質量を持つフェルミオンでも理解できる指数定理

～対称性への過度な信仰を省みるきっかけとして～

深谷英則(大阪大学)

素粒子論における対称性原理主義

私たち(素粒子論研究者)は物心ついた時から、

- 対称性とその自発的破れは素粒子論において絶対的な正義であり
- 対称性を陽に損なうことは悪である、

という教育を刷りこまれてきました。

これを言い換えると、

- (Lagrangianに)質量を持たないことが正義
- (Lagrangianに)質量を持つことは悪

となります。これには理由があります。

素粒子論における質量問題

質量とは万有引力の力荷。

$$V_{\mathrm{Newton}} = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

Cf. クーロンポテンシャル

$$V_{\mathrm{Coulomb}} = -k\frac{e_1e_2}{r}$$

素粒子が持つべき典型的な質量のスケールは

$$\sqrt{\frac{c\hbar}{G}} = 2 \times 10^{-8} \ \ \mathrm{kg}.$$

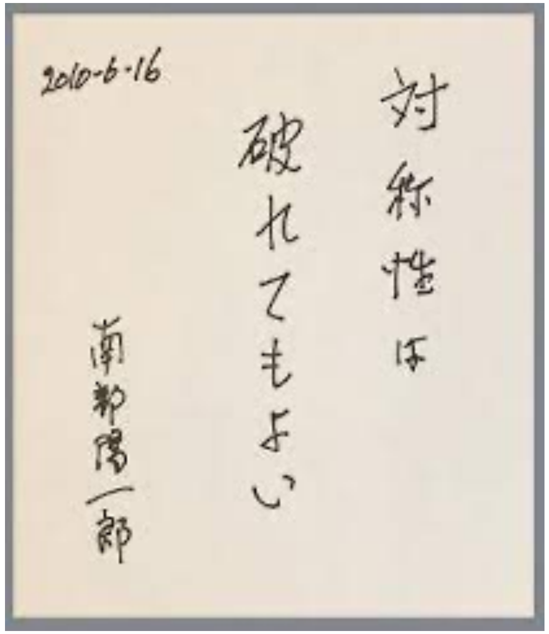
ミジンコ2匹分 [正式にはPlackスケールと呼ぶ]

= 最小の甲殻類、原子数は10^{19}

重力が弱すぎる = 自然界に存在する素粒子が軽すぎる。

南部陽一郎博士の理論[1961]

1. 対称性あれ
全ての素粒子に対称性を課し、
質量をゼロにする。
(ミジンコ質量を持たなくてよい。持っていても質量
ゼロの粒子に崩壊すればよい。)



大阪市立科学館に展
示されている色紙

2. そして自発的に破れろ
重力と無関係の相互作用で自発的に破れると、
素粒子はニュートン定数と無関係の質量を獲得できる。

南部理論の空前の大成功

以下、質量をGeV 単位で表します。 $1\mathrm{GeV} \sim 2\times 10^{-27}\ \ \mathrm{kg}.$

1. クォーク :カイラル対称性が質量項を禁止、強い相互作用による自発的破れでO(1)GeVの質量を獲得。
2. グルーオン : SU(3)ゲージ対称性で質量ゼロ。ただし強い相互作用によりハドロン内に閉じ込め。
3. レプトン(電子etc.), W, Z ボゾン : (カイラル)SU(2)ゲージ対称性により質量項を禁止、Higgs機構による自発的破れでO(100)GeV の質量を獲得
(レプトンは湯川結合定数が小さいので100GeVよりだいぶ軽い[小階層性問題])。
4. 光子、ニュートリノ、(重力子) : 対称性の破れの影響を受けず、質量ゼロのまま。(ニュートリノはわずかな質量を持つ証拠あり。詳細は未解決[ニュートリノ振動])

Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, 1961,
発表時はクォーク発見以前だったこともすごい

南部理論の空前の大成功その２

5. ヒッグス粒子 : 素粒子標準模型には質量を禁止する対称性が見つからない。より高エネルギーに新しい対称性があればよい。

超対称性、高次元時空のゲージ対称性、テクニカラーゲージ対称性、、、およびその自発的破れがさかんに研究された。

さらに、質量以外の物理の説明にも使えそう。

SU(5)大統一理論:

クォークとレプトンの統一[陽子と電子の電荷の絶対値がなぜ等しいのか説明できる。] = SU(5) ゲージ対称性とその破れ

などなど。

「基本的に素粒子の質量はゼロ。そのための対称性を仮定し、それが自発的に破れたものとする」という研究手法は2000年代までの素粒子論の屋台骨。

素粒子論における対称性原理主義

私たち(素粒子論研究者)は物心ついた時から、

- 対称性とその自発的破れは素粒子論において絶対的な正義であり
- 対称性を陽に損なうことは悪である、

という教育を刷りこまれてきました。

これを言い換えると、

- (Lagrangianに)質量を持たないことが正義
- (Lagrangianに)質量を持つことは悪

となります。

ところが、、、

2012 年、Higgs粒子発見! 素粒子標準模型が完成!

しかし、同時期に見つかると思われていたHiggs粒子の質量を説明してくれるはずの、超対称性、高次元時空のゲージ対称性、テクニカラーゲージ対称性に関係する新粒子は未だ何も見つからず。。。

大統一理論の予言する クォークから電子への遷移 = 陽子の崩壊も起きない。。。[陽子の寿命は少なくとも1.6×10^{34}年以上]

物性理論でも(素粒子論にとって)不吉な兆候[Fidokowski-Kitaev 2010, Wen 2013, Kikukawa 2019,,,] 対称性を破ることなくギャップ(質量)を与えられる。対称性が質量を禁止してくれるはずという前提が成り立たない場合がある。

そもそも南部先生に頼りすぎではないか？

私たちは南部先生の手のひらの上しか研究していないのではないか？

対称性のない物理でもがんばれば新しい発見があるかも？

素粒子論の次のノーベル賞は手のひらの外かも？

私たちの(指数定理の)研究

悪であるはずの質量を持つ定式化（カイラル対称性を破る）によって物理＆数学の本質が抽出できる場合がある。

南部先生の手のひらの外も面白い！

Atiyah-Singer 指数定理 on 閉多様体

$$\mathrm{Ind} D = \frac{1}{32\pi^2}\int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{tr} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}$$

右辺は電場と磁場の内積を積分したもの

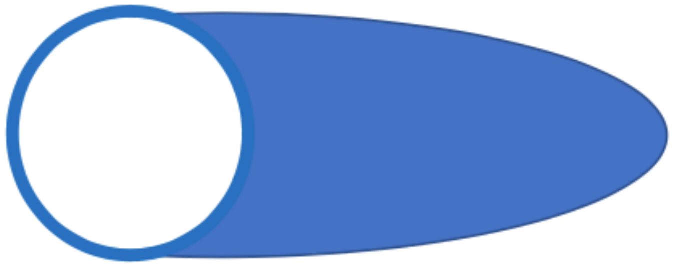
[Atiyah and Singer, 1968]

