熱物理学演義 No.14 (2026 年 1 月 21 日)

特に断らぬ限り，T は系の温度，S はエントロピー，p は系の圧力，V は系の体積，μ は化学ポテンシャル，n は物質量，U は内部エネルギーを表す．

小テスト問題：ピストンを備えた容器に閉じ込められた一成分流体系を考えよう．系が温度 T の等温環境に置かれているとき，気相と液相が共存した平衡状態（共存相）にあるならば，ピストンをゆっくり微小に動かしても，系の圧力は常に飽和蒸気圧 $p_{\mathrm{v}}(T)$ に保たれる．

(1) 温度 T の等温環境下で，単位物質量の液体が全て蒸発するまで準静的に等温膨張させる．この膨張の間，系は共存相にあるとする．

(2) 準静的断熱膨張させて温度を ΔT だけ微小に降下させる．その結果，系は温度 $T - \Delta T$ の共存相に達し，圧力は $p = p_{\mathrm{v}}(T - \Delta T)$ になる．

(3) 温度 $T - \Delta T$ の等温環境下で，単位物質量の気体が全て液化するまで準静的に等温圧縮する．この圧縮の間，系は共存相にあるとする．

(4) 準静的に断熱圧縮し，温度を T に戻す．

このサイクルが外界に行う仕事を ΔT の一次近似で計算し，効率を求め，これが Carnot 効率 $\Delta T/T$ に等しいことから Clapeyron-Clausius の式

$$\frac{dp_{\mathrm{v}}}{dT} = \frac{Q}{T\Delta V}$$

を導け．ただし，Q は単位物質量当りの潜熱，ΔV は共存相において単位物質量の気体と液体が占める体積の差である．

————————————————- ここまで小テスト ————————————————-

問題 1：一つの物質が二相共存の状態にある．第一の相および第二の相における単位物質量あたりの定圧比熱を，それぞれ c_1，c_2，単位物質量あたりの体積をそれぞれ v_1，v_2 とし，第二の相から第一の相へ移る際の単位物質量当たりの潜熱を q とする．

(1) (T, p) 平面上で，二相の境界を表す曲線を $p = p_{\mathrm{v}}(T)$ とし，各相での単位物質量あたりのエントロピーを $s_1(T, p)$，$s_2(T, p)$ とすれば定義により，

$$\frac{q}{T} = s_1(T, p_{\mathrm{v}}(T)) - s_2(T, p_{\mathrm{v}}(T))$$

である．上式両辺を T で微分し，

$$\frac{1}{T}\frac{dq}{dT} - \frac{q}{T^2} = \left(\frac{\partial s_1}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial s_2}{\partial T}\right)_p + \left(\left(\frac{\partial s_1}{\partial p}\right)_T - \left(\frac{\partial s_2}{\partial p}\right)_T\right)\frac{dp_{\mathrm{v}}}{dT}$$

を示せ．

(2) Maxwell の関係式と Clapeyron-Clausius の式を用いて次式を示せ．

$$c_1 - c_2 = \frac{dq}{dT} - \frac{q}{T} + \frac{q}{v_1 - v_2}\left(\left(\frac{\partial v_1}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial v_2}{\partial T}\right)_p\right)$$

(3) 第一の相が気相，第二の相が液相とし，$v_1 \approx RT/p$ に対し v_2 を無視して $c_1 - c_2 \approx dq/dT$ を示せ．

——————-裏へ——————-

問題 2： 一つの物質が気相・液相共存の状態にある．気相および液相における単位物質量あたりの体積をそれぞれ v_{g}，v_{l} とし，単位物質量当たりの潜熱を q とする．潜熱 q の温度依存性を無視し，$v_{\mathrm{g}} \approx RT/p$ に対して v_{l} を無視する近似をおこなって，Clapeyron-Clausius の式から $p_{\mathrm{v}}(T)$ を定めよ．

問題 3： ブラックホールについて聞いたことがあるかもしれない．その理解には高度な知識が必要だが，熱力学の知識と，次元解析および高校物理の知識だけを基に少し想像を広げてみよう．

