物理数学 1 演習 No.2 (00/4/21)

1. 複素数 z の指数関数を $e^z = \sum_{n=0}^{n=\infty} z^n/n!$ で定義する。この級数は $|z| < \infty$ で絶対収束する。

   (a) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ を示せ。

   (b) $z = x + iy$ (x, y は実数) のとき、$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ となることを示せ。(実数の三角関数の級数展開を用いよ。)

2. 複素数 z の三角関数を $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$、$\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$ で定義する。

   (a) Euler の公式 $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ を示せ。

   (b) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ を示せ。

   (c) $\sin, \cos$ の加法定理を導け。

3. 複素数 z の双曲線関数を $\cosh z = (e^z + e^{-z})/2$、$\sinh z = (e^z - e^{-z})/2$ で定義する。

   (a) $\cosh z, \sinh z$ を $\cos iz, \sin iz$ で表せ。

   (b) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ を示せ。

   (c) $\cos(x + iy), \sin(x + iy)$ を実部と虚部に分けよ。

   (d) $|\sin z| \geq |\sin x|$、$|\cos z| \geq |\cos x|$ を示せ。

4. 指数関数の逆関数として対数関数が定義される。すなわち $w = \log z$ は $z = e^w$ の解である。

   (a) e^z は周期関数であることを示せ。周期はいくらか。(実三角関数の周期性を用いてもよい。)

   (b) このことから対数関数が (無限) 多価関数であることがわかる。$z = |z|e^{i\theta}$ と書くとき、すべての $\log z$ を求めよ。

   (c) $\log z$ の虚部を z の偏角 $\arg z$ と定義しよう。すなわち $\log z = \log |z| + i \arg z$ である。$0 \leq \arg z < 2\pi$ (あるいは $-\pi < \arg z \leq \pi$) と約束すれば $\log z$ は 1 価となる。これを $\log z$ の主値と呼ぶ。$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$ は主値に対しては一般には成り立たないことを示せ。

5. 複素変数の複素数値関数 $f(z)$ の微分を

$$f'(z) = \lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z+\delta z) - f(z)}{\delta z}$$

で定義する。この定義は実関数の場合と形式的には同じだが、複素数の場合は $\delta z \to 0$ は $|\delta z| \to 0$ ということであって $\arg(\delta z)$ は任意である。すなわち δz が複素平面上でどの方向から 0 に近づいても $\dfrac{f(z+\delta z) - f(z)}{\delta z}$ は同じ極限値に収束しなければならない。これは f に非常に強い制約を与える。

(a) $z = x+iy$ のとき、$u(x,y), v(x,y)$ を実関数として $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ と書ける。$\delta z = \delta x + i\delta y$、$\delta f = f(z+\delta z) - f(z) = \delta u + i\delta v$ とすると

$$f'(z) = \lim_{\delta z \to 0} \frac{\delta f}{\delta z} = \lim_{\delta z \to 0} \frac{\delta u + i\delta v}{\delta x + i\delta y}$$

となる。δz を実軸に沿って 0 に近づけることを考え、

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

を示せ。

(b) δz を虚軸に沿って 0 に近づけるとどうなるか。

(c) 上の 2 つの結果を比較し u, v の満す微分方程式を求めよ。これを Cauchy–Riemann の微分方程式 (あるいは Cauchy–Riemann の条件) という。

(d) f が微分可能なとき、u, v は Laplace の微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

を満すことを示せ。Laplace の微分方程式を満す関数を調和関数 (harmonic functions) という。

(e) $u(x,y), v(x,y)$ の偏微分が連続で Cauchy–Riemann の微分方程式を満しているとき、f は微分可能であることを示せ。(5a の逆。)