左辺の通常の定義は、
正のカイラリティを持つ質量ゼロのDirac方程式 $D\psi = 0$
の解の個数 – 負のカイラリティの解の個数。

これをカイラル対称性を一切使わず、質量を持つフェルミオンで書き直せないか？

境界のない閉多様体では（簡単に）可能(詳細は後述)。

Atiyah-Patodi-Singer 指数定理[1975]



$$\eta(H) = \sum_{\lambda \geq 0}^{reg} - \sum_{\lambda < 0}^{reg}$$

$$\mathrm{Ind} D|_{\mathrm{APSb.c.}} = \frac{1}{32\pi^2}\int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{tr} F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\eta(iD^{\mathrm{3D}})$$

境界のある多様体では、数学の定理はカイラル対称性を保つため、物理屋unfriendly(非局所的な)APS境界条件を採用
→ おつりとして非局所的な なη(エータ)不変量が加わる。

Atiyah-Patodi-Singer 指数定理

$$\mathrm{Ind}D|_{\mathrm{APS b.c.}} = \frac{1}{32\pi^2}\int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\eta(iD^{\mathrm{3D}})$$

これをカイラル対称性を一切使わず、質量を持つフェルミオンで書き直せないか？

→ できる(数学的にも非自明な等価性)。
η不変量の非局所性は物理的な理由で現れる。
しかも、格子ゲージ理論に応用可能、
mod-two 指数にも応用可能。

→ 質量のある方が質量ゼロよりも、指数定理の統一的な記述が可能。

質量を持ち、カイラル対称性のない フェルミオンで指数定理を記述するプロジェクト

- 物理屋フレンドリなAPS指数の再定式化[F,Onogi, Yamaguchi 2017]
- 物理屋フレンドリなAPS指数（AS指数の証明も含む）の再定式化の数学的証明 [F, Furuta, Matsuo, Onogi, Yamaguchi, Yamashita 2019]
- 格子ゲージ理論への応用[F, Kawai, Matsuki, Mori, Nakayama, Onogi, Yamaguchi 2019]
- 奇数次元の　Mod-two APS 指数 [F, Furuta, Matsuki, Matsuo, Onogi, Yamaguchi, Yamashita 2020]
- Curved lattice への応用 [Aoki, F, 2022x2, Aoki-F-Kan 2024]
- 格子上AS指数の数学的定式化[Aoki, F, Furuta, Matsuo, Onogi, Yamaguchi, Yamashita, in preparation]

本講演のメッセージ

質量を持ち、対称性を破ることは必ずしも悪いことではない。

むしろ物理がわかりやすくなる例もある。

Contents

✓ 1. Introduction
素粒子論は対称性で質量をゼロとするのが基本であるが、あえて質量項を考えたい。
2. Dirac フェルミオンと質量
3. Atiyah-Singerの指数と質量を持つDiracフェルミオン
4. APS指数と質量を持つDiracフェルミオン
5. 数学的証明
6. まとめ

Dirac 方程式

Schrodinger 方程式
(相対論と両立しない)

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right]\psi(x,t)=0$$

$$c=\hbar=1$$

Klein-Gordon 方程式 (ボーズ粒子にのみ使える)

$$\left[-\partial_t^2+\partial_i^2+m^2\right]\psi=0.$$

略記 $\partial_\mu=\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$

Dirac 方程式

$$\left[-\gamma_\mu\partial^\mu+m\right]\left[\gamma_\mu\partial^\mu+m\right]\psi=0.$$

$$\left[\gamma_\mu\partial^\mu+m\right]\psi=0.$$

$$\gamma_0=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\quad\gamma_i=\begin{pmatrix}0&i\sigma_i\\-i\sigma_i&0\end{pmatrix}$$

Euclid化した後の4x4 Gamma matrices

Dirac 方程式

ゲージ場があるときは微分を共変微分に変える：

$$\left[\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + iA_{\mu}) + m\right]\psi = 0.$$

4元ゲージポテンシャル
(電磁場 or グルーオン場)

NOTE : 質量は正負どちらも許される。しかも物理的にも意味がある(後述)。

＊物性理論でも準粒子がDirac 方程式に従う場合がある。一回微分項はspin-軌道相互作用etc.から、質量項はフェルミエネルギーからのギャップとして、それぞれ現れる。

Dirac フェルミオン作用とカイラル対称性

$$S = \int_X d^4x \, \bar{\psi}(D+m)\psi(x) \qquad D = \gamma^\mu(\partial_\mu + iA_\mu)$$

γ_μ : 4×4 Dirac's gamma matrices satisfying

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}.$$

A_μ : gauge field

X : 4-d flat Euclidean space
(時間方向はWick 回転したもの)

カイラリティ演算子： $\gamma_5 = -\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0, \quad \gamma_5^2 = 1_{4\times 4}, \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5. \quad \{\gamma_5, D\} = 0$$

カイラル変換の下で、質量ゼロの作用は不変： $\bar{\psi}' D\psi' = \bar{\psi} D\psi$

$\psi \to \psi' = i\gamma_5\psi,$

$\bar{\psi} \to \bar{\psi}' = \bar{\psi} i\gamma_5$

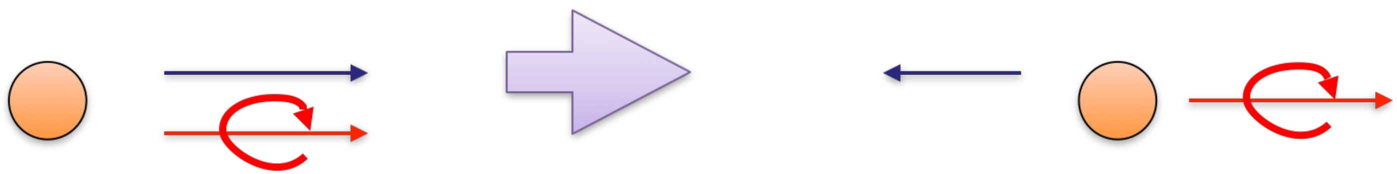
質量項は不変でない： $m\bar{\psi}'\psi' = -m\bar{\psi}\psi$

カイラル対称性の物理的意味

カイラリティは運動方向のスピンに相当。

$\gamma_5 = +1$ 右巻き $\gamma_5 = -1$ 左巻き

ただし、これが成り立つのは厳密に質量がゼロのときのみ。
(“運動方向”はローレンツ変換によって向きを変えられる。)



質量がゼロ=光速で運動するときのみ、カイラリティは well-defined.
(カイラリティを指定したDirac方程式の解の個数で記述するAtiyah-Singer指数にカイラル対称性は必須に見える。)

Domain-wall フェルミオン

質量項の符号を領域(domain)によって変えた系。

$$m > 0$$

$$S = \int_X d^4x\ \bar{\psi}(D + m\epsilon(x))\psi(x)$$

$$\epsilon(x) = \begin{cases} +1 & x \in X_+ \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