(1) ブラックホールの周囲には非常に強い重力場が作られるため，ある半径（Schwarzschild 半径）R より内側では光すら外に出てこれない．Schwarzschild 半径の表式を構成する部品として何が必要かリストアップすると，ブラックホールを規定する質量 M，重力に関する現象だから万有引力定数 G，光が関係した現象だから光速 c を思いつく．さしあたりそれ以上思いつかないので，これら三つの部品から長さの次元（単位）を持つ量を構成してみよ．数係数の部分をのぞくと，この量が R の表式を与えると予想できる．

(2) 量子効果を考えるとブラックホールは熱輻射をしている（有限の温度を持つ）のだそうだ．量子効果を考えるので，量子と古典の境目を特徴づける Planck 定数 h を新たに部品に加えて，Schwarzschild 半径 R，光速 c および Planck 定数 h を使ってエネルギーの次元を持つ量を構成せよ．これを温度をエネルギーに変換する Boltzmann 定数 k_{B} で割ったものが，数係数の部分をのぞいて，ブラックホールの「温度」の表式を与えると予想できる．

(3) ブラックホールの内部エネルギーを高校物理で習った静止エネルギー $U = Mc^2$ とみなす．さらにブラックホールのエントロピー S が U のみの関数だと仮定し，(2) で導いた温度の表式から $S(U)$ の表式を数係数の部分をのぞいて決定せよ．ただし，ブラックホールが存在しない（$M = 0$）ときを $S = 0$ とせよ．

(4) $S(U)$ が数係数をのぞいて Bekenstein-Hawking の公式 $k_{\mathrm{B}}A/4\ell_{\mathrm{p}}^2$ に一致することを示せ．ただし，$A = 4\pi R^2$ はブラックホールの表面積，$\ell_{\mathrm{p}} = \sqrt{Gh/2\pi c^3}$ は Planck 長である．

[アドバンストクラス追加問題]

問題 4：（a）光子気体の持つ内部エネルギーは定数 a を用いて $U_{ph} = aT^4$ と表せる (Stefan–Boltzmann の法則。No.7 問題 2 参照)。定積における内部エネルギーの微小変化を考え、光子気体の持つエントロピーが $S_{ph} = \frac{4U_{ph}}{3T}$ と書けることを示せ。

（b）(a) で求めた温度 T の光子気体をブラックホールの中に全て吸い込ませることを考える。問題 3 のブラックホールの内部エネルギーを U_{BH}、エントロピーを S_{BH} とすると、吸い込ませる前の全系の内部エネルギーは $U_{\mathrm{tot}} = U_{\mathrm{BH}} + U_{ph}$, エントロピーは $S_{\mathrm{tot}} = S_{\mathrm{BH}} + S_{ph}$ である。ブラックホールが光子気体を吸い込んだ後は、質量が少し増えたブラックホールの状態になる。$U_{\mathrm{BH}} \gg U_{ph}$ を仮定し、全エントロピーの変化を U_{ph} の 1 次までの近似で求めよ。

（c）(b) の結果を見ると、温度がある温度 T_{cr} より低いとエントロピーが減ってしまうことがわかる。T_{cr} を求めよ。

（d）熱力学の第二法則にブラックホールが従うと考えると、温度が T_{cr} よりも低い光子気体は吸い込まれるのではなく、逆に吐き出されるはずである。なんでも吸い込むと考えられたブラックホールがじつは (量子効果によって) 放射するというこの現象は、Hawking 輻射と呼ばれる。宇宙に存在するブラックホールは太陽よりも重いと考えられているが、加速器実験などでミクロなブラックホールが出現する可能性も議論されている。(c) の結果を用いて、質量の小さいブラックホールの Hawking 輻射の強度と寿命について述べよ (LHC 加速器実験ではブラックホールが万が一出現した場合の危険性について、実験の中止を求める訴訟が起こされた。Hawking の理論が正しければ、加速器実験でブラックホールが生成されたとしても、地球が吸い込まれる心配はない。)。