，つまり，

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S \geq -\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$$

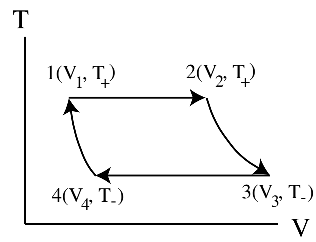
を，Kelvin の原理から示せ（添え字の S は準静的断熱過程における変化を考えていることを表す）．

(2) 二本の断熱曲線が交差することがないことを，Kelvin の原理から示せ．

ヒントとコメント：熱力学第二法則から何かを示すときには基本的に背理法を用いる．例えば (1) では，(V, p) 平面上で図を描き，等温曲線の勾配が断熱曲線の勾配より急だと Kelvin の原理に反したサイクルを構成できることを示せばよい．なお，(1) の結果から，断熱圧縮率 $\kappa_S = -V^{-1}(\partial V/\partial p)_S$ と等温圧縮率 $\kappa_T = -V^{-1}(\partial V/\partial p)_T$ に対し，$\kappa_S \geq \kappa_T (> 0)$ が言え，さらにこれを No.4 問題 2 (6) の結果と併せると，定積比熱 C_V と定圧比熱 C_p に対し，$C_p \geq C_V (> 0)$ が言える．

——————————————- ここまで小テスト ——————————————-

問題 1： 1 mol の van der Waals 気体に図の Carnot サイクルをおこなわせる．状態 1 から 2 への変化は温度 T_+ の高温熱源に接触しての等温準静的膨張 ($V_1 < V_2$)，2 から 3 への変化は断熱準静的膨張，3 から 4 への変化は温度 T_- の低温熱源 ($T_- < T_+$) に接触しての等温準静的圧縮，4 から 1 への変化は断熱準静的収縮である．なお，van der Waals 気体の状態方程式と内部エネルギーはそれぞれ，以下のように与えられる．



$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT, \quad U = cT - \frac{a}{V}$$

(1) No.4 問題 1 で求めた van der Waals 気体の断熱曲線に注意し，$(V_2 - b)/(V_1 - b) = (V_3 - b)/(V_4 - b)$ を示せ．

(2) $1 \to 2$ の過程で系が高温熱源から吸収する熱量 Q_+ を求め，$Q_+ > 0$ であることを確かめよ．

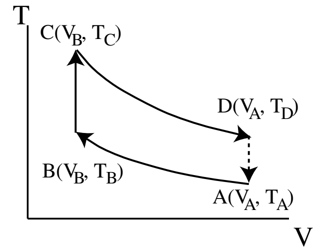
(3) $3 \to 4$ の過程で系が低温熱源から吸収する熱量 Q_- を求め，$Q_- < 0$ であることを確かめよ．なお，(2) の結果に注意し，Q_- は V_3 と V_4 を用いずに示せ．

(4) このサイクルは外界に仕事 $\bar{W} > 0$ をなす二温度熱機関になる．その効率 $\eta = \bar{W}/Q_+$ が Carnot 効率 $1 - T_-/T_+$ に等しいことを確認せよ．

ヒント：一般に効率の計算では，熱力学第一法則から $\bar{W}$ がサイクルを通じて系に与えられた熱に等しいことを用いるとよい．例えばこの問題では $\eta = \bar{W}/Q_+ = (Q_- + Q_+)/Q_+$．

——————————————- 裏に続く ——————————————-

問題 2：右の V-T 図に示したのは Otto サイクルで，ガソリンエンジン等の内燃機関を理想化したモデルである．まず，A 点でピストンの中にガソリンをわずかに含んだ理想気体を用意する．次に A → B で気体を準静的に断熱圧縮する．B 点でガソリンに点火すると，理想気体が一瞬で高温となって C 点に移行する．このとき，熱量 $Q_+ > 0$ が一瞬にして与えられるため，気体は体積変化する暇がなく，B → C を定積過程とみなせる．次に，C → D で気体は準静的に A 点と同じ体積の D 点へ断熱膨張する．本来はここで気体の吸排気がおこなわれるが，ここでは気体が定積冷却過程で A 点に戻ったと考える．



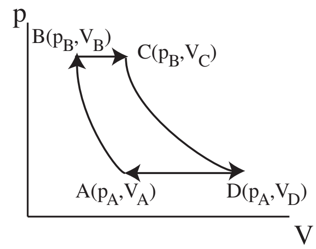
(1) Otto サイクルの効率 $\eta = \bar{W}/Q_+$ を T_{A}，T_{B}，T_{C} および T_{D} を用いて表せ．ここで，$\bar{W}$ は系が外界にした仕事である．

ヒント：問題 1(4) のヒントはここでも有効.

(2) 熱効率 η を圧縮比 $V_{\mathrm{A}}/V_{\mathrm{B}}$ と比熱比 $\gamma = c_p/c_V$ （c_V，c_p はそれぞれ定積および定圧モル比熱）を用いて表せ.

ヒント：理想気体の断熱曲線を表す Poisson の関係式に注意.

問題 3：右の V-p 図に示したのは Joule サイクル（Brayton サイクル）で，航空機等に用いられるガスタービンエンジンを理想化したモデルである．まず，A 点でピストン中に燃料をわずかに含んだ理想気体を用意する． A 点から B 点へ準静的に断熱圧縮すると，断熱圧縮のために高温になった気体中で燃料が自然に燃え出し，燃料の燃焼中，気体は圧力を一定に保ったまま加熱され，B 点から C 点に至る．次に，A 点と同じ圧力の D 点へ準静的に断熱膨張したあと，定圧冷却過程で A 点に戻る．コメント: ガスタービンエンジンの排気過程が準静的断熱膨張 C → D で, 吸気過程が定圧冷却 D → A で代用されている。



(1) 効率 $\eta = \bar{W}/Q_+$ を p_{A}，p_{B}，比熱比 γ を用いて表せ．ここで，$\bar{W}$ は気体が外界にした仕事，Q_+ は燃料の燃焼により，B → C で気体が受け取った正の熱である．

ヒント：問題 1(4) のヒントはここでも有効.

(2) A, B, C, D のうち，気体の温度が最も高い点と最も低い点はどこか.

(3) (2) の最高の温度と最低の温度の間で働く Carnot サイクルは，この Joule サイクルよりも効率が高いことを示せ.

[アドバンストクラス追加問題]

問題 4： 近年省エネルギーの重要性が認識され、水を温めるのにヒートポンプ給湯器が使われるようになってきた。ヒートポンプを使うとなぜ省エネルギーになるのだろう?これを理解するために、ヒートポンプが逆カルノー機関であるとして、以下の問に答えよ。

（a）外気温を T_0、水温を T として、ヒートポンプに微小の仕事 δW をし、外気から熱量 δQ_0 を吸収し、水に熱量 δQ を放出した。 $\delta W/\delta Q$ を T と T_0 を用いてあらわせ。

（b）熱容量 C_W の水を、水温 T_0 から T まで温めるのに必要な仕事 W を T 、T_0 、C_W を用いてあらわせ。

（c）ヒートポンプの成績係数 $\gamma = Q/W$ を求めよ。ただし Q は水を温めるのに使った熱量。

（d）$\Delta T/T_0 \ll 1 (\Delta T = T - T_0)$ としたとき、$\log(T/T_0)$ を微小量 $\Delta T/T_0$ の 2 次まで近似して、上で求めた γ の近似を求めよ。

（e）外気温 $T_0 = 290$ K (約 17° C)、水温 $T = 340$ K (約 67° C) のとき、上で求めた近似値を 使って γ の値を求めよ。