以下で、絶縁体中の電子場のときは、X_+ がトポロジカル絶縁体でそれ以外(実験室を含む)が通常の絶縁体(のモデル)の記述になっていることを説明する。

Dirac 方程式の変数分理解

$\epsilon(x) = \mathrm{sign}(x_1)$　のときのDirac 方程式

$$0 = [D + m\mathrm{sign}(x_1)]\,\psi = \gamma^1\left[\partial_1 + m\gamma^1\mathrm{sign}(x_1) + \gamma_1 D^{\mathrm{3D}}\right]\psi$$

で変数分離解を仮定：　$\psi = \phi(x_1)\chi(x_2, x_3, x_4)$

$$\left(\partial_1 + m\gamma_1\mathrm{sign}(x_1)\right)\phi = 0$$

$$D^{\mathrm{3D}}\chi(x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Dirac 方程式の変数分理解

$$\left(\partial_1 + m\gamma_1 \mathrm{sign}(x_1)\right)\phi = 0$$

γ_1 の固有値が+1 の状態で $x_1 < 0$ の領域では

$$(\partial_1 - m)\phi = 0$$

解は $\phi \propto \exp(mx_1)$

γ_1 の固有値が+1 の状態で $x_1 \geq 0$ の領域では

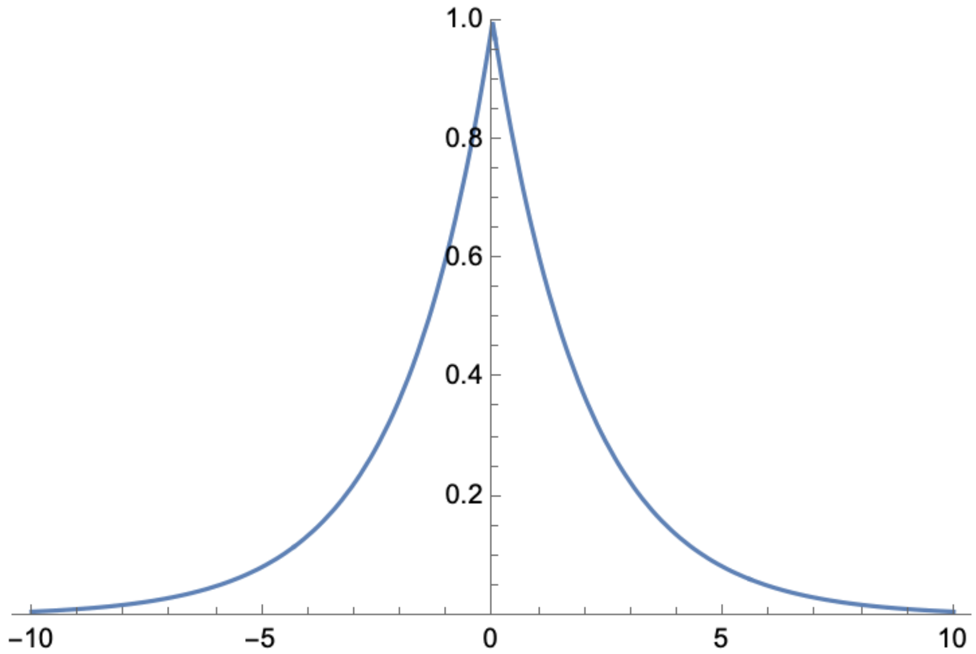
$$(\partial_1 + m)\phi = 0$$

解は $\phi \propto \exp(-mx_1)$

まとめると、$\phi \propto \exp(-m|x_1|)$

$x_1 = 0$ に局在するedge解になっている。

エッジモード



まとめると、$\phi \propto \exp(-m|x_1|)$

$x_1 = 0$　に局在するedge解になっている。

Edge状態

ドメインウォール or 符号関数がないと解は存在しない(二乗可積分ではない)。

同様に、 γ_1 の固有値が-1の状態の解も存在しない=解はカイラルである。

$D^{\rm 3D}\chi(x_2, x_3, x_4) = 0.$ **質量ゼロ**の2+1次元Dirac場の方程式

まとめ：domain-wall フェルミオンのDirac方程式は、
エッジに局在するカイラルな質量ゼロの解を持つ。

Contents

Atiyah-Singer 指数定理 on 閉多様体

$$\mathrm{Ind} D = \frac{1}{32\pi^2}\int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$$

右辺は電場と磁場の内積を積分したもの

[Atiyah and Singer, 1968]

左辺の通常の定義は、
正のカイラリティを持つ質量ゼロのDirac方程式 $D\psi = 0$
の解の個数 – 負のカイラリティの解の個数。
重要な性質: $\{D, \gamma_5\} = 0.$

$$\gamma_5\phi(x) = +\phi(x) \to \gamma_5 D\phi(x) = -D\gamma_5\phi(x) = -D\phi(x)$$

ゼロ固有値以外 $\gamma_5 = \pm 1$ のペアを持つ。

$$\mathrm{Ind} D = n_+ - n_- = \mathrm{Tr}\gamma_5^{\mathrm{reg}}.$$

Fujikawa method

1. 正則化を選ぶ：熱核の正則化

$$\mathrm{Tr}\gamma_5^{\mathrm{reg}} = \lim_{M\to\infty} \mathrm{Tr}\gamma_5 e^{\frac{D^2}{M^2}}$$

2. Traceを評価する完全系を選ぶ

$$= \lim_{M\to\infty} \int d^4x \int d^4k \; e^{-ikx} \mathrm{tr}\gamma_5 e^{D^2/M^2} e^{ikx}$$

3. 摂動計算する

$$\left(D^2 = D_\mu D^\mu + \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} \right)$$

$$= \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}$$

質量を持つDirac演算子で理解できるか？

$$H = \gamma_5(D+m) \qquad H^\dagger = H$$

質量ゼロのときのゼロモードはH の固有モードでもある:

