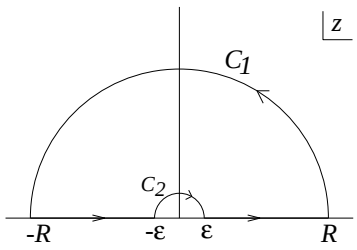
物理数学 1 演習 No.6 (00/5/26)

1. 積分
$$I_0 = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$
を Cauchy の積分定理を使って求めよう。



   (a) 図の積分路を考える。$I = \oint e^{iz}/z\, dz$ はいくらか。
   (b) $I_1 = \int_{C_1} e^{iz}/z\, dz$ とすると、$R \to \infty$ のとき $I_1 \to 0$ であることを示せ。
   (ヒント：$0 < \theta < \pi/2$ で $2\theta/\pi < \sin\theta$)
   (c) $I_2 = \int_{C_2} e^{iz}/z\, dz$ とすると、$\varepsilon \to 0$ のとき $I_2 \to -i\pi$ であることを示せ。
   (d) I_0 を求めよ。

2. 閉曲線 C および C の内部で $f(z)$ は正則とする。
   (a) z を C の内部の点、C_r を $|\zeta - z| = r$ の円周とし、r を十分小さくとり C_r が C の内部に含まれるようにする。このとき
$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$
   であることを示せ。
   (b) 右辺の積分を $r \to 0$ の極限で評価し、Cauchy の積分公式
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$
   を導け。
   (c) z が C の外部の点の場合はどうなるか。

3. Cauchy の積分公式を用いて次の積分を求めよ。
$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz\,, \qquad \oint_{|z-1|=1} \frac{dz}{(2z-1)(z+1)}\,, \qquad \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$$

4. 微分の定義
$$f'(z) = \lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z+\delta z) - f(z)}{\delta z}$$
に Cauchy の積分公式を用いて
$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta$$
を示せ。

5. 前問の操作を繰り返すことにより
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$$
を導け。すなわち正則関数は何回でも微分できる。

6. 次の積分を求めよ。ただし、n は整数とする。
$$\oint_{|z|=1} e^z z^n dz$$