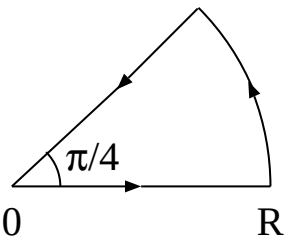
物理数学 1 演習 レポート問題 No.2 (00/7/14)
(提出期限:9 月 7 日午後 5 時. 提出場所は F632.)

1. 次の式を示せ。

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

(図の積分路に沿った e^{-z^2} の積分を考えよ。)



2. $f(z)$ が $|z-a|<R$ で正則で $|f(z)|\le M$ とする。$f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n(z-a)^n$ と書くと $\sum_{n=0}^\infty |a_n|^2R^{2n}\le M^2$ であることを示せ。($0<r<R$ とし、$\oint_{|z-a|=r}|f(z)|^2dz/(2\pi iz)$ を計算せよ。)

3. $f(z)=(1+z^2)^{-1}$ の極を求め、その点について $f(z)$ を Laurent 展開し、展開が成り立つ範囲を図示せよ。

4. (a) $f(z)=\sin(1/z)$ の $0<|z|<\infty$ での Laurent 展開を求めよ。
   (b) $z=0$ はいかなる特異点か。
   (c) 任意の定数 b について、方程式 $\sin(1/z)=b$ は $z=0$ の近傍に無限個の解を持つことを示せ。

5. 次の積分を求めよ。

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\sin\theta}$$

ただし、a,b は実数で、$a>|b|$ とする。

6. 次の積分を求めよ。

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,dx$$

ただし、$a>0$ とする。

7. 次の積分を求めよ。

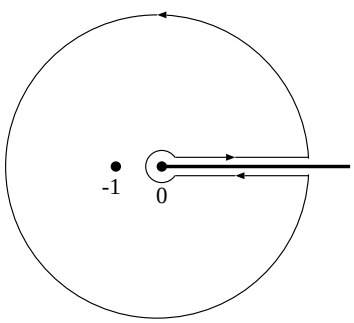
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos bx-\cos ax}{x^2}\,dx$$

ただし、$a>b>0$ とする。

8. 図の積分路を考えて積分

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+1}\,dx \quad (0<a<1)$$

を求めよ。



9. Rouché の定理を用いて代数方程式 $\sum_{k=0}^n a_kz^k=0$ ($n\ge 1$, $a_n\ne 0$) が n 個の解を持つことを示せ。($f(z)=a_nz^n$, $g(z)=\sum_{k=0}^{n-1}a_kz^k$ とするとよい。)