$$H\phi_0 = \gamma_5 m\phi_0 = \pm m\phi_0.$$ 符号はカイラリティと一致。

Non-zero modesはペアを作る by $\{D, H\} = 0$

$$H\phi_i = \lambda_i\phi_i$$

$$HD\phi_i = -DH\phi_i = -\lambda_i D\phi_i$$

η不変量 = 固有値の +/- 非対称性を測る量

$$\eta(H) = \sum_i \mathrm{sgn}\lambda_i \qquad\qquad H = \gamma_5(D+m)$$

$$= \#\ \mathrm{of}\ +m - \#\ \mathrm{of}\ -m$$

が AS 指数になっているのではないか？

残念ながら不正解。本当は

$$\mathrm{Index}(D) = \frac{1}{2}\eta(H)^{reg}.$$

η不変量は2ずつ変化する量

有限系では
+の固有値を一つ増やすとき、必ず
- の固有値が一つ減る。

正しい正則化は有限系と同じ
性質を持つべきなので、

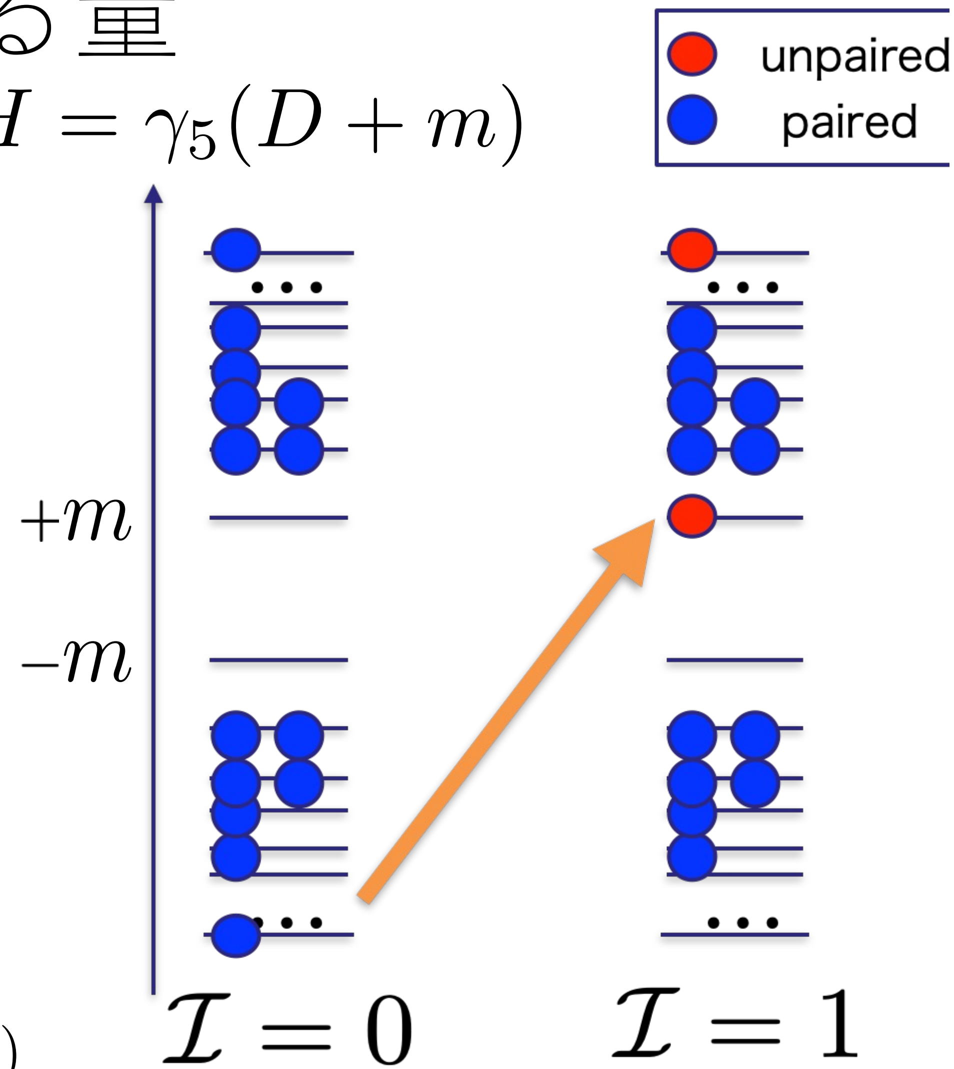
$$\mathrm{Index}(D) = \frac{1}{2}\eta(H)^{reg}.$$

以下ではPauli-Villars正則化をとる:

$$\mathrm{Index}(D) = \frac{1}{2}\eta(H) - \frac{1}{2}\eta(H_{\mathrm{PV}})$$

$$H_{\mathrm{PV}} = \gamma_5(D - M_{\mathrm{PV}})$$

$$H = \gamma_5(D+m)$$



η不変量の評価

簡単のため $m = M_{\mathrm{PV}} = M$

$$\eta(H) = \sum_{\lambda \geq 0}^{reg} - \sum_{\lambda < 0}^{reg} \qquad H = \gamma_5 (D \pm M).$$

これを演算子のトレースとして書き直す。

$$\eta(H) = \mathrm{Tr}\frac{H}{\sqrt{H^2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty du \; \mathrm{Tr} H e^{-u^2 H^2}$$

Half of Gaussian integral

＊Hの固有値はゼロにはならない.

＊UV 発散 (big H near u=0) は危険だがPV場の寄与とキャンセル

→ 積分前の摂動計算が有効.

η不変量の摂動計算　簡単のため $m = M_{\rm PV} = M$

以下を使って,

$$H_\pm = \gamma_5(D \pm M), \quad H_\pm^2 = \gamma_5(D \pm M)\gamma_5(D \pm M) = -D^2 + M^2$$

$$\eta(H_\pm) = \pm\frac{2M}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty du\ {\rm Tr}\gamma_5(1 \pm D/M)\,\underbrace{e^{-u^2(-D^2+M^2)}}_{\text{even } \gamma_\mu\text{'s}}$$

Do not contribute.

$$= \pm\frac{2M}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty du\ e^{-u^2M^2}{\rm Tr}\gamma_5 e^{u^2D^2}$$

質量0のときのFujikawa method
の摂動評価と全く同じ。

$$= \frac{\pm 1}{32\pi^2}\int d^4x\ \ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}{\rm tr}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}(x) + \mathcal{O}(1/M)$$

Atiyah-Singer 指数定理

簡単のため $m = M_{\rm PV} = M$

指数定理の左辺を質量を持つDirac演算子で書き直すことができた。

$$\frac{1}{2}\eta(H_+) - \frac{1}{2}\eta(H_-) = \frac{1}{32\pi^2}\int d^4x \;\; \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}{\rm tr}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}(x)$$

$$H_\pm = \gamma_5(D \pm M).$$

とても簡単だが過去の文献は見当たらない。

* 数学では自明すぎて誰も論文にしなかった？

* 物理では需要がなかった？

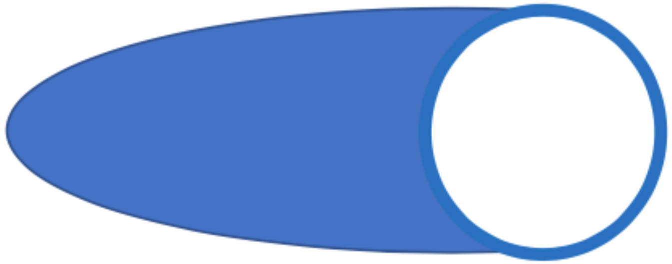
非摂動的証明は[F,Furuta,Matsuo,Onogi,Yamaguchi,Yamashita 2017]で与えた。

注) 一般にeta 不変量は整数ではないが偶数次元では整数。

境界のある場合は物理的にも数学的にも非自明。

Contents

Atiyah-Patodi-Singer (APS)指数定理 on 境界のある多様体 [1975]



$$\eta(H) = \sum_{\lambda\geq 0}^{reg} - \sum_{\lambda<0}^{reg}$$

$$\mathrm{Ind} D|_{\mathrm{APS b.c.}} = \frac{1}{32\pi^2}\int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr} F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\eta(iD^{\mathrm{3D}})$$

