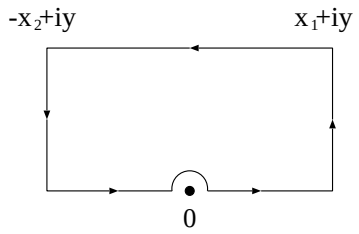
物理数学 1 演習 No.12 (00/7/7)

1. 図の積分路 $(x_1, x_2, y \to \infty)$ を考えることにより、No.6 の問題 1 の積分



$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

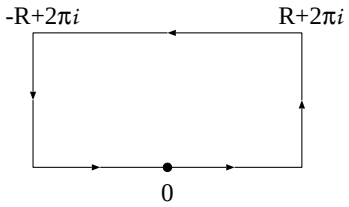
を求めよ。また、原点を下半面に迂回した場合はどうなるか。

2. 次の積分を求めよ。

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x} e^{ipx}\, dx$$

ただし、p は実数で $|p| \neq 1$ とする。

3. 図の積分路 $(R \to \infty)$ を考えることにより、積分



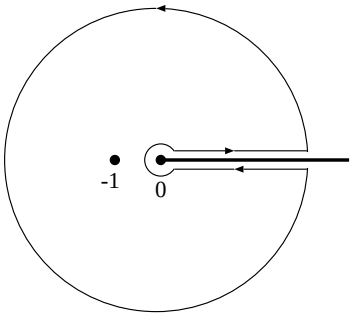
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}}{1+e^x}\, dx$$

を求めよ。ただし、$0 < a < 1$ とする。

4. 積分

$$I = \int_0^\infty \frac{x^a}{(x+1)^2}\, dx \quad (-1 < a < 1)$$

求めたい。被積分関数を複素関数とみなすと $(x \to z)$、$z = -1$ に極、$z = 0$ に分岐点を持つ。切断線を正の実軸にとることにして、図のような積分路を考えて I を求めよ。



5. 積分

$$I(\sigma) = \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 - \sigma^2} \quad (\sigma > 0)$$

について考える。この積分は積分路上に極を持つからこのままでは不定である。

(a) 主値をとることはこの積分を確定する一つの方法である。$PI(\sigma)$ を求めよ。

(b) $\sigma \to \sigma + i\gamma$ $(\gamma > 0)$ として極の位置を実軸上から少しだけずらしてやれば上の積分は実行でき、その後で $\gamma \to 0$ とすれば $I(\sigma)$ の一つの値が確定する。すなわち、$I_+(\sigma) = \lim_{\gamma \to 0} I(\sigma + i\gamma)$ を定義するのである。$I_+(\sigma)$ を実際に計算せよ。

(c) 同様にして $I_-(\sigma) = \lim_{\gamma \to 0} I(\sigma - i\gamma)$ を計算せよ。