物理数学 1 演習 No.9 (00/6/16)

1. $f(z)$ は $|z|<1$ で正則で、$f(0)=0$、$|f(z)|\le 1$ であるとする。

   (a) $g(z)=f(z)/z$ とおく。$z=0$ は除去可能な特異点である。$|z|<1$ で $g(z)$ が正則となるためには、どのように $g(0)$ を定めたらよいか。

   (b) $0<r<1$ として、$|z|\le r$ で $|g(z)|\le 1/r$ であることを示せ。(No.8 5(a) を用いよ。)

   (c) $|z|<1$ で $|f(z)|\le |z|$ であることを示せ。($r\to 1$ とせよ。)

   (d) ある 1 点 $z_0(0<|z_0|<1)$ で $|f(z_0)|=|z_0|$ が成り立つか、または $|f'(0)|=1$ のとき、$f(z)=e^{ic}z$(c は実定数) となることを示せ。(c)、(d) の結果を Schwarz の定理という。

2. $f(z)$ が $|z|<1$ で正則で $f(0)=0$、$|f(z)|\le 1$ ならば $|f'(0)|\le 1$ であることを示せ。

3. $f(z)$ が点 a 自身を除く a の近傍で正則であるとする。このとき a を中心とする適当な同心円 C_1, C_2 を考えると、それらの間の円環と C_1, C_2 で $f(z)$ が正則になる。C_1 の半径を C_2 の半径よりも大きくとることにする。(図を描くこと。)

   (a) z を円環内の点とする。

   $$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\ ,\qquad f_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

   と置くと、$f(z)=f_1(z)-f_2(z)$ となることを示せ。

   (b) $f_1(z)$ を $z-a$ の巾級数に展開せよ。(No.7 の問題 6)

   (c) 次に $f_2(z)$ について考える。

   $$\frac{1}{\zeta-z}=-\frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^n$$

   と書くことができ右辺が収束することを示せ。

   (d) $-f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z-a)^{-n}$ と展開できることを示し、a_{-n} の表式を求めよ。

   (e) これらの結果をまとめて、

   $$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n\ ,\qquad a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$

   ただし C は C_1 の内部にあって C_2 を含むような任意の閉曲線、と書けることを示せ。これを点 a に関する $f(z)$ の Laurent 展開という。$z-a$ の負の巾 $(n\le -1)$ の部分を特異点 a に関する $f(z)$ の主要部という。主要部がない場合、a を除去可能な特異点といい、$f(a)=a_0$ と定義すれば $f(z)$ は a で正則となる。主要部が有限級数の場合、$a_{-n}\neq 0$ であるような最大の n を h として、a を $f(z)$ の h 位 (あるいは h 次) の極という。主要部が無限級数の場合、a を $f(z)$ の真性特異点という。

4. $z=a$ が $f(z)$ が n 位の零点のとき、$1/f(z)$ は $z=a$ で n 位の極を持つことを示せ。

5. $f(z)=z^{-1}(1-z)^{-1}$ の $z=0$ に関する Laurent 展開を求めよ。この展開が成り立つ範囲を示せ。また、$z=1$ に関する Laurent 展開を求め、展開が成り立つ範囲を示せ。(図も描くこと。)