整数　　非整数　　奇数次元では非整数

数学の定理ではカイラル対称性を保つため、物理屋unfriendly(非局所的な)APS境界条件を採用

→ おつりとしてnon-local なエータ不変量が加わる。

APS指数定理 とトポロジカル絶縁体

Witten 2015 : symmetry protected topological 絶縁体のバルク-エッジ対応をAPS指数で理解できる。

[Related works: Metlitski 15, Seiberg- Witten 16, Tachikawa-Yonekura 16&18, Freed-Hopkins 16, Witten 16, Yonekura 16&19, Witten-Yonekura 19...]

fermion
path integrals

$$Z_{\rm edge} \propto \exp(-i\pi\eta(iD^{\rm 3D})/2)$$ T-anomalous

$$Z_{\rm bulk} \propto \exp\left(i\pi\frac{1}{32\pi^2}\int_{x_1>0} d^4x\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}{\rm tr}[F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}]\right)$$ T-anomalous

$$Z_{\rm edge}Z_{\rm bulk} \propto (-1)^{\mathfrak{I}} = (-1)^{-\mathfrak{I}}$$ ➡ T is protected !

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{32\pi^2}\int_{x_1>0} d^4x\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}{\rm tr}[F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}] - \frac{\eta(iD^{\rm 3D})}{2}$$

左辺がよくわからない。絶縁体中の電子 = massive fermionの記述 になぜ非局所的境界条件まで使ってカイラルなゼロモードが必要なのか？

APS 境界条件

4D(Euclidean)時空で massless Dirac operator を $x_1 = 0$ の領域で考える。

(任意の偶数次元でも同様)

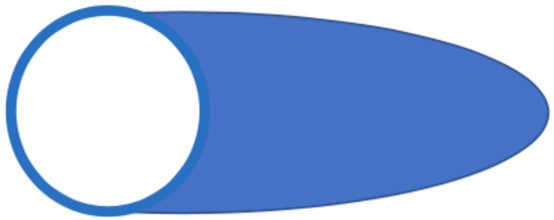
$$A_1 = 0 \ \ \text{gauge}$$

$$B = \gamma_1 \sum_{i \neq 1} \gamma_i D^i$$

$$D = \gamma_1 (\partial_1 + B)$$

* Gauge group is U(1) or SU(N).

APS 境界条件= Bの正の固有モード成分はゼロ



* Metric is flat.

これは非局所的(need all eigenfunction of B).

でも γ_5 と可換 -> カイラル対称性があるので指数の定義はASと同じく

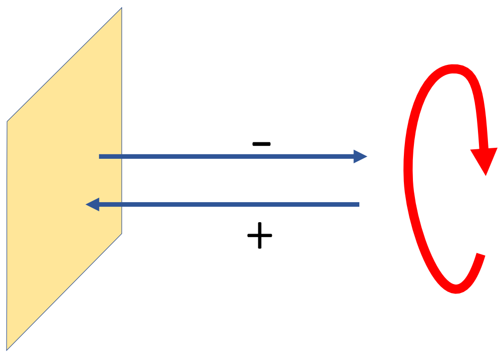
$$\mathrm{Ind} D = n_+ - n_-$$

境界とカイラル対称性

物理学では境界があったら、、、

1. 境界面が平坦だったらその面に垂直な軸に対する回転対称性があるはず。
2. 入射波は反射派としてはねかえってくるはず。

粒子が境界面に垂直に入射すると、、、



運動量は反転、
角運動量は保存、
→**カイラリティは非保存**

n_+, n_- および index は定義できなくて当然

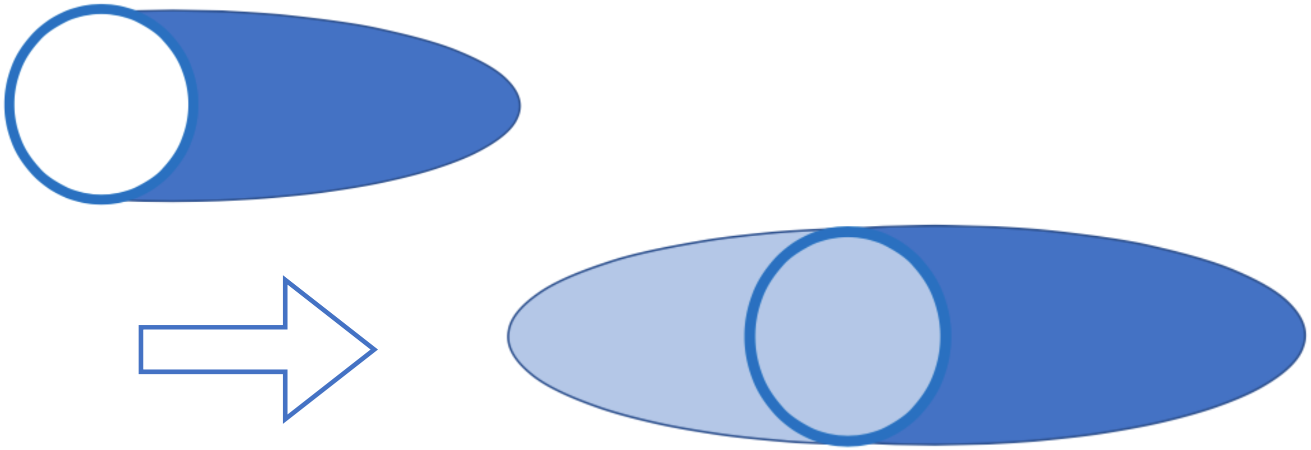
ではどうする？

物理屋フレンドリーな定式化とは？

物理屋フレンドリーな定式化とは？

物理では

1. どんな境界にもその”外側”がある。→　物理で扱うべきは境界付き多様体ではなく、ドメインウォールのある(閉)多様体である。



物理屋フレンドリーな定式化とは？

物理では

1. どんな境界にもその”外側”がある。→　物理で扱うべきは境界付き多様体ではなく、ドメインウォールのある(閉)多様体である。
2. 境界条件はカイラリティではなく角運動量を保存すべきである。massless → massive (in bulk)

物理屋フレンドリーな定式化とは？

物理では

1. どんな境界にもその”外側”がある。→　物理で扱うべきは境界付き多様体ではなく、ドメインウォールのある(閉)多様体である。
2. 境界条件はカイラリティではなく角運動量を保存すべきである。massless → massive (in bulk)
3. 境界条件は手で与えるものではなく自然が勝手に選ぶべきである。

