

熱物理学演義 No.1 (アドバンストクラス) (2026 年 10 月 7 日)

小テスト問題：1 mol の気体に対する状態方程式が、

$$p = RT(V^{-1} + a_2 V^{-2} + a_3 V^{-3})$$

であるとする。ここで、 p は圧力、 V は体積、 T は温度、 R は気体定数、 a_2 と a_3 は正の定数である。このとき n mol の気体に対する状態方程式を導け。

どうやって解けば良いのか分からない人は質問しよう！

_____ ここまで小テスト _____

問題 1：1mol の気体の状態方程式が、

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

内部エネルギー U が、

$$U = cT - \frac{a}{V}$$

であるとする。ここで、 p は圧力、 V は体積、 T は温度で、 R は気体定数、 a, b, c は正の定数である。このとき n mol の気体に対する状態方程式と内部エネルギーの表式を導け。

ヒント：内部エネルギー U は示量変数である。

問題 2：線積分

$$\int_C dx + x dy$$

を求めよ。積分経路 C は t を 0 から 1 まで動かしたときに $(x, y) = (\cos \pi t, \sin \pi t)$ が描く半円を選ぶ。積分経路 C を t を 0 から 1 まで動かした時に $(x, y) = (1 - 2t, 0)$ が描く直線に選んだ場合はどうなるか。これら二つの経路は始点と終点が同じであるが、積分結果は異なることに注意せよ。

問題 3：関数 $f(x)$ が下に凸 ($f''(x) > 0$) であるとする。 $y = df/dx$ として、 y の関数 $g(y) = f(x(y)) - yx(y)$ を作る。ここで $x(y)$ は $y = df/dx$ を x について解いたものである。 dg/dy を求めよ (Legendre 変換)。

問題 4：関数 $f(x)$ が下に凸 ($f''(x) > 0$) であるとする。 $p_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots, N$) が、 $\sum_{n=1}^N p_n = 1$ を満たすとき、 x_n ($n = 1, 2, \dots, N$) に対して、

$$\sum_{n=1}^N p_n f(x_n) \geq f\left(\sum_{n=1}^N p_n x_n\right)$$

が成り立つことを示せ (Jensen の不等式)。

ヒント：点 $(\sum_n p_n x_n, \sum_{n=1}^N p_n f(x_n))$ は $(x_n, f(x_n))$ を頂点とする n 多角形とどのような位置関係にあるか考えよ。図示だけでは心配な人 (数学的に厳密に示したい人) は、数学的帰納法で証明せよ (大学入試によく出る問題)。

問題 5[アドバンストクラス追加問題]：

上または下に凸である関数 $f(x)$ に対して、

$$g(p) = \min_x [px - f(x)] \quad \text{または} \quad \max_x [px - f(x)]$$

をルジャンドル変換という。

1. $f(x) = ax^2 + bx + c$ のとき、ルジャンドル変換 $g(p)$ を求めよ。
2. 前問で得られた $g(p)$ のさらなるルジャンドル変換を求めよ。