物理屋フレンドリーな定式化とは？

物理では

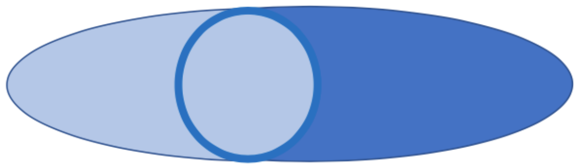
1. どんな境界にもその”外側”がある。→　物理で扱うべきは境界付き多様体ではなく、ドメインウォールのある(閉)多様体である。
2. 境界条件はカイラリティではなく角運動量を保存すべきである。massless → massive (in bulk)
3. 境界条件は手で与えるものではなく自然が勝手に選ぶべきである。
4. 境界に現れるエッジモードが役割を果たすべき。

ドメインウォールフェルミオン

[Jackiw-Rebbi 1976, Callan-Harvery 1985, Kaplan 1992 …]

以下のようなmassive Dirac operatorを考える。

$$D_{4D} + M\epsilon(x_1), \quad \epsilon(x_1) = \mathrm{sgn} x_1$$

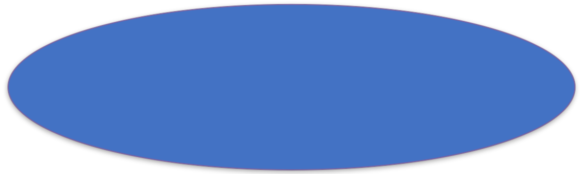


多様体は境界のない閉多様体。
質量項の符号を $x_1 = 0$ で反転。
いかなる境界条件も手で課さない。

物理屋フレンドリーなAPS指数の定式化

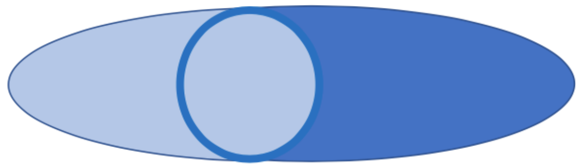
[F-Onogi-Yamaguchi 2017]

$$\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D+M))^{reg} = \text{AS index}$$



$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D+M\epsilon(x_1)))^{reg}$$



$$= \frac{1}{32\pi^2}\int_{x_1>0} d^4x\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}[F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}] - \frac{\eta(iD^{\mathrm{3D}})}{2}$$

質量が正の領域を
部分多様体とみた
ときのAPS指数

以下、この等式を藤川の方法で示す。

藤川の方法

$$\frac{1}{2}\eta(H_{DW}) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\frac{\gamma_5(D+M\varepsilon(x_1))}{\sqrt{\{\gamma_5(D+M\varepsilon(x_1))\}^2}}$$

1. 正則化を選ぶ。

2. トレースを評価する完全系を選ぶ。

3. 摂動計算する。

藤川の方法

$$\frac{1}{2}\eta(H_{DW}) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\frac{\gamma_5(D+M\varepsilon(x_1))}{\sqrt{\{\gamma_5(D+M\varepsilon(x_1))\}^2}}$$

1. 正則化を選ぶ。

Pauli-Villars subtraction:

$$-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\frac{\gamma_5(D-M_2)}{\sqrt{\{\gamma_5(D-M_2)\}^2}} \qquad M_2 \gg M$$

2. トレースを評価する完全系を選ぶ。

3. 摂動計算する。

藤川の方法

$$\frac{1}{2}\eta(H_{DW}) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\frac{\gamma_5(D+M\varepsilon(x_1))}{\sqrt{\{\gamma_5(D+M\varepsilon(x_1))\}^2}}$$

1. 正則化を選ぶ。

Pauli-Villars subtraction:

$$-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\frac{\gamma_5(D-M_2)}{\sqrt{\{\gamma_5(D-M_2)\}^2}} \qquad M_2 \gg M$$

2. トレースを評価する完全系を選ぶ。

$\{\gamma_5(D^{\mathrm{free}}+M\varepsilon(x_1))\}^2$ の固有関数系

3. 摂動計算する。

[Cf. Kobayashi and Yonekura 2021]

自由domain-wallフェルミオンの完全系

$$\{\gamma_5(D^{\rm free}+M\varepsilon(x_1))\}^2\phi=\left[-\partial_\mu^2+M^2-2M\gamma_1\delta(x_1)\right]\phi=\lambda^2\phi$$

の解の完全系は $\varphi(x_1)\otimes e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$ 3次元方向は通常の平面波

$$\varphi^{\omega}_{\pm,o}(x_1)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\left(e^{i\omega x_1}-e^{-i\omega x_1}\right),$$

$$\varphi^{\omega}_{\pm,e}(x_1)=\frac{1}{\sqrt{4\pi(\omega^2+M^2)}}\left((i\omega\mp M)e^{i\omega|x_1|}+(i\omega\pm M)e^{-i\omega|x_1|}\right),$$

$$\varphi^{\rm edge}_{+,e}(x_1)=\sqrt{M}e^{-M|x_1|},$$

エッジモードが存在！

$$\omega=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+M^2-\lambda_{4D}^2}\qquad \gamma_4\varphi^{\omega,{\rm edge}}_{\pm,e/o}=\pm\varphi^{\omega,{\rm edge}}_{\pm,e/o}$$

$$\lambda_{\rm edge}=\pm|p|$$

エッジモードは質量ゼロ

物理屋フレンドリーな境界条件
=デルタ関数ポテンシャルの接続問題

固有関数系はすべて以下の”境界”条件を満たす必要がある。

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_4} \pm M\epsilon(x_1)\right] \varphi^{\omega,\mathrm{edge}}_{\pm,e}(x_1)\Big|_{x_1=0} = 0, \quad \varphi^{\omega}_{\pm,o}(x_1=0) = 0.$$

1. この条件は局所的。
2. カイラリティは保たず、角運動量を保つ。
3. この条件は手で課したのではなく、ポテンシャルによって物理的に与えられたものである。

(APS境界条件とは全く異なる)

η 不変量の計算

エッジモード部分(質量ゼロなので長距離相関があり非局所的な寄与)

$$\frac{1}{2}\eta(H_{DW})^{edge} = \frac{1}{2}\sum_{edgemodes}\phi^{edge}(x)^{\dagger}\mathrm{sgn}(H_{DW})\phi^{edge}(x) = -\frac{1}{2}\eta(iD^{\mathrm{3D}})|_{x_1=0}$$

バルク部分(重いので局所的な量の積分で書ける)

$$\frac{1}{2}\eta(H_{DW})^{bulk} = \frac{1}{2}\sum_{bulkmodes}(\phi^{bulk})^{\dagger}\mathrm{sgn}(H_{DW})\phi^{bulk}$$
$$= \frac{1}{64\pi^2}\int d^4x\,\epsilon(x_1)\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}_c F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}(x) + O(1/M).$$

PV 部分

$$-\frac{1}{2}\eta(H_{PV}) = \frac{1}{64\pi^2}\int d^4x\ \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}_c F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}(x) + O(1/M).$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D+M\epsilon(x_1)))^{reg} = \frac{1}{32\pi^2}\int_{x_1>0} d^4x\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}[F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}] - \frac{\eta(iD^{\mathrm{3D}})}{2}}$$

T anomaly のbulk-edge 相殺も明らか。

Contents

✓ 1. Introduction
素粒子論は対称性で質量をゼロにするのが基本であるが、あえて質量項を考えたい。

✓ 2. Dirac フェルミオンと質量
Diracフェルミオンは質量ゼロでカイラル対称。質量がある場合、その正負は違うトポロジカル相を記述し、ドメインウォールにはエッジモードが局在する。

✓ 3. Atiyah-Singerの指数と質量を持つDiracフェルミオン
質量を持つDirac演算子のη不変量でAS指数を書き直すことができる。

✓ 4. APS指数と質量を持つDiracフェルミオン
質量にドメインウォールを持つDirac演算子のη不変量で、質量が正(PV場の質量との相対符号が負)の部分多様体上のAPS指数を書き直すことができる。

5. 数学的証明

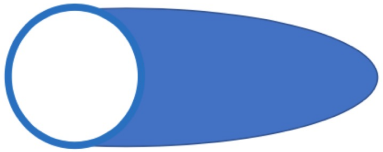
6. まとめ

この等式は常に正しいのか？

$$Ind(D_{\mathrm{APS}}) = \frac{1}{2}\eta(H_{DW}^{reg})$$

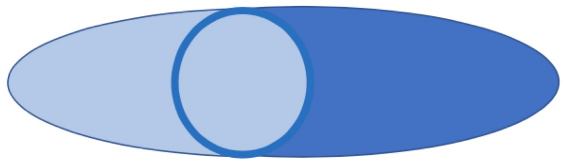
は一般の偶数次元多様体で成り立つのか？

セットアップは数学的にも非自明に異なる。



APS

1. 質量ゼロのDirac 演算子
2. 非局所的境界条件
3. カイラル対称性◯角運動量×。
4. エッジ状態が現れない。
5. 境界付き多様体上の定理



Domain-wall fermion

1. 質量のあるDirac 演算子
2. 局所的境界条件(物理的な理由)
3. カイラル対称性×角運動量◯。
4. エッジ状態が現れる(η 不変量の源)。
5. 境界のない多様体上の定理

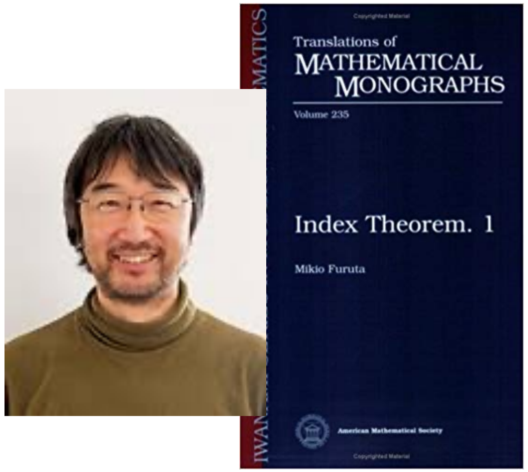
数学者の共同研究者のみなさん

「数学者への挑戦と受け止めました」

Mikio Furuta (U. Tokyo)

Shinichiroh Matsuo (Nagoya U.)

Mayuko Yamashita (Kyoto U.)



THE ATIYAH-PATODI-SINGER INDEX AND DOMAIN-WALL FERMION DIRAC OPERATORS

HIDENORI FUKAYA, MIKIO FURUTA, SHINICHIROH MATSUO, TETSUYA ONOGI, SATOSHI YAMAGUCHI, AND MAYUKO YAMASHITA

ABSTRACT. We introduce a *mathematician-friendly* formulation of the *physicist-friendly* derivation [8] of the Atiyah-Patodi-Singer index. Our viewpoint sheds some new light on the interplay among the Atiyah-Patodi-Singer boundary condition, domain-wall fermions, and edge modes.

From Ver.1 in arXiv:1910.01987

定理 **(F-Furuta-Matsuo-Onogi-Yamaguchi-Yamashita 2019)**

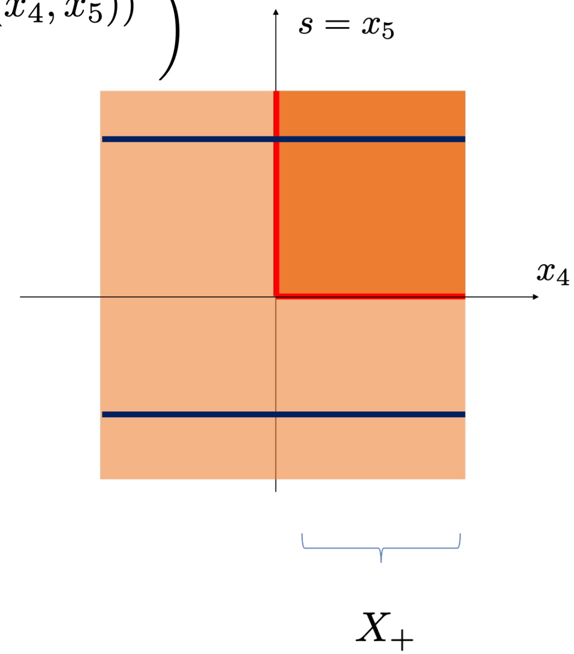
For any APS index of a massless Dirac operator on an even-dimensional Riemannian manifold X with boundary, there exists a massive (domain-wall) Dirac operator on a closed manifold, sharing its half with X, and its eta invariant is equal to the original index.

数学的証明の概要

一次元高い系で折れ曲がったdomain-wall(赤線)
を持つ質量項のあるDirac演算子を考える。

$$D^{\mathrm{5D}} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_5 + \gamma_5(D^{\mathrm{4D}} + m(x_4, x_5)) \\ -\partial_5 + \gamma_5(D^{\mathrm{4D}} + m(x_4, x_5)) & 0 \end{pmatrix}$$

$$m(x_4, x_5) = \begin{cases} M & \text{for } x_4 > 0 \ \&\ x_5 > 0 \\ 0 & \text{for } x_4 = 0 \ \&\ x_5 = 0 \\ -M_2 & \text{otherwise} \end{cases}$$



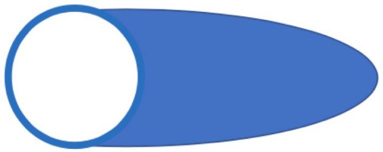
二つの異なる指数の評価により

$$Ind(D^{5D}) = Ind(D_{\mathrm{APS}}) = \frac{1}{2}\eta(H_{DW})$$

この等式は常に正しい。

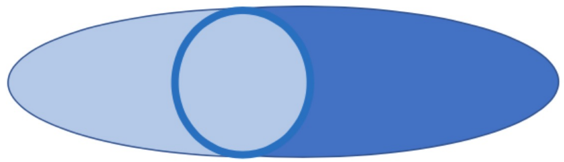
$$Ind(D_{\mathrm{APS}}) = \frac{1}{2}\eta(H_{DW}^{reg})$$

物理的にも数学的にも非自明に異なる二つの量は等しい。



APS

1. 質量ゼロのDirac 演算子
2. 非局所的境界条件
3. カイラル対称性○角運動量×。
4. エッジ状態が現れない。
5. 境界付き多様体上の定理



Domain-wall fermion

1. 質量のあるDirac 演算子
2. 局所的境界条件(物理的な理由)
3. カイラル対称性×角運動量○。
4. エッジ状態が現れる(η 不変量の源)。
5. 境界のない多様体上の定理

Contents

✓ 1. Introduction
素粒子論は対称性で質量をゼロにするのが基本であるが、あえて質量項を考えたい。

✓ 2. Dirac フェルミオンと質量
Diracフェルミオンは質量ゼロでカイラル対称。質量がある場合、その正負は違うトポロジカル相を記述し、ドメインウォールにはエッジモードが局在する。

✓ 3. Atiyah-Singerの指数と質量を持つDiracフェルミオン
質量を持つDirac演算子のη不変量でAS指数を書き直すことができる。

✓ 4. APS指数と質量を持つDiracフェルミオン
質量にドメインウォールを持つDirac演算子のη不変量で、質量が正(PV場の質量との相対符号が負)の部分多様体上のAPS指数を書き直すことができる。

✓ 5. 数学的証明
質量ゼロのAPS指数と、質量を持つDirac演算子のη不変量は、同じ１次元高いdomain-wall fermion Dirac演算子の指数の異なる表現なので必ず一致する。

6. まとめ

まとめ

指数定理は質量を持つフェルミオンでも理解できる。

しかも質量を持たないときよりも（境界のない多様体上で）物理的意味が明らかな記述[T anomaly のbulk-edge 対応]が可能。

[今回話しませんでしたが]格子ゲージ理論への応用も簡単(カイラル対称性を損ねるWilson-Dirac差分演算子で十分).

全て境界のない多様体上で統一的な記述が可能。

	continuum	lattice
AS	$-\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D-M))$	$-\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D_W-M))$
APS	$-\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D-\varepsilon M))$	$-\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D_W-\varepsilon M))$

本講演のメッセージ

質量を持ち、対称性を破ることは必ずしも悪いことではない。

むしろ物理がわかりやすくなる例もある。

おまけ

エータ不変量はspectral flow と等価。

	continuum	lattice
AS	$\mathrm{Sf}(\gamma_5(D-M))$	$\mathrm{Sf}(\gamma_5(D_W-M))$
APS	$\mathrm{Sf}(\gamma_5(D-\varepsilon M))$	$\mathrm{Sf}(\gamma_5(D_W-\varepsilon M))$

$$\mathrm{Sf} = \text{spectral flow (from PV operator with positive mass)}$$

さらなる統合

奇数次元のmod-2 指数(WittenのSU(2)anomaly を説明)も質量を持つDirac演算子を用いて定式化可能。

[F, Furuta, Matsuki, Matsuo, Onogi, Yamaguchi, Yamashita 2020]

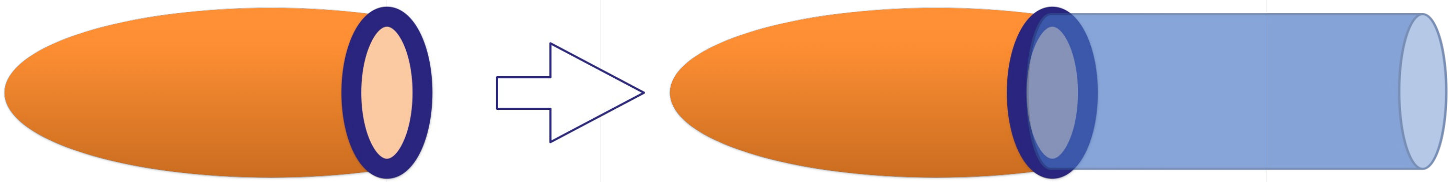
	continuum	lattice
AS	$\mathrm{Sf}(\gamma_5(D-M))$	$\mathrm{Sf}(\gamma_5(D_W-M))$
APS	$\mathrm{Sf}(\gamma_5(D-\varepsilon M))$	$\mathrm{Sf}(\gamma_5(D_W-\varepsilon M))$
mod-two AS	$\mathrm{Sf}'\begin{pmatrix} & D-M \\ -(D-M)^\dagger & \end{pmatrix}$	$\mathrm{Sf}'\begin{pmatrix} & D_W-M \\ -(D_W-M)^\dagger & \end{pmatrix}$
mod-two APS	$\mathrm{Sf}'\begin{pmatrix} & D-\varepsilon M \\ -(D-\varepsilon M)^\dagger & \end{pmatrix}$	$\mathrm{Sf}'\begin{pmatrix} & D_W-\varepsilon M \\ -(D_W-\varepsilon M)^\dagger & \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Sf}' = \text{mod-two spectral flow : counting zero-crossing pairs from PV op.}$$

Back-up slides

Theorem 1: APS index = index with infinite cylinder

In the original paper by APS, they showed

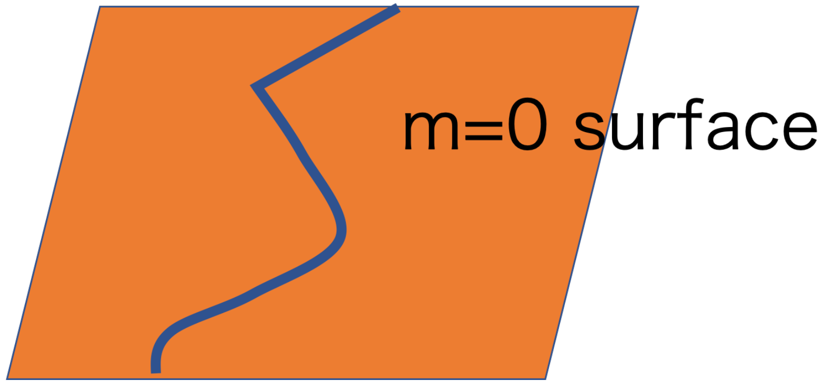


Index w/ APS b.c. = Index with infinite cylinder attached to the original boundary (w.r.t. square integrable modes).

* On cylinder, gauge fields are constant in the extra-direction.

Theorem 2: Localization (& product formula)

By giving position-dependent "mass", we can localize the zero modes to "massless" lower-dimensional surface and the index is given by the product:



$$Ind(\gamma_s(D^d + \partial_s + i\gamma_s M(s))) = Ind(D^d) \times Ind(\gamma_s \partial_s + M(s))$$

Theorem 3: In odd-dim,
APS index = boundary eta-invariant

$$\int F \wedge F \wedge \cdots$$

exists only in even dimensions.

$$Ind(D_{\mathrm{APS}}^{odd-dim}) = \frac{1}{2}\left[\eta(D^{\mathrm{boundary1}}) - \eta(D^{\mathrm{boundary2}})